A Complexidade do Problema de Limitação de Influência por Imunização em Grafos *Split* e Bipartidos *

Samuel S. Morais[1], Ana Karolinna Maia[1], Carlos Vinícius G. C. Lima[2]

[1]Departamento de Computação – Universidade Federal do Ceará (UFC), Brasil

[2]Centro de Ciências e Tecnologia – Universidade Federal do Cariri (UFCA), Brasil

csamuelssm@alu.ufc.br, karolmaia@ufc.br, vinicius.lima@ufca.edu.br

Abstract. *Given a graph $G = (V, E)$, a threshold function $t : V(G) \to \mathbb{N}$, a set of initially infected vertices $S \subseteq V(G)$ and naturals k and ℓ, the problem (k, ℓ)-*INFLUENCE IMMUNIZATION BOUNDING *((k, ℓ)-*IIB*) consists of finding a set of vertices $Y \subseteq V(G)$ to be immunized such that $|Y| \leq \ell$ and the immunization of Y restricts the infection to at most k vertices. This is a* $\mathsf{W}[1]$*-hard problem parameterized by k or ℓ and* $\mathsf{W}[2]$*-hard parameterized by $|S|+\ell$ even in bipartite graphs. In this paper, we show that (k, ℓ)-*IIB *is* $\mathsf{W}[2]$*-hard parameterized by ℓ even on split graphs or bipartite graphs with $k = |S|$ and $t(v) = d_G(v)$ for every vertex $v \in V(G)$. We also show that the problem can be solved in polynomial time in general graphs if $k = |S|$ and $t(v) = 1$ for every $v \in V(G) \setminus S$.*

Resumo. *Dado um grafo $G = (V, E)$, uma função de limiares $t : V(G) \to \mathbb{N}$, um conjunto de vértices inicialmente infectados $S \subseteq V(G)$ e naturais k e ℓ, o problema (k, ℓ)-*LIMITAÇÃO DE INFLUÊNCIA POR IMUNIZAÇÃO *((k, ℓ)-*LII*) consiste em encontrar um conjunto de vértices $Y \subseteq V(G)$ a serem imunizados tal que $|Y| \leq \ell$ e a imunização de Y restringe a infecção a no máximo k vértices. Este é um problema* $\mathsf{W}[1]$*-difícil parametrizado por k ou ℓ e* $\mathsf{W}[2]$*-difícil parametrizado por $|S| + \ell$ para grafos bipartidos. Neste trabalho, nós mostramos que (k, ℓ)-*LII *é* $\mathsf{W}[2]$*-difícil parametrizado por ℓ mesmo em grafos split ou bipartidos com $k = |S|$ e $t(v) = d_G(v)$ para todo vértice $v \in V(G)$. Nós também mostramos que o problema pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos gerais se $k = |S|$ e $t(v) = 1$ para todo $v \in V(G) \setminus S$.*

1. Introdução

Modelos de infecção em grafos têm recebido grande atenção e vêm sendo estudados por pesquisadores de diversas áreas, como Economia [Banerjee 1992, Morris 2000], Marketing [Granovetter 1978, Wang e Street 2018], Epidemiologia [Barabási e Pósfai 2016, Newman 2010] e Física [Mello et al. 2021]. Pelo ponto de vista da computação, um dos primeiros trabalhos a estudar modelos deste tipo é o de [Kempe et al. 2003], que estudou o chamado *modelo de limiar*.

