Subdivisões de Orientações do Grafo Bipartido Completo $K_{2,3}$*

Philipe M. Serra[1†], Ana Karolinna Maia[1]

[1]Departamento de Computação - Universidade Federal do Ceará (UFC)

philipemserra@gmail.com, karolmaia@ufc.br

Abstract. *In this work, we explore the problem of finding a subdivision of a digraph F in a digraph D, with the goal of identifying polynomial-time and NP-complete instances of the problem. More specifically, we focus on the cases where F is an orientation of $K_{2,3}$, in an attempt to gain a clearer understanding of a conjecture regarding the problem in planar graphs. We present all possible orientations of $K_{2,3}$ and the cases where the problem can be solved in polynomial time, using flow techniques or the Directed Grid Theorem. The complexity of only one case remains open.*

Resumo. *Neste trabalho, exploramos o problema de encontrar uma subdivisão em um digrafo F em um digrafo D, com o objetivo de identificar instâncias Polinomiais e NP-completas do mesmo. Mais especificamente, focamos nos casos em que F é uma orientação do $K_{2,3}$, na tentativa de ter uma visão mais clara sobre uma conjectura à respeito do problema em grafos planares. Apresentamos todas as possíveis orientações do $K_{2,3}$ e os casos que o problema pode ser resolvidos de maneira polinomial, utilizando fluxos ou Teorema do Grid Direcionado. A complexidade de apenas um caso permanece em aberto.*

1. Introdução

Uma *subdivisão* de um digrafo $F = (V, A)$, ou uma F-subdivisão, é um digrafo obtido a partir de F através da substituição de cada arco $(a, b) \in A(F)$ por caminhos direcionados de a para b (que podem ser o próprio arco), conservando a direção original. Nós consideramos a seguinte questão para um digrafo predefinido F.

F-SUBDIVISÃO
Entrada: Um digrafo D.
Pergunta: D contém uma subdivião de F (como subgrafo)?

Esse problema aparece como uma generalização natural para digrafos de um dos problemas que compõe a teoria dos menores, um tema fundamental cujos resultados trouxeram diversos avanços para a área de teoria dos grafos [Robertson and Seymour 1995]. Um dos fatos que ilustra a relevância do estudo da detecção de subdivisões em grafos é que muitas classes interessantes são definidas pela proibição de certos subgrafos (induzidos). Grafos planares são um exemplo bem conhecido: eles foram caracterizados por Kuratowski como os grafos que não possuem subdivisões do K_5 ou $K_{3,3}$. Outras classes de grafos e digrafos determinadas pela proibição de um conjunto de subgrafos podem ser vistas em [Chudnovsky et al. 2006, Chudnovsky and Seymour 2007, Granot et al. 2000].

*Parcialmente financiado por CNPq Universal 404479/2023-5.
†Bolsa UFC pelo programa de iniciação científica Pibic-UFC.

O problema alternativo em que procuramos por subdivisões *induzidas* de um determinado grafo H em um grafo qualquer recebido como entrada G também é uma questão de interesse. O caso não-direcionado é NP-completo como mostrado por Lévêque at al. para $H = K_5$ [Lévêque et al. 2009] enquanto seu equivalente para subdivisões não-induzidas pode ser resolvido em tempo polinomial para todo H fixo pelo algoritmo de linkage de Robertson and Seymour [Robertson and Seymour 1995]. Alguns algoritmos polinomiais para encontrar subdivisões induzidas em grafos não direcionados utilizam técnicas sofisticadas. Um exemplo é uso do algoritmo *three-in-a-tree* de Chudnovsky e Seymour [Chudnovsky and Seymour 2010]. O problema de three-in-a-tree consiste em responder para um determinado grafo e três vértices pré-determinados, se há uma árvore contendo esses vértices. O algoritmo para resolvê-lo, que tem o tempo de execução de $O(n^4)$, fornece uma ferramenta geral que pode ser usada em muitas soluções do problema de subdivisão, como foi feito no mesmo artigo para o $K_{2,3}$.

