

# Atribuição de papéis sob restrições núcleo–periferia em produto corona de grafos

Jarlilson Guajajara<sup>1</sup>, Diane Castonguay<sup>1</sup>, Julliano Rosa Nascimento<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)  
Caixa Postal 131 – 74001-970 – Goiânia – GO – Brasil

jarlilsonguajajara@discente.ufg.br, {diane, jullianonascimento}@ufg.br

**Abstract.** An  $r$ -role assignment is a surjective mapping from  $V(G)$  to a set of  $r$  roles such that any two vertices with the same role have the same set of roles in their neighborhoods. In this paper, we study how the core–periphery structure of the corona product constrains role assignments. We also characterize when the role graph  $R_{3,2}$ , which does not admit such a structure, can occur as the role graph of a corona product.

**Resumo.** Uma  $r$ -atribuição de papéis é uma função sobrejetora de  $V(G)$  em um conjunto de  $r$  papéis tal que quaisquer dois vértices com o mesmo papel têm o mesmo conjunto de papéis em suas vizinhanças. Neste artigo, estudamos como a estrutura núcleo-periferia do produto corona restringe atribuições de papéis. Também caracterizamos quando o grafo de papéis  $R_{3,2}$ , que não assume tal estrutura, pode ocorrer como grafo de papéis de um produto corona.

## 1. Introdução

A atribuição de papéis, introduzida por [Everett e Borgatti 1991] sob o nome de *role colouring*, recentemente tem sido explorada no aprendizado de representações, motivando o desenvolvimento de *embeddings* baseados em papéis estruturais. Esses métodos capturam a similaridade estrutural entre vértices e podem ser aplicados em tarefas de aprendizado de máquina, como classificação de nós e previsão de *links* [Rossi et al. 2020].

Seja  $G$  um grafo simples e  $R$  um grafo possivelmente com laço. Um *homomorfismo* de grafos de um grafo  $G$  para um grafo  $R$  é uma função  $p : V(G) \rightarrow V(R)$  tal que  $p(u)p(v) \in E(R)$  sempre que  $uv \in E(G)$ . Se um homomorfismo  $p$  é sobrejetor e a restrição de  $p$  à vizinhança de cada  $u \in V(G)$  é sobrejetora, isto é, a função  $p_u : N_G(u) \rightarrow N_R(p(u))$  é sobrejetora, então  $p$  é dito um *homomorfismo localmente sobrejetor* de  $G$  para  $R$  ou uma  *$R$ -atribuição de papéis* de  $G$ . Denotamos  $V(R) = \{1, 2, \dots, r\}$ . Dizemos que  $p$  é uma  *$r$ -atribuição de papéis* de  $G$  quando  $r = |V(R)|$  e  $R$  é chamado *grafo de papéis*.

É conhecido que o problema de decidir se um grafo  $G$  possui uma  $r$ -atribuição de papéis é NP-completo para  $r \geq 2$  fixo [Roberts e Sheng 2001, Fiala e Paulusma 2005], permanecendo NP-completo mesmo para grafos planares [Purcell e Rombach 2015]. Além disso, há resultados sobre atribuição de papéis para grafos *split* e bipartidos [Dourado 2016, Pandey e Sahlot 2022] e em alguns produtos de grafos, como os produtos Cartesiano e forte [Castonguay et al. 2025, Medeiros e Nascimento 2025].

Sejam  $G$  e  $H$  grafos com  $|V(G)| = n$  e  $|V(H)| = m$ . O *produto corona* de  $G$  e  $H$  é o grafo  $G \circ H$  obtido a partir de uma cópia de  $G$  e  $n$  cópias de  $H$ , conectando-se cada

vértice  $x \in V(G)$  a todos os vértices da cópia de  $H$  associada a  $x$  [Frucht e Harary 1970]. Denotamos por  $G_0$  e  $H_0$  os conjuntos de vértices isolados dos grafos fatores  $G$  e  $H$ , respectivamente.