Considere um grafo $G = (V, E)$ em que $c_v(\tau) \in \{0, 1\}$ denota o estado do vértice $v \in V(G)$ em um dado tempo $\tau \in \mathbb{N}$. Se $c_v(\tau) = 0$, dizemos que o vértice v está *inativo* ou *não-infectado* no tempo τ; caso contrário, dizemos que v está *ativo* ou *infectado* no

*Parcialmente financiado por CNPq Universal 404479/2023-5 e CNPq Universal 422912/2021-2

tempo τ. Uma coleção de estados $C_\tau = (c_v(\tau))_{v \in V(G)}$ é dita uma *configuração* de G no tempo τ. Uma sequência de configurações $\mathcal{P} = (C_\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ de G é chamada de um *processo dinâmico discreto* em G. Dados um grafo G, uma função $t : V(G) \to \mathbb{N}$ que atribui a cada vértice v de G um valor chamado de *limiar* de v, e um conjunto $S \subseteq V(G)$ de vértices inicialmente infectados chamado de *conjunto de sementes*, dizemos que $\mathcal{P} = I_t(G, S)$ é um *processo t-irreversível* em G se $\mathcal{P}$ é um processo dinâmico discreto em G tal que, para todo $v \in V(G)$, temos que $c_v(0) = 1$ se e somente se $v \in S$ e $c_v(\tau + 1) = 1$ se e somente se $|\{u \in N_G(v) \mid c_u(\tau) = 1\}| \geq t(v)$ para todo $v \in V(G) \setminus S$. Ou seja, em um processo t-irreversível $\mathcal{P} = I_t(G, S)$, iniciamos com todos os vértices de S infectados no tempo $\tau = 0$ e, a cada passo de tempo sucessivo, um vértice não-infectado v torna-se infectado se possuir *pelo menos seu limiar* $t(v)$ de vizinhos infectados no passo de tempo anterior. Além disso, uma vez que um vértice é infectado, ele permanece infectado. Dizemos que o processo termina quando mais nenhum vértice pode ser infectado. Processos irreversíveis são utilizados para modelar diversos fenômenos, entre eles: difusão de (des-)informações e doenças contagiosas.

Definido este modelo, em [Kempe et al. 2003] foi estudado o problema INFLUENCE MAXIMIZATION em que o objetivo é encontrar um conjunto de sementes de cardinalidade no máximo k que maximiza o número de infectados. Eles mostraram que este problema é NP-difícil, mas é aproximável por um fator de $(1 - {}^1\!/_e)$. O problema TARGET SET SELECTION consiste em decidir se um grafo possui um conjunto de sementes de cardinalidade no máximo k que infecta *todo o conjunto de vértices* do grafo [Chen 2009]. Este problema é NP-completo mesmo para grafos r-regulares não-bipartidos com $r \geq 3$ [Dreyer e Roberts 2009].

Em um cenário de infecção como o descrito acima, pode-se pensar não em maximizar o número de infectados, mas em conter a infecção. Um problema bastante estudado neste sentido é o problema FIREFIGHTER [Hartnell 1995, Finbow e MacGillivray 2009]. Neste trabalho, nós estudamos um problema similar, chamado de (k, ℓ)-LIMITAÇÃO DE INFLUÊNCIA POR IMUNIZAÇÃO ((k, ℓ)-INFLUENCE IMMUNIZATION BOUNDING em inglês), abreviado por (k, ℓ)-LII e introduzido por [Cordasco et al. 2023]. Neste problema, recebemos um grafo $G = (V, E)$ com limiares $t : V(G) \to \mathbb{N}$, um conjunto de sementes $S \subseteq V(G)$ e $k, \ell \in \mathbb{N}$. O objetivo então é decidir se existe um conjunto de vértices $Y \subseteq V(G)$, com $|Y| \leq \ell$, tal que, após *imunizar* os vértices de Y, a infecção iniciada por S é contida a no máximo k vértices no fim do processo. A *imunização* de um vértice é análoga a sua remoção do grafo, isto é, um vértice imunizado não pode ser infectado e não influencia na infecção dos seus vizinhos. [Cordasco et al. 2023] mostrou que (k, ℓ)-LII é W[1]-difícil parametrizado por k ou por ℓ mesmo quando $t(v) = 1$ para todo $v \in V(G)$. Além disso, eles mostraram que o problema é W[2]-difícil parametrizado por $|S| + \ell$ para grafos bipartidos. Os autores também mostraram que o problema é FPT quando parametrizado por algumas combinações de parâmetros, entre elas $k + \ell$. Quando $k = |S|$, temos uma variante do problema que chamamos de *restrição total*: o objetivo é proibir qualquer vértice não-infectado de se infectar. Mostramos que a variante de restrição total do (k, ℓ)-LII é W[2]-difícil parametrizada por ℓ mesmo para grafos *split* ou grafos bipartidos em que o limiar de cada vértice é igual ao seu grau. Além disso, mostramos que esta variante pode ser resolvida em tempo polinomial quando os limiares de todos os vértices não-infectados são iguais a 1, restrição esta em que o problema original permanece W[1]-difícil [Cordasco et al. 2023].