Bang-Jensen et al. [Bang-Jensen et al. 2015] foram os primeiros a investigar o problema de encontrar uma F-subdivisão em que F é um grafo direcionado. Eles encontraram muitos digrafos F para os quais o problema é NP-completo, através do problema de encontrar um 2-linkage em um digrafo [Fortune et al. 1980]. Em particular, este é o caso para todos os digrafos que possuem somente *vértices grandes*, isto é, ou seu grau de saída (ou entrada) é maior ou igual a 3, ou o grau total é maior ou igual a 4 (caso contrário, dizemos que o *vértice* é *pequeno*). Por outro lado, eles apresentaram algoritmos polinomiais para resolver o problema em vários outros digrafos (como ciclos, caminhos, *spindles*, etc.), muitos dos quais utilizam fluxos com ferramenta. Isso os conduziu a conjecturar que existe uma dicotomia entre instâncias Polinomiais e NP-completas. Entretanto, não existe uma imagem clara de quais grafos em geral são tratáveis e quais são difíceis, embora algumas conjecturas forneçam algum indício.

Conjectura 1. *[Bang-Jensen et al. 2015] O problema F-*SUBDIVISÃO *é NP-completo para todo digrafo não planar F.*

Para abordar a Conjectura 1, gostaríamos de investigar primeiramente o que ocorre com relação aos grafos *periplanares*, que são aqueles que não possuem subdivisões do K_4 ou $K_{2,3}$. Neste trabalho, analisamos o que acontece em subdivisões de orientações $K_{2,3}$.

2. Orientações do $K_{2,3}$ Isomorfas e equivalentes

O *inverso* de um digrafo D qualquer, ou D*-invertido*, é o digrafo criado ao inverter todos os arcos de D, ou seja se (u, v) é um arco em D, então (v, u) é um arco em D-invertido.

Proposição 2. *Uma (F-invertido)-subdivisão é resolvido em tempo polinomial se, e só se, F-subdivisão também é resolvido em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja D o digrafo usado na entrada do problema de (F-invertido)-subdivisão, basta procurar uma subdivisão de F em D-invertido, uma vez que uma subdivisão de F-invertido existe se, e só se, houver uma subdivisão de F em D-invertido. Como F é congruente a um (F-invertido)-invertido, se (F-invertido)-subdivisão é resolvido em tempo polinomial, então F-subdivisão é resolvido em tempo polinomial. □

Sejam a, b, c, d, e os vértices do $K_{2,3}$, de modo que $d(a) = d(e) = 3$. Podemos analisar apenas os casos de orientações com $d^+(a) \geq 2$, pois as outras possibilidades são inversas de tais orientações. As Figuras 1 e 2 mostram todos os casos de orientações isomorfas.

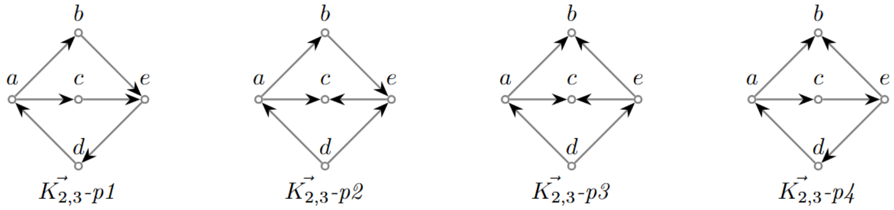

Figura 1. Orientações apenas com vértices pequenos

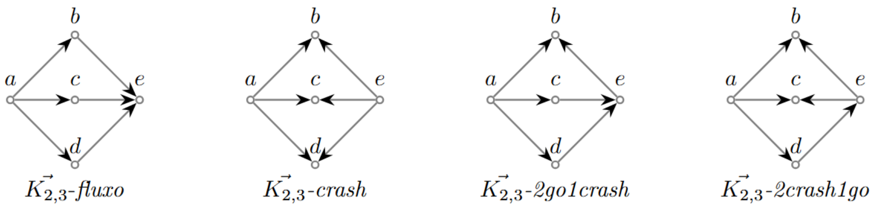

Figura 2. Orientações com dois vértices grandes à esquerda e com um vértice grande à direita

3. Orientações do $K_{2,3}$ apenas com vértices pequenos

Teorema 3. *[Kawarabayashi and Kreutzer 2015] Existe uma função $f(k)$ tal que todo grafo direcionado com largura de árvore direcionada pelo menos $f(k)$ contém uma grade cilíndrica de tamanho k como um menor borboleta.*

Aplicando o Teorema 3, caso o digrafo D de entrada tenha largura de árvore limitada por $f(4)$, uma vez que o problema do k-linkage pode ser resolvido em tempo polinomial nesse tipo de grafo, F-SUBDIVISÃO também pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos com largura em árvore limitada [Johnson et al. 2001].

