

Aspectos Algorítmicos de Imersões em Digrafos *

Luís A. L. Bezerra¹, Jonas Costa², Ana K. Maia¹

¹Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará – Fortaleza – CE – Brasil
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – Redenção – CE – Brasil

luislopesbezerra@alu.ufc.br, jonascosta@unilab.edu.br, karolmaia@ufc.br

Resumo. *Imersão, forte ou fraca, é uma importante relação de contenção entre (di)grafos. Determinar se um digrafo H está imerso em um digrafo G é um problema NP-completo no caso geral. Neste artigo, propomos algoritmos polinomiais para duas classes específicas de digrafos e provamos a NP-completude do teste de imersão de H quando este satisfaz certas condições.*

1. Introdução

Nesse trabalho, nós seguimos a notação padrão de grafos, digrafos (ou grafos direcionados) e complexidade computacional que podem ser encontradas em [Bondy and Murty 2008, Bang-Jensen and Gutin 2008, Garey and Johnson 1990].

Existem diferentes formas de verificarmos se um (di)grafo H está contido em um (di)grafo G . Por exemplo, podemos procurar uma cópia exata de H em G , isto é, checar se G possui um sub(di)grafo isomorfo a H . Mas podemos também nos perguntar se G possui um grafo “similar a” H , ou obtido a partir de H . O significado de “similar” ou “obtidos a partir de” variam.

O estudo dessas relações de contenção desempenham um papel fundamental em Teoria dos Grafos, dado que muitas classes interessantes são definidas pela proibição de certos subgrafos (induzidos). Grafos planares são um exemplo bem conhecido: eles foram caracterizados por Kuratowski como os grafos que não possuem grafos “obtidos a partir” do $K_{3,3}$ ou K_5 . Outro exemplo notório considerando subgrafos induzidos são os grafos perfeitos. O teorema forte dos grafos perfeitos afirma que um grafo é perfeito se e somente se não contém um subgrafo induzido que é um ciclo ímpar ou o complemento de um ciclo ímpar [Chudnovsky et al. 2006]. Outras classes de grafos determinadas pela proibição de um conjunto de subgrafos podem ser vistas em [Chudnovsky and Seymour 2007, Granot et al. 2000].

Nós examinamos uma dessas relações de contenção, chamada de *imersão*.

Definição 1 (Imersão). *Dizemos que H é imerso em G , ou que G possui uma imersão de H se existe mapeamento ϕ tal que:*

- $\phi(v) \in V(G)$, $\forall v \in V(H)$;
- $\forall e = uv \in E(H)$, $\phi(e)$ é um caminho (direcionado) em G entre $\phi(u)$ e $\phi(v)$;
- Se $e, f \in E(H)$ são distintas, então $\phi(e)$ e $\phi(f)$ são disjuntos em arestas;
- $\phi(u) \neq \phi(v)$, $\forall u, v \in V(H)$ onde $u \neq v$.

Se uma imersão for tal que $\forall v \in V(H)$ e $\forall e \in E(H)$, $\phi(v)$ não é um vértice interno de $\phi(e)$, então ela é uma imersão forte.

*Parcialmente financiado por CNPq 442977/2023-9 e CNPq Proc 404479-2023-5.

Nós consideramos o seguinte problema para um digrafo fixo H :

H -IMERSÃO

Entrada: Um digrafo G .

Pergunta: G possui uma imersão de H ?

Para grafos não direcionados, o problema acima possui solução de tempo polinomial [Robertson and Seymour 1995]. Já para digrafos, H -IMERSÃO é NP-completo [Chudnovsky et al. 2012]. Nesse mesmo artigo, os autores obtêm um algoritmo polinomial para encontrar a imersão de um digrafo fixo H em um digrafo semi-completo G . Para inteiros $i, j \geq 0$, denota-se por $I_{i,j}$ o digrafo com dois vértices v_1, v_2 e com i arcos paralelos de v_1 para v_2 e j arcos paralelos de v_2 para v_1 . Para um inteiro $k \geq 1$ denota-se por A_k o digrafo acíclico com $2k$ vértices tal que o grafo não direcionado subjacente é um ciclo de tamanho $2k$ e todo vértice possui grau de saída igual zero, ou grau de entrada igual a zero, chamamos A_k de ciclo alternado. Em [Kim and Seymour 2013], é provado que testar a imersão de $I_{1,2}$ e testar a imersão de A_k (para um k fixo) pode ser feito em tempo polinomial.