2. Definições

Dado um processo t-irreversível $\mathcal{P} = I_t(G, S)$ e um conjunto $Y \subseteq V(G)$ de vértices imunizados, definimos um processo *t-irreversível com vértices imunizados* $\mathcal{P}_Y = I_t(G - Y, S - Y)$. Observe que não adicionamos a restrição de que $Y \cap S = \emptyset$. De fato, permitimos que vértices inicialmente infectados também sejam imunizados. Porém, isto não significa que um vértice infectado imunizado se torna inativo. Significa apenas que ele não é mais "contagioso", ou seja, não influenciará os estados de seus vizinhos. Veja ainda que a imunização de um vértice é análoga a remoção deste vértice do grafo. Note que podemos assumir $t(v) \leq d_G(v)$ para todo $v \in V(G) \setminus S$, uma vez que um vértice v com $t(v) > d_G(v)$ nunca se tornaria infectado. Para um processo t-irreversível $\mathcal{P}$, definimos $A^*(\mathcal{P})$ como o conjunto de vértices infectados (ou *ativos*) ao fim do processo.

Para um dado $k \geq |S|$ natural, dizemos que Y é um conjunto *k-restritor* de $\mathcal{P}$ se $|A^*(\mathcal{P}_Y) \cup S| \leq k$. Ou seja, imunizando os vértices de Y, o número de vértices infectados ao fim do processo, *contando com os inicialmente infectados*, não excede k. Em outras palavras, a infecção é *restrita* a no máximo k vértices quando imunizamos Y. Se Y é um conjunto $|S|$-restritor, dizemos que Y é um *conjunto de restrição total* de $\mathcal{P}$. Observe que, se Y é um conjunto de restrição total de $\mathcal{P}$, então $A^*(\mathcal{P}_Y) \cup S = S$, isto é, todos os vértices não infectados permanecem não infectados durante todo o processo. Definimos então o problema (k, ℓ)-LIMITAÇÃO DE INFLUÊNCIA POR IMUNIZAÇÃO.

(k, ℓ)-LIMITAÇÃO DE INFLUÊNCIA POR IMUNIZAÇÃO
Entrada: Um processo t-irreversível $\mathcal{P} = I_t(G, S)$ e naturais $k \geq |S|$ e ℓ.
Pergunta: Existe um conjunto k-restritor Y de $\mathcal{P}$ tal que $|Y| \leq \ell$?

O *número de k-restrição* de um processo t-irreversível $\mathcal{P}$, denotado por $\mathfrak{R}(\mathcal{P}, k)$, é igual à cardinalidade de um conjunto k-restritor mínimo de $\mathcal{P}$. Quando $k = |S|$, dizemos que $\mathfrak{R}_T(\mathcal{P}) = \mathfrak{R}(\mathcal{P}, |S|)$ é o *número de restrição total* de $\mathcal{P}$. Observe que $\mathfrak{R}(\mathcal{P}, k) \leq \mathfrak{R}_T(\mathcal{P})$, para todo $k \geq |S|$.