A operação induz uma decomposição de  $V(G \circ H)$  em uma parte central e partes periféricas. Chamamos a cópia distinguida de  $G$  de *núcleo* e, para cada  $x \in V(G)$ , chamamos  $H_x = \{x\} \times V(H)$  de *fibra periférica* associada a  $x$ . Assim,  $V(G \circ H) = V(G) \dot{\cup} \bigcup_{x \in V(G)} H_x$ . Essa decomposição é canônica: cada vértice de  $H_x$  é adjacente ao vértice central  $x$ , não existem arestas entre  $H_x$  e  $H_y$  quando  $x \neq y$ , e as arestas internas de cada  $H_x$  reproduzem exatamente as arestas de  $H$ .

Usamos o termo *estrutura núcleo–periferia* em sentido estrutural, para designar essa decomposição hierárquica induzida pela operação corona. A terminologia é inspirada na literatura de redes núcleo–periferia, em que se distingue uma região central e uma região periférica [Borgatti e Everett 1999]; no produto corona, porém, essa distinção é determinada pela própria operação, e não por critérios de densidade ou centralidade.

Neste trabalho, investigamos como a estrutura núcleo–periferia restringe a atribuição de papéis em  $G \circ H$  e permite sua decomposição entre núcleo e fibras periféricas sob condições de compatibilidade. Além disso, analisamos um caso em que o grafo de papéis não possui estrutura de produto corona, mas ainda pode ser realizado por produtos corona sob condições rígidas sobre os fatores. Esses resultados refinam e estendem as análises de [Guajajara e Nascimento 2024].

## 2. Resultados

Ao longo desta seção, denotamos por  $H_x = \{x\} \times V(H)$  a cópia de  $H$  associada a  $x \in V(G)$  em  $G \circ H$ ; seus vértices são pares ordenados  $(x, a)$ , com  $a \in V(H)$ .

**Teorema 1.** *Sejam  $G, H, R, S$  grafos e seja  $f : V(G \circ H) \rightarrow V(R \circ S)$  um homomorfismo localmente sobrejetor tal que:*

- (i)  $f(V(G)) \subseteq V(R)$ , e
- (ii) *para todo  $x \in V(G)$ ,  $f(H_x) \subseteq \{f(x)\} \times V(S)$ .*

*Então existe  $p : G \rightarrow R$  localmente sobrejetor e uma família  $(q_x)_{x \in V(G)}$  de homomorfismos localmente sobrejetores  $q_x : H \rightarrow S$  tais que  $f(x, a) = (p(x), q_x(a))$  para todo  $x \in V(G)$  e  $a \in V(H)$ .*

**Demonstração.** Pela hipótese (i), para cada  $x \in V(G)$  temos  $f(x) \in V(R)$ ; definimos  $p : V(G) \rightarrow V(R)$  por  $p(x) = f(x)$ . Pela hipótese (ii), para cada  $x \in V(G)$  e  $a \in V(H)$  existe, e é único,  $s_{x,a} \in V(S)$  tal que  $f(x, a) = (f(x), s_{x,a}) = (p(x), s_{x,a})$ , e definimos  $q_x : V(H) \rightarrow V(S)$  por  $q_x(a) = s_{x,a}$ . Assim, para todo  $x \in V(G)$  e  $a \in V(H)$  vale  $f(x, a) = (p(x), q_x(a))$ .

Fixe  $x \in V(G)$ . Pela definição do produto corona,  $N_{G \circ H}(x) = N_G(x) \cup H_x$ . Usando (i)–(ii) e as definições acima, obtemos  $f(N_{G \circ H}(x)) = f(N_G(x)) \cup f(H_x) = p(N_G(x)) \cup (\{p(x)\} \times q_x(V(H)))$ . Como  $f$  é localmente sobrejetor em  $x$  e  $f(x) = p(x) \in V(R)$ , temos  $f(N_{G \circ H}(x)) = N_{R \circ S}(p(x)) = N_R(p(x)) \cup (\{p(x)\} \times V(S))$ . Como  $V(R) \cap (V(R) \times V(S)) = \emptyset$ , a igualdade implica  $p(N_G(x)) = N_R(p(x))$  e  $q_x(V(H)) = V(S)$ . Assim,  $p$  é localmente sobrejetor. Além disso,  $p$  é homomorfismo: se  $xy \in E(G)$ , então  $y \in N_G(x)$  e, logo,  $p(y) \in p(N_G(x)) = N_R(p(x))$ , isto é,  $p(x)p(y) \in E(R)$ .