Em [DeVos et al. 2012], são estudadas condições em digrafos que implicam em certas imersões. Mais especificamente, são apresentadas condições de grau para um digrafo completo H ser imerso em um digrafo euleriano G , além de serem apresentados digrafos não-eulerianos com grau de entrada e saída suficientemente grande que não contém imersão do digrafo completo. Já em [Lochet 2019], é provada a existência de uma função $h(k)$ tal que todo digrafo simples com grau mínimo de saída maior que $h(k)$ contém uma imersão do torneio transitivo com k vértices.

Em um primeiro momento, apresentaremos soluções em tempo polinomial para testar a imersão de uma certas classes de digrafos em um digrafo qualquer D . Após isso, apresentaremos algumas condições em que o problema da imersão é NP-completo.

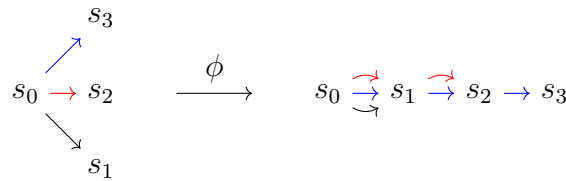


Figura 1. Figura ilustrando a imersão de um grafo em outro.

2. Imersão de S_k

Seja S_k o digrafo tal que $V(S_k) = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$ e $E(S_k) = \{s_0s_1, \dots, s_0s_k\}$. Queremos resolver o problema S_k -IMERSÃO.

Podemos mostrar que é possível encontrar tal imersão utilizando fluxo. Porém, a seguir, apresentaremos um algoritmo que resolve o problema de maneira mais eficiente. A ideia principal desse algoritmo é que, uma vez que escolhermos em qual vértice imergir s_0 , precisaremos olhar apenas para sua vizinhança para determinar se a imersão de S_k é possível. Assim, podemos realizar uma busca modificada partindo do s_0 escolhido, o que é muito mais rápido que um algoritmo de fluxo. Após repetir esse processo para cada vértice do grafo, determinamos se ele possui ou não imersão de S_k .

Antes de mostrarmos o algoritmo, devemos provar um lema que é essencial para justificar sua corretude. Esse lema reflete uma ideia mais geral de que, em muitos casos, podemos “encolher” uma imersão. A vantagem disso é que, após verificar apenas uma pequena parte do grafo, já podemos declarar se há ou não imersão, pois qualquer imersão que usasse mais vértices poderia ser “encolhida”.

Lema 1. *Suponha que há uma imersão ϕ de S_k em um digrafo D . Então existe uma imersão ϕ' de S_k em D tal que o conjunto*

$$X = \{v \in V(D) | v \in \phi'(s_0 s_i) \text{ para algum } i \in \{1, \dots, k\}\}$$

possui exatamente $k + 1$ elementos.

