

Caracterizando facetas do politopo do Subgrafo Gerador Balanceado Máximo via comutação*

Natália Coelho¹, Manoel Campêlo²

¹ParGO, Departamento de Computação - Universidade Federal do Ceará (UFC)

²ParGO, Dep. Estatística e Mat. Aplicada - Universidade Federal do Ceará (UFC)

natalialidia@alu.ufc.br, mcampelo@ufc.br

Abstract. *We analyze the polytope associated with a formulation for the Maximum Balanced Spanning Subgraph problem in signed graphs. We show the correspondence between facets induced by a signed subgraph and its switchings (i.e., graphs obtained by inverting signs across any edge cut). Using this property, we derive valid facet-defining inequalities for this polytope.*

Resumo. *Analizamos o politopo associado a uma formulação para o problema do Subgrafo Gerador Balanceado Máximo em grafos de sinais. Demonstramos a correspondência entre facetas induzidas por um subgrafo de sinais e suas comutações (i.e., grafos obtidos pela inversão dos sinais de qualquer corte de arestas do grafo). Utilizamos dessa propriedade para demonstrar desigualdades válidas indutoras de faceta nesse politopo.*

1. Introdução

Um grafo de sinais, denotado por $G = (V, E, \sigma)$, é um grafo simples, com V e E sendo os conjuntos de vértices e arestas, respectivamente, e uma função $\sigma : E \rightarrow \{+, -\}$ que associa um sinal positivo ou negativo a cada aresta [Harary 1953]. Considere $E^+ = \{e \in E(G) : \sigma(e) = +\}$ e $E^- = \{e \in E(G) : \sigma(e) = -\}$ os conjuntos de arestas com sinal positivo e negativo, respectivamente, do grafo G . Para todo $S \subseteq V(G)$, sejam $E[S] = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$ e $\delta(S) = \{uv \in E(G) : u \in S, v \in V \setminus S\}$. Um grafo de sinais é dito *balanceado* se, e somente se, $V(G)$ pode ser particionado em duas partições S e $\bar{S}$ tais que $E[S] \cup E[\bar{S}] = E^+(G)$ (ou equivalentemente, $\delta(S) = E^-(G)$).

Um *ciclo negativo* é um ciclo cujo número de arestas negativas é ímpar. O conceito de balanceamento também pode ser caracterizado pela inexistência de ciclos negativos.

Teorema 1 [Cartwright and Harary 1956] *Um grafo de sinais é balanceado se, e somente se, não possui ciclos negativos.*

Para medir o quão próximo de um estado balanceado um grafo de sinais está, [Harary 1959] define diversas métricas, dentre elas o “*line-deletion index*”, que indica o menor número de arestas a serem removidas para tornar um grafo de sinais balanceado. O problema tratado neste trabalho se desenvolve a partir desta métrica. Dado um grafo de sinais, o problema *Maximum Balanced Spanning Subgraph* (MBSS) procura um subconjunto de arestas, de tamanho máximo, que gera um subgrafo balanceado.

*Parcialmente financiado pela Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap) e CNPq (Proc. 404479/2023-5, 442977/2023-9, 140755/2026-8).

Formulações de programação inteira para esse problema foram apresentadas em [Aref et al. 2020]. Neste trabalho, apresentamos propriedades do politopo de uma dessas formulações. Em especial, exploramos a relação entre as facetas dos politopos associados a um grafo de sinais e suas *comutações*. Uma *comutação* de um grafo de sinais G é o grafo G^S resultante da troca dos sinais de cada aresta em $\delta(S)$, para algum $S \subseteq V(G)$. Sabe-se que MBSS definido em G equivale ao MBSS definido em G^S [Zaslavsky 1982].

Mostramos que toda faceta do politopo, induzida por uma estrutura do grafo de sinais, associa-se a uma família de facetas do politopo, cada uma correspondendo a uma comutação desta estrutura. Utilizando destas propriedades, mostramos desigualdades válidas que são indutoras de faceta para este politopo.

2. Formulação de programação inteira para o MBSS

O politopo estudado neste trabalho é associado à formulação XOR, apresentada por [Aref et al. 2020]. Note que uma solução do problema pode ser representada por uma partição do conjunto de vértices em duas partes, que chamaremos zero e um, e a consequente identificação das arestas a serem removidas do subgrafo gerador. Portanto, dado um grafo de sinais $G = (V, E^+ \cup E^-)$, consideramos as variáveis binárias:

$$x_v = \begin{cases} 1, & \text{se } v \text{ está na partição um} \\ 0, & \text{se } v \text{ está na partição zero} \end{cases}, \forall v \in V$$

$$y_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se } uv \text{ é removida do subgrafo gerador} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \forall uv \in E$$