Fixe  $x \in V(G)$  e  $a \in V(H)$ . Pela definição do produto corona,  $N_{G \circ H}(x, a) = \{x\} \cup (\{x\} \times N_H(a))$ . Aplicando  $f$  e usando  $f(x) = p(x)$  e  $f(x, b) = (p(x), q_x(b))$ , obtemos  $f(N_{G \circ H}(x, a)) = \{p(x)\} \cup (\{p(x)\} \times q_x(N_H(a)))$ . Como  $f$  é localmente sobrejetor em  $(x, a)$  e  $f(x, a) = (p(x), q_x(a))$ , segue que  $f(N_{G \circ H}(x, a)) = N_{R \circ S}(p(x), q_x(a)) = \{p(x)\} \cup (\{p(x)\} \times N_S(q_x(a)))$ . Como  $\{p(x)\} \cap (\{p(x)\} \times V(S)) = \emptyset$ , segue que  $q_x(N_H(a)) = N_S(q_x(a))$ . Logo,  $q_x$  é localmente sobrejetor. E  $q_x$  é homomorfismo: se  $ab \in E(H)$ , então  $b \in N_H(a)$  e, portanto,  $q_x(b) \in q_x(N_H(a)) = N_S(q_x(a))$ , isto é,  $q_x(a)q_x(b) \in E(S)$ .

Resta verificar que  $p$  é sobrejetora. Como  $f$  é sobrejetora, para todo  $r \in V(R)$  existe  $z \in V(G \circ H)$  tal que  $f(z) = r$ . Se  $z \in H_x$  para algum  $x \in V(G)$ , então, pela hipótese (ii),  $f(z) \in \{f(x)\} \times V(S) \subseteq V(R) \times V(S)$ , o que contradiz  $r \in V(R)$  e  $V(R) \cap (V(R) \times V(S)) = \emptyset$ . Logo  $z \in V(G)$ . Portanto,  $r = p(z)$  e, como  $r$  foi escolhido arbitrariamente,  $p(V(G)) = V(R)$ .

Concluimos que  $p : G \rightarrow R$  é homomorfismo localmente sobrejetor e, para cada  $x \in V(G)$ ,  $q_x : H \rightarrow S$  é homomorfismo localmente sobrejetor, com  $f(x, a) = (p(x), q_x(a))$  para todo  $x \in V(G)$  e  $a \in V(H)$ .  $\square$

**Corolário 1.** *Seja  $f : V(G \circ H) \rightarrow V(R \circ S)$  um homomorfismo localmente sobrejetor. Suponha que exista  $q : V(H) \rightarrow V(S)$  tal que  $f(x, a) = (f(x), q(a))$  para todo  $x \in V(G)$  e todo  $a \in V(H)$ . Então  $p = f|_{V(G)} : G \rightarrow R$  e  $q : H \rightarrow S$  são homomorfismos localmente sobrejetores, e  $f(x, a) = (p(x), q(a))$  para todo  $x \in V(G)$  e todo  $a \in V(H)$ .*

*Demonstração.* Para todo  $x \in V(G)$  e  $a \in V(H)$ , temos  $f(x, a) = (f(x), q(a)) \in V(R \circ S)$ . Logo,  $f(x) \in V(R)$  e  $q(a) \in V(S)$ . Assim,  $f(V(G)) \subseteq V(R)$  e, para cada  $x \in V(G)$ ,  $f(H_x) = \{f(x)\} \times q(V(H)) \subseteq \{f(x)\} \times V(S)$ . Portanto,  $f$  satisfaz as hipóteses (i) e (ii) do Teorema 1. Pelo Teorema 1, existe  $p : G \rightarrow R$  localmente sobrejetor e, para cada  $x \in V(G)$ , existe  $q_x : H \rightarrow S$  localmente sobrejetor tal que  $f(x, a) = (p(x), q_x(a))$  para todo  $a \in V(H)$ .