Dado um grafo $G = (V, E)$, a *vizinhança fechada* de um vértice $v \in V(G)$, denotada por $N_G[v]$ é $N_G(v) \cup \{v\}$. A vizinhança fechada de um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$, denotada por $N_G[S]$, é definida de maneira análoga.

3. Resultados de dificuldade

Teorema 3.1. *A versão de restrição total de (k, ℓ)-LII é $\mathsf{W}[2]$-difícil parametrizada pelo número de vértices imunizados ℓ mesmo para grafos split com $t(v) = d_G(v)$ para todo vértice $v \in V(G)$.*

Demonstração. Faremos uma redução a partir do problema SET COVER. Neste problema, recebemos um conjunto universo $\mathcal{U} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, uma coleção $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ de subconjuntos de $\mathcal{U}$ e um parâmetro $c \in \mathbb{N}$. O objetivo é encontrar $C \subseteq \mathcal{S}$ com $|C| \leq c$ tal que a união dos conjuntos em C seja igual a $\mathcal{U}$. Este problema é $\mathsf{W}[2]$-difícil parametrizado por c [Downey e Fellows 2012].

Seja $\langle \mathcal{U}, \mathcal{S}, c \rangle$ uma instância de SET COVER. Vamos criar um grafo *split* G tal que $V(G) = \mathcal{U} \cup \mathcal{S}$, onde $\mathcal{S}$ é uma clique e $\mathcal{U}$ é um conjunto independente de G. Vamos então adicionar a G as arestas $\{a_i S_j \mid a_i \in S_j\}$. Definimos o conjunto de vértices inicialmente infectados como $S = \mathcal{S}$ e $t(v) = d_G(v)$ para cada vértice $v \in V(G)$, obtendo o processo

t-irreversível $\mathcal{P} = I_t(G, S)$. Por fim, fazemos $\ell = c$ e $k = |S|$, ou seja, queremos encontrar um conjunto de restrição total de tamanho no máximo c.

Seja $C \subseteq \mathcal{S}$ uma solução para a nossa instância de SET COVER. Observe que C é um conjunto de restrição total para $\mathcal{P}$, uma vez que todo vértice não-infectado a_i terá no máximo $d_G(a_i) - 1 < t(a_i)$ vizinhos infectados não-imunizados. Como $|C| \leq c$, temos que C é uma solução para a nossa instância de (k, ℓ)-LII.

Por outro lado, seja Y um conjunto de restrição total para $\mathcal{P}$. Primeiro, note que se $Y \not\subseteq \mathcal{S}$, podemos obter um novo conjunto de restrição total Y' de mesmo tamanho para $\mathcal{P}$ com $Y' \subseteq \mathcal{S}$. Suponha que $a_i \in Y$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então, existe um conjunto $S_j \in \mathcal{S}$ tal que $a_i \in S_j$. Faça $Y' = (Y \setminus \{a_i\}) \cup \{S_j\}$. Observe que Y' também é um conjunto de restrição total para $\mathcal{P}$ e que $|Y'| = |Y|$. Podemos aplicar o mesmo procedimento até obtermos um conjunto de restrição total que é subconjunto de $\mathcal{S}$. Vamos assumir então que $Y \subseteq \mathcal{S}$. Como Y é um conjunto de restrição total para $\mathcal{P}$, todo vértice $a_i \in \mathcal{U}$ está coberto por Y, logo Y também é uma solução para SET COVER.

Como o parâmetro c do SET COVER corresponde ao parâmetro ℓ, temos que (k, ℓ)-LII é W[2]-difícil parametrizado por ℓ mesmo para grafos *split* com $k = |S|$ e $t(v) = d_G(v)$ para todo $v \in V(G)$. □

Podemos observar que arestas entre vértices inicialmente infectados não alteram a solução. Portanto podemos removê-las. Aplicando esta observação na redução acima, podemos transformar a clique do grafo *split* em um conjunto independente, obtendo um grafo bipartido. Temos então o seguinte corolário.