Caso o digrafo D de entrada não tenha largura de árvore limitada por tal parâmetro, então D contém uma grade cilíndrica de tamanho 4 como uma menor borboleta. Se existe uma subdivisão de F na tal grade cilíndrica então existe uma subdivisão de F no digrafo D. É possível encontrar subdivisões de todos os casos de orientação apenas com vértices pequenos em uma grade cilíndrica de tamanho 4, como mostra a Figura 3, onde as subdivisões estão marcadas em preto.

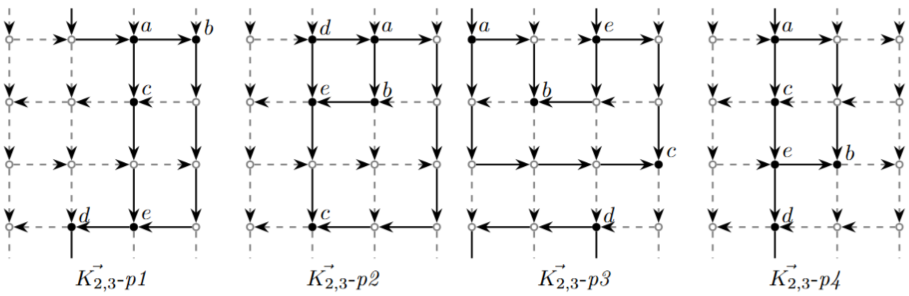

Figura 3. Subdivisões de Orientações de $K_{2,3}$ com vértices pequenos encontrados em uma grade cilíndrica de tamanho 4. As subdivisões foram marcadas em preto

4. Orientações do $K_{2,3}$ com dois vértices grandes

Teorema 4. *[Bang-Jensen et al. 2015] Seja F um $(k_1, k_2, ..., k_p)$-spindle e $k_i \leq 2, \forall i, 1 \leq i \leq p$, então uma F-subdivisão é solucionável em tempo polinomial.*

O $\vec{K}_{2,3}$-*fluxo* é um $(2, 2, 2)$-spindle, logo, pelo Teorema 4, ($\vec{K}_{2,3}$-*fluxo*)-SUBDIVISÃO é solucionável em tempo polinomial.

Existe uma redução do *2-Linkage* para $\vec{K}_{2,3}$-*crash*-subdivisão, que não será analisada por falta de espaço.

5. Orientações do $K_{2,3}$ com exatamente um vértice grande

Um digrafo é pequeno se ele contém apenas vértices pequenos e, dado um digrafo D, o D-*pequeno* é o digrafo sem arcos paralelos criado ao transformar cada vértice v de D nos conjunto de vértices $V^- = \{v_1^-, v_2^-, \ldots, v_{d_-(v)}^-\}$ e $V^+ = \{v_1^+, v_2^+, \ldots, v_{d_+(v)}^+\}$ de modo que se (u, v) é um arco em D então existem j, i tais que (u_j^+, v_i^-) é um arco em D-pequeno e que, $\forall i, 1 \leq i < d_-(v), 1 \leq j < d_+(v)$, os pares (v_i^-, v_{i+1}^-), (v_j^+, v_{j+1}^+) e $(v_{d-(v)}^-, v_1^+)$ também são arcos em D-pequeno.