Pela definição de  $p$  na prova do Teorema 1, temos  $p(x) = f(x)$  para todo  $x \in V(G)$ , isto é,  $p = f|_{V(G)}$ . Além disso, para todo  $x \in V(G)$  e  $a \in V(H)$ ,  $(f(x), q(a)) = f(x, a) = (p(x), q_x(a)) = (f(x), q_x(a))$ . Pela igualdade de pares ordenados,  $q_x(a) = q(a)$  para todo  $a \in V(H)$ . Logo,  $q = q_x$  para todo  $x \in V(G)$ , e, como cada  $q_x$  é um homomorfismo localmente sobrejetor, também  $q : H \rightarrow S$  é um homomorfismo localmente sobrejetor.

Por fim, como  $p = f|_{V(G)}$ , segue que  $f(x, a) = (p(x), q(a))$  para todo  $x \in V(G)$  e todo  $a \in V(H)$ .  $\square$

Esse resultado sugere distinguir grafos de papéis compatíveis com uma estrutura de produto corona daqueles que não o são. Neste trabalho, consideramos  $R_{3,1}$  e  $R_{3,2}$  com conjunto de vértices  $\{1, 2, 3\}$ , onde  $N_{R_{3,1}}(1) = \{2\}$ ,  $N_{R_{3,1}}(2) = \{1, 3\}$ ,  $N_{R_{3,1}}(3) = \{2\}$ , e  $N_{R_{3,2}}(1) = \{2\}$ ,  $N_{R_{3,2}}(2) = \{1, 3\}$ ,  $N_{R_{3,2}}(3) = \{2, 3\}$ . Assim,  $R_{3,1} \simeq K_1 \circ \overline{K_2}$  e, portanto, exhibe explicitamente uma estrutura núcleo-periferia. Em contraste,  $R_{3,2}$  não é isomorfo a um produto corona; ainda assim, ele pode ocorrer como grafo de papéis de certos produtos corona, e tal realização impõe restrições fortes aos grafos fatores. O próximo teorema caracteriza exatamente quando isso acontece.

**Teorema 2.** *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos. O produto corona  $G \circ H$  tem uma  $R_{3,2}$ -atribuição de papéis se e somente se  $G_0 = V(G)$ ,  $H_0 \neq \emptyset$  e  $H_0 \neq V(H)$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Escreva  $R = R_{3,2}$ . Seja  $p$  uma  $R$ -atribuição de papéis de  $G \circ H$ . Mostramos inicialmente que  $p(x) = 2$  para todo  $x \in V(G)$ .

Fixe  $x \in V(G)$ . Suponha que  $p(x) = 1$ . Pela definição do produto corona,  $H_x \subseteq N_{G \circ H}(x)$ . Como  $p(N_{G \circ H}(x)) = N_R(1) = \{2\}$ , temos  $p(H_x) \subseteq \{2\}$ . Tome  $(x, a) \in H_x$ . Então  $p(x, a) = 2$ . Além disso,  $N_{G \circ H}(x, a) = \{x\} \cup (\{x\} \times N_H(a))$ . Como  $p(x) = 1$  e  $p(H_x) \subseteq \{2\}$ , segue que  $p(N_{G \circ H}(x, a)) \subseteq \{1, 2\}$ . Por outro lado,  $p(x, a) = 2$ , logo  $p(N_{G \circ H}(x, a)) = N_R(2) = \{1, 3\}$ , contradição, pois  $3 \notin \{1, 2\}$ . Portanto,  $p(x) \neq 1$ .