Corolário 3.1.1. *A versão de restrição total de* (k, ℓ)-LII *é* W[2]*-difícil parametrizada pelo número de vértices imunizados* ℓ *mesmo para grafos bipartidos com* $t(v) = d_G(v)$ *para todo* $v \in V(G)$.

4. Restrição total com limiar 1 para todo vértice não-infectado

Teorema 4.1. (k, ℓ)-LII *é polinomial quando* $k = |S|$ *e* $t(v) = 1$ *para todo* $v \in V(G) \setminus S$.

Demonstração. Seja $\mathcal{P} = I_t(G, S)$ um processo t-irreversível recebido como entrada de (k, ℓ)-LII com $t(v) = 1$ para todo $v \in V(G) \setminus S$ e $k = |S|$. Podemos particionar $V(G)$ em S e $V(G) \setminus S$. Aplicamos a observação de que arestas entre vértices de S não afetam a solução, então podemos removê-las. Além disso, podemos remover de G todos os vértices que não estão em $N_G[S]$, pois apenas precisamos impedir que os vértices de $N_G(S) \setminus S$ sejam infectados. Também podemos remover as arestas entre os vértices de $N_G(S) \setminus S$. Resta então apenas um grafo bipartido com arestas com uma extremidade em S e outra em $N_G(S) \setminus S$. É suficiente cobrir todas as arestas deste grafo bipartido, imunizando alguma extremidade ou ambas. Note que qualquer aresta não coberta resultaria na infecção de algum vértice não-infectado. Portanto, precisamos encontrar uma cobertura mínima de vértices para este grafo bipartido, o que pode ser feito em tempo polinomial [Bondy e Murty 2008]. □

Referências

Banerjee, A. V. (1992). A simple model of herd behavior. *The quarterly journal of economics*, 107(3):797–817.

Barabási, A.-L. e Pósfai, M. (2016). *Network science*. Cambridge University Press, Cambridge.

Bondy, J. A. e Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory*. Springer, New York.

Chen, N. (2009). On the approximability of influence in social networks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23(3):1400–1415.

Cordasco, G., Gargano, L., e Rescigno, A. A. (2023). Immunization in the threshold model: A parameterized complexity study. *Algorithmica*, 85(11):3376–3405.

Downey, R. G. e Fellows, M. R. (2012). *Parameterized complexity*. Springer Science & Business Media.

Dreyer, P. A. e Roberts, F. S. (2009). Irreversible k-threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion. *Discrete Applied Mathematics*, 157(7):1615–1627.

Finbow, S. e MacGillivray, G. (2009). The firefighter problem: a survey of results, directions and questions. *Australas. J Comb.*, 43:57–78.

Granovetter, M. (1978). Threshold models of collective behavior. *American journal of sociology*, 83(6):1420–1443.

Hartnell, B. (1995). Firefighter! an application of domination. In *the 24th Manitoba Conference on Combinatorial Mathematics and Computing, University of Minitoba, Winnipeg, Cadada, 1995*.

Kempe, D., Kleinberg, J., e Tardos, E. (2003). Maximizing the spread of influence through a social network. In *Proceedings of the Ninth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, KDD '03, page 137–146, New York, NY, USA. Association for Computing Machinery.

Mello, I. F., Squillante, L., Gomes, G. O., Seridonio, A. C., e de Souza, M. (2021). Epidemics, the ising-model and percolation theory: a comprehensive review focused on covid-19. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 573:125963.

Morris, S. (2000). Contagion. *The Review of Economic Studies*, 67(1):57–78.

Newman, M. E. J. (2010). *Networks: an introduction*. Oxford University Press, Oxford; New York.

Wang, W. e Street, W. N. (2018). Modeling and maximizing influence diffusion in social networks for viral marketing. *Applied network science*, 3:1–26.