Teorema 5. *($\vec{K}_{2,3}$-2go1crash)-*SUBDIVISÃO *é solucionável em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja o D o digrafo de entrada, para cada par de vértices (a, d) de D, será executada a seguinte operação: Para cada tripla de arcos saindo de a e para cada par de arcos entrando em d, exclua o restante dos arcos que entram e saem de a e d. Transforme o digrafo D em D-pequeno, porém restaure os vértices a e d. Crie uma *rede* de modo que, se um arco não contém a, então ele tem capacidade 2 e, caso contrário, ele tem capacidade 1. Defina a como fonte e d como sumidouro. Seja (a, v_1), $(a, v2)$, $(a, v3)$ os novos arcos que saem de a e (u_1, d), (u_2, d) os novos arcos que entram em d. Utilizando o algoritmo de Ford-Fulkerson, se o fluxo máximo obtido é 3, então existem 3 caminhos P_1, P_2, P_3 saindo de $(a, v_1), (a, v_2), (a, v_3)$ respectivamente, de modo que dois caminhos, s.p.g, P_1, P_2 terminam em um dos arcos de d, suponha (u_1, d), e o outro caminho P_3 termina no outro arco, suponha (u_2, d). Note que, como o fluxo máximo que um vértice v pode receber é 2, então no máximo 2 caminhos se cruzam em v. Um conjunto $\{a', b', c', d', e'\}$ é bom se ele forma uma subdivisão de $\vec{K}_{2,3}$-*2go1crash*. Se nenhum dos caminhos compartilham vértices, então $\{a, v_1, v_2, u_1, d\}$ é bom. Suponha que os P_1, P_2 compartilham somente (u_1, d) como arco e a, u_1, d como vértices, logo o P_3 cruza com os outros caminhos do fluxo. Pegue o primeiro cruzamento, s.p.g, em P_1, no vértice w. Logo $\{a, v_1, v_2, w, u_1\}$ é bom. Logo, suponha que primeiro cruzamento de P_1, P_2 acontece no vértice t. Suponha que o primeiro cruzamento de P_3 com $\{P_1, P_2\}$, s.p.g, é em P_1 em w. se w tem um caminho para t, então $\{a, v_1, v_2, w, t\}$ é bom. Se não, então t tem um caminho para w e $\{a, v_1, v_2, t, w\}$ é bom. Caso não exista cruzamento de P_3 com $\{P_1, P_2\}$, então $\{a, v_1, v_2, w, d\}$ é bom. Note que se existem vértices b, c, e tais que $\{a, b, c, e, d\}$ é bom, então ao fazer tal operação com o par (a, d) encontraremos o fluxo máximo 3. Como D-pequeno conserva cruzamentos, existe um par (a, d) que gera fluxo máximo 3 para tal *network* se, e só se, existe uma ($\vec{K}_{2,3}$-*2go1crash*)-subdivisão em D. Logo podemos solucionar ($\vec{K}_{2,3}$-*2go1crash*)-subdivisão em $O(V^2E^6)$. □

O caso ($\vec{K}_{2,3}$-*2crash1go*)-subdivisão permanece aberto.

Referências

Bang-Jensen, J., Havet, F., and Maia, A. K. (2015). Finding a subdivision of a digraph. *Theoretical Computer Science*, 562:283 – 303.

Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P., and Thomas, R. (2006). The strong perfect graph theorem. *Ann. of Math. (2)*, 164(1):51–229.

Chudnovsky, M. and Seymour, P. (2007). Excluding induced subgraphs. In *Surveys in combinatorics 2007*, volume 346 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 99–119. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Chudnovsky, M. and Seymour, P. (2010). The three-in-a-tree problem. *Combinatorica*, 30(4):387–417.

Fortune, S., Hopcroft, J., and Wyllie, J. (1980). The directed subgraph homeomorphism problem. *Theoretical Computer Science*, 10(2):111 – 121.

Granot, D., Granot, F., and Zhu, W. R. (2000). Naturally submodular digraphs and forbidden digraph configurations. *Discrete Appl. Math.*, 100(1-2):67–84.

Johnson, T., Robertson, N., Seymour, P. D., and Thomas, R. (2001). Directed tree-width. *J. Combin. Theory Ser. B*, 82(1):138–154.

Kawarabayashi, K.-i. and Kreutzer, S. (2015). The directed grid theorem. In *Proceedings of the 47th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*.

Lévêque, B., Lin, D. Y., Maffray, F., and Trotignon, N. (2009). Detecting induced subgraphs. *Discrete Appl. Math.*, 157(17):3540–3551.

Robertson, N. and Seymour, P. D. (1995). Graph minors. XIII. The disjoint paths problem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 63(1):65–110.