Suponha agora que  $p(x) = 3$ . Como  $H_x \subseteq N_{G \circ H}(x)$  e  $p(N_{G \circ H}(x)) = N_R(3) = \{2, 3\}$ , temos  $p(H_x) \subseteq \{2, 3\}$ . Se existisse  $(x, a) \in H_x$  tal que  $p(x, a) = 2$ , então, pela definição do produto corona,  $p(N_{G \circ H}(x, a)) = p(\{x\} \cup (\{x\} \times N_H(a))) \subseteq \{2, 3\}$ . Como  $p(x, a) = 2$ , teríamos  $p(N_{G \circ H}(x, a)) = N_R(2) = \{1, 3\}$ , contradição, pois  $1 \notin \{2, 3\}$ . Assim,  $p(H_x) \subseteq \{3\}$ . Tomando  $(x, a) \in H_x$ , obtemos  $p(x, a) = 3$  e  $p(N_{G \circ H}(x, a)) = p(\{x\} \cup (\{x\} \times N_H(a))) \subseteq \{3\}$ . Contudo,  $p(N_{G \circ H}(x, a)) = N_R(3) = \{2, 3\}$ , contradição, pois  $2 \notin \{3\}$ . Portanto,  $p(x) \neq 3$ .

Concluimos que  $p(x) = 2$  para todo  $x \in V(G)$ . Agora, se existisse  $xy \in E(G)$ , então  $y \in N_{G \circ H}(x)$  e, portanto,  $2 = p(y) \in p(N_{G \circ H}(x)) = N_R(p(x)) = N_R(2) = \{1, 3\}$ , contradição. Logo  $E(G) = \emptyset$ , isto é,  $G_0 = V(G)$ .

Mostremos que  $H_0 \neq \emptyset$ . Suponha, por contradição, que  $H_0 = \emptyset$ . Como  $p$  é sobrejetora, existe  $w \in V(G \circ H)$  tal que  $p(w) = 1$ . Como  $p(x) = 2$  para todo  $x \in V(G)$ , temos  $w = (x, a) \in H_x$  para algum  $x \in V(G)$  e algum  $a \in V(H)$ . Como  $H_0 = \emptyset$ , existe  $b \in N_H(a)$ . Pela definição do produto corona,  $(x, b) \in N_{G \circ H}(x, a)$ . Como  $p(N_{G \circ H}(x, a)) = N_R(1) = \{2\}$ , segue que  $p(x, b) = 2$ . Entretanto,  $x \in N_{G \circ H}(x, b)$  e  $p(x) = 2$ . Logo  $2 = p(x) \in p(N_{G \circ H}(x, b)) = N_R(p(x, b)) = N_R(2) = \{1, 3\}$ , contradição. Portanto,  $H_0 \neq \emptyset$ .

Mostremos, por fim, que  $H_0 \neq V(H)$ . Suponha, por contradição, que  $H_0 = V(H)$ . Como  $p$  é sobrejetora, existe  $z \in V(G \circ H)$  tal que  $p(z) = 3$ . Como  $p(x) = 2$  para todo  $x \in V(G)$ , temos  $z = (x, a) \in H_x$  para algum  $x \in V(G)$  e algum  $a \in V(H)$ . Como  $a \in H_0$ , pela definição do produto corona,  $N_{G \circ H}(x, a) = \{x\}$ . Assim,  $p(N_{G \circ H}(x, a)) = \{p(x)\} = \{2\}$ . Mas  $p(x, a) = 3$ , logo  $p(N_{G \circ H}(x, a)) = N_R(3) = \{2, 3\}$ , contradição. Portanto,  $H_0 \neq V(H)$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $G_0 = V(G)$ ,  $H_0 \neq \emptyset$  e  $H_0 \neq V(H)$ . Defina  $p : V(G \circ H) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  por  $p(x) = 2$  para todo  $x \in V(G)$ , e, para todo  $x \in V(G)$  e todo  $a \in V(H)$ , por

$$p(x, a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in H_0, \\ 3, & \text{se } a \notin H_0. \end{cases}$$

Como  $H_0 \neq \emptyset$  e  $H_0 \neq V(H)$ , existem  $a_1 \in H_0$  e  $a_3 \in V(H) \setminus H_0$ . Logo, para qualquer  $x \in V(G)$ ,  $p(x) = 2$ ,  $p(x, a_1) = 1$ ,  $p(x, a_3) = 3$ , e, portanto,  $p$  é sobrejetora.