Demonstração. Para qualquer imersão ϕ de S_k em D , temos que $\phi(s_0) \in \phi(s_0 s_1)$ e $\phi(s_i) \in \phi(s_0 s_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, isto é, $|X| \geq k + 1$. Começaremos um processo iterativo com $\phi_0 = \phi$. Seja $\phi_j(s_0 s_i) = v_0 v_1 \dots v_n$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$ e m o menor número tal que $v_m \notin \phi_j(V(S_k))$. Vamos definir a imersão ϕ_{j+1} igual a ϕ_j , exceto que $\phi_{j+1}(s_i) = v_m$ e $\phi_{j+1}(s_0 s_i) = v_0 v_1 \dots v_m$. Continuaremos esse processo enquanto possível, ou seja, enquanto houver m satisfazendo a condição descrita. Ao final, obteremos ϕ_N . Afirmamos que $\phi' = \phi_N$ satisfaz as condições do lema. Primeiro, temos que provar que ϕ' é realmente uma imersão. Como ϕ é uma imersão, basta mostrar que nosso processo iterativo produz também produz uma imersão a cada passo. Mas isso fica claro quando consideramos que $v_m \notin \phi_j(V(S_k))$, o que garante a injetividade de ϕ_{j+1} , e que não adicionamos nenhum arco a ϕ_j para obter ϕ_{j+1} , garantindo com isso que os caminhos permanecem disjuntos. Por último, falta-nos provar que $|X| = k + 1$. Já provamos que $|X| \geq k + 1$, logo é suficiente mostrar que $|X| \leq k + 1$. Por contradição, assumamos que $|X| > k + 1$. Nesse caso, existe $v \in X$ tal que $v \notin \{\phi'(s_0), \phi'(s_1), \dots, \phi'(s_k)\}$. Portanto, existe algum $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $v \in \phi'(s_0 s_i) = v_0 v_1 \dots v_n$. No entanto, temos que $v \neq v_0 = \phi'(s_0)$ e $v \neq v_n = \phi'(s_k)$, o que implica que $v = v_m$ para algum $m \in \{2, \dots, n - 1\}$. Porém isso significa que poderíamos realizar outra iteração de processo utilizado para obter ϕ_N , o que contradiz o fato de que $\phi' = \phi_N$ é o último passo desse processo. Com isso, concluímos que $|X| \leq k + 1$, o que junto com $|X| \geq k + 1$ permite afirmar que $|X| = k + 1$. $\square$

Como consequência desse lema, podemos propor um algoritmo mais concreto para resolução do problema. Primeiro, vamos listar todas as formas de imergir S_k em um digrafo com $k + 1$ vértices, cada um com grau de entrada e saída no máximo k . Então, para cada vértice v no digrafo D no qual queremos testar a imersão, vamos verificar se há alguma das imersões de S_k que listamos, usando $\phi(s_0) = v$. Isso pode ser feito em tempo constante, já que só temos que verificar se um número constante de grafos está contido em uma parte também constante de D . Logo, o algoritmo tem tempo de execução $O(|V|)$.

3. Imersão de F_k

Após resolver o problema S_k -IMERSÃO, resolvemos explorar outra árvore um pouco mais complexa. Vamos chamá-la de F_k . Ela é dada por $V(F_k) = \{a, b_1, b_2, \dots, b_k, c_1, c_2, \dots, c_k\}$ e $E(F_k) = \{ab_1, ab_2, \dots, ab_k, b_1 c_1, b_2 c_2, \dots, b_k c_k\}$.

A nossa abordagem para criar um algoritmo que testa a imersão fraca de F_k será a mesma utilizada para resolver o caso S_k : provaremos que, uma vez definido vértice

a da imersão, só é preciso testar um número de grafos $f(k)$ que não depende de n ou m , logo nosso algoritmo tem complexidade $O(f(k)g(n, m)n)$, onde $g(n, m)$ representa a complexidade de testar se um digrafo contém um subdigrafo fixo, a qual é polinomial. O teorema que nos permitirá fazer isso é uma generalização do lema 1 e seu enunciado é o seguinte:

Teorema 1. *Seja H um digrafo tal que*

$$V(H) = \{s_0, s_1^1, s_2^1, \dots, s_{n_1}^1, s_1^2, s_2^2, \dots, s_{n_2}^2, \dots, s_1^m, s_2^m, \dots, s_{n_m}^m\},$$

$$E(H) = \{s_0 s_1^1, s_0 s_1^2, \dots, s_0 s_1^m\} \cup \{s_i^j s_{i+1}^j | 1 \leq i < n_j, 1 \leq j \leq m\}.$$