Verifiquemos a sobrejetividade local. Seja  $x \in V(G)$ . Como  $G_0 = V(G)$ , temos  $N_{G \circ H}(x) = H_x$ . Pela definição de  $p$  e pelas escolhas de  $a_1$  e  $a_3$ ,  $p(N_{G \circ H}(x)) = p(H_x) = \{1, 3\} = N_R(2) = N_R(p(x))$ . Seja agora  $(x, a) \in H_x$ . Se  $a \in H_0$ , então  $N_{G \circ H}(x, a) =$

$\{x\}$ . Logo  $p(N_{G \circ H}(x, a)) = \{p(x)\} = \{2\} = N_R(1) = N_R(p(x, a))$ . Se  $a \notin H_0$ , então  $N_H(a) \neq \emptyset$ . Além disso, se  $b \in N_H(a)$ , então  $b \notin H_0$ . Pela definição do produto corona,  $N_{G \circ H}(x, a) = \{x\} \cup (\{x\} \times N_H(a))$ . Pela definição de  $p$ ,  $p(\{x\}) = \{2\}$  e  $p(\{x\} \times N_H(a)) = \{3\}$ . Portanto  $p(N_{G \circ H}(x, a)) = \{2, 3\} = N_R(3) = N_R(p(x, a))$ .

Assim, para todo  $z \in V(G \circ H)$ ,  $p(N_{G \circ H}(z)) = N_R(p(z))$ . Como  $p$  é sobrejetora,  $p$  é uma  $R_{3,2}$ -atribuição de papéis de  $G \circ H$ .  $\square$

Como perspectivas futuras, pretendemos investigar as condições necessárias e suficientes para atribuição de papéis quando o mapeamento núcleo-periferia não é estritamente preservado.

## Referências

- Borgatti, S. e Everett, M. (1999). Models of core/periphery structures. *Social Networks*, 21:375–395.
- Castonguay, D., Dias, E. S., Mesquita, F. N., e Nascimento, J. R. (2025). Computing a 3-role assignment is polynomial-time solvable on complementary prisms. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 0(0):1–24.
- Dourado, M. C. (2016). Computing role assignments of split graphs. *Theoretical Computer Science*, 635:74–84.
- Everett, M. G. e Borgatti, S. (1991). Role colouring a graph. *Mathematical Social Sciences*, 21(2):183–188.
- Fiala, J. e Paulusma, D. (2005). A complete complexity classification of the role assignment problem. *Theoretical Computer Science*, 349(1):67–81.
- Frucht, R. e Harary, F. (1970). On the corona of two graphs. *Aequationes mathematicae*, 4(3):322–325.
- Guajajara, J. e Nascimento, J. (2024). Caracterização de 2-atribuição de papéis em produto corona de dois grafos. In *Anais do IX Encontro de Teoria da Computação*, pages 139–143, Porto Alegre, RS, Brasil. SBC.
- Medeiros, G. M. e Nascimento, J. R. (2025). Sobre a 4-atribuição de papéis para produto forte de grafos. In *Book of Abstracts of the LVII Brazilian Symposium on Operations Research*, Gramado. Galoá. Anais eletrônicos.
- Pandey, S. e Sahlot, V. (2022). Role coloring bipartite graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 322:276–285.
- Purcell, C. e Rombach, P. (2015). On the complexity of role colouring planar graphs, trees and cographs. *Journal of Discrete Algorithms*, 35:1–8.
- Roberts, F. S. e Sheng, L. (2001). How hard is it to determine if a graph has a 2-role assignment? *Networks*, 37(2):67–73.
- Rossi, R. A., Jin, D., Kim, S., Ahmed, N. K., Koutra, D., e Lee, J. B. (2020). On proximity and structural role-based embeddings in networks: Misconceptions, techniques, and applications. *ACM Trans. Knowl. Discov. Data*, 14(5).