Ou seja, H é formado por m caminhos com número de vértices $n_1, n_2, \dots, n_m$ e um vértice s_0 conectado ao primeiro vértice de cada um deles. Se um digrafo D possui uma imersão ϕ de H , então ele possui uma imersão ϕ' tal que a imagem $\phi'(H)$ em G possui exatamente $|V(H)| = 1 + n_1 + n_2 + \dots + n_m$ vértices. $\square$

Corolário 1. *Se um digrafo H satisfaz as hipóteses do teorema 1, então testar a imersão de H em um digrafo D qualquer é polinomial.*

4. Problemas NP-Completo

Seja $I_{m,n}$ o digrafo com dois vértices u e v , com m arcos uv e com n arcos vu . Em [Kim 2013], afirma-se que é possível provar que testar a imersão de $I_{2,2}$ é um problema NP-completo usando uma prova similar à encontrada em [Chudnovsky et al. 2012]. De fato, adaptando a prova citada, é possível demonstrar um resultado ainda mais geral.

Teorema 2. *O problema de testar a imersão de $I_{m,n}$ é NP-completo se $m = 1$ e $n > 2$ ou se $m \geq 2$ e $n \geq 2$.* $\square$

Definição 2 (Vértices grandes e pequenos). *Um vértice v é dito pequeno se $d^-(v) \leq 2$, $d^+(v) \leq 2$ e $d(v) \leq 3$. Um vértice é dito grande se ele não é pequeno.*

O teorema acima e a noção de vértice grande nos levam à seguinte conjectura:

Conjectura 1. *Seja H um digrafo tal que $u, v \in V(H)$ e $uv, vu \in E(H)$. Supondo que os vértices u e v sejam grandes, o teste de imersão de H em um digrafo qualquer é NP-completo.*

Apesar de não termos uma prova para a conjectura, provamos um caso menos geral:

Teorema 3. *Seja H um digrafo tal que $u, v \in V(H)$ e $uv, vu \in E(H)$. Supondo que apenas os vértices u e v sejam grandes, o teste de imersão de H em um digrafo qualquer é NP-completo.* $\square$

No teorema acima, observe que usamos a suposição de que apenas u e v são vértices grandes com o único propósito de forçar $\{\phi(u), \phi(v)\} = \{x_1, x_2\}$. Baseado nessa estratégia, temos o seguinte corolário:

Corolário 2. *Seja H um digrafo tal que $u, v \in V(H)$ e $uv, vu \in E(H)$. Supondo que não há outros vértices com os mesmos graus de u e v e que estes são grandes, o teste de imersão de H em um digrafo qualquer é NP-completo.*

Referências

- Bang-Jensen, J. and Gutin, G. Z. (2008). *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2nd edition.
- Bondy, J. and Murty, U. (2008). *Graph Theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition.
- Chudnovsky, M., Fradkin, A., and Seymour, P. (2012). Tournament immersion and cutwidth. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102(1):93–101.
- Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P., and Thomas, R. (2006). The strong perfect graph theorem. *Ann. of Math. (2)*, 164(1):51–229.
- Chudnovsky, M. and Seymour, P. (2007). Excluding induced subgraphs. In *Surveys in combinatorics 2007*, volume 346 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 99–119. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- DeVos, M., McDonald, J., Mohar, B., and Scheide, D. (2012). Immersing complete digraphs. *European Journal of Combinatorics*, 33(6):1294–1302.
- Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1990). *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA.
- Granot, D., Granot, F., and Zhu, W. R. (2000). Naturally submodular digraphs and forbidden digraph configurations. *Discrete Appl. Math.*, 100(1-2):67–84.
- Kim, I. (2013). *On containment relations in directed graphs*. PhD thesis, Princeton University.
- Kim, I. and Seymour, P. (2013). *On Containment Relations on Digraphs*. PhD thesis, Princeton, NJ : Princeton University.
- Lochet, W. (2019). Immersion of transitive tournaments in digraphs with large minimum outdegree. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 134:350–353.
- Robertson, N. and Seymour, P. D. (1995). Graph minors. xiii. the disjoint paths problem. *Journal of combinatorial theory, Series B*, 63(1):65–110.