A formulação XOR para o MBSS é definida como:

$$\min \sum_{uv \in E} y_{uv} \tag{1}$$

$$\text{s.a. : } x_u - x_v \leq y_{uv} \quad \forall uv \in E^+ \tag{2}$$

$$x_v - x_u \leq y_{uv} \quad \forall uv \in E^+ \tag{3}$$

$$1 - x_u - x_v \leq y_{uv} \quad \forall uv \in E^- \tag{4}$$

$$x_u + x_v - 1 \leq y_{uv} \quad \forall uv \in E^- \tag{5}$$

$$x_u \in \{0, 1\} \quad \forall u \in V \tag{6}$$

$$y_{uv} \in \{0, 1\} \quad \forall uv \in E \tag{7}$$

As restrições (2)-(3) garantem que não haja arestas positivas no corte, enquanto (4)-(5) asseguram que não haja aresta negativa dentro de cada partição.

O Teorema 1 também induz o seguinte conjunto de desigualdades válidas:

$$\sum_{uv \in E(C)} y_{uv} \geq 1 \quad \forall C \in C^- \tag{8}$$

em que C^- é o conjunto de todos os ciclos negativos de G . As restrições (8) garantem que pelo menos uma aresta de cada ciclo negativo deve ser removida. Tais restrições são em número possivelmente exponencial, podendo demandar um procedimento de separação.

Seja $P(G)$ a envoltória convexa dos pontos inteiros que satisfazem (2)-(7). A fim de determinar as facetas desse politopo, primeiro estabelecemos a sua dimensão.

Prop. 1 *O politopo $\mathbf{P}(G)$ tem dimensão cheia.*

Derivamos também alguns resultados básicos da estrutura facial de $\mathbf{P}(G)$.

Prop. 2 *Para todo $u \in V(G)$, $x_u \geq 0$ e $x_u \leq 1$ induzem facetas de $\mathbf{P}(G)$.*

Prop. 3 *Para todo $uv \in E(G)$, $y_{uv} \leq 1$ induz faceta de $\mathbf{P}(G)$.*

Esse politopo possui uma propriedade útil para caracterização de suas facetas: uma desigualdade que induz faceta do politopo associado a um grafo de sinais H é também indutora de faceta para o politopo correspondente a qualquer outro grafo que contenha H como subgrafo. Isto é apresentado formalmente no lema a seguir.

Lema 1 *Seja H um subgrafo de G . A desigualdade $\sum_{v \in V(H)} \lambda_v x_v + \sum_{e \in E(H)} \rho_e y_e \geq \lambda_0$ define faceta de $\mathbf{P}(H)$ se, e somente se, ela também define faceta de $\mathbf{P}(G)$.*

Esse resultado, cuja prova é omitida por limitação de espaço, fornece uma ferramenta útil para obter facetas nas próximas seções.

3. Obtendo facetas via comutação

Nesta seção mostramos a relação existente entre facetas dos politopos relacionados a um grafo de sinais e suas comutações. Para isso, primeiramente, mostramos que existe uma correspondência entre as soluções do problema para um grafo de sinais e para uma comutação sua qualquer. Mais ainda, tal correspondência preserva a afim-independência. Sejam $\mathbf{e}$ e $\mathbf{0}$ os vetores formados, respectivamente, apenas por entradas 1 e 0.

Lema 2 *Sejam $S \subseteq V$ e $\bar{S} = V \setminus S$. $(x_S, x_{\bar{S}}, y)$ é um ponto inteiro em $\mathbf{P}(G)$ se, e somente se, $(\mathbf{e} - x_S, x_{\bar{S}}, y)$ é um ponto inteiro em $\mathbf{P}(G^S)$.*

Prova. Seja $x \in \mathbb{B}^n$. Note que as restrições (2)-(3) e (4)-(5) são equivalentes a:

$$y_{uv} \geq |x_u - x_v| \quad \forall uv \in E^+ \quad (9)$$

$$y_{uv} \geq |x_u + x_v - 1| \quad \forall uv \in E^- \quad (10)$$

Defina $x'_S = \mathbf{e} - x_S$ e $x'_{\bar{S}} = x_{\bar{S}}$. Queremos mostrar que $(x_S, x_{\bar{S}}, y)$ satisfaz (9)-(10) se, e somente se, (9)-(10) também é satisfeito para $(x'_S, x'_{\bar{S}}, y)$. Para todo $uv \in E[\bar{S}] \cup E[S]$, temos que $x'_u = x_u$ e $x'_v = x_v$, ou $x'_u = 1 - x_u$ e $x'_v = 1 - x_v$, implicando em qualquer caso $|x_u - x_v| = |x'_u - x'_v|$ e $|x_u + x_v - 1| = |x'_u + x'_v - 1|$. Para todo $uv \in \delta(S)$, temos, sem perda de generalidade, que $x'_u = 1 - x_u$ e $x'_v = x_v$, levando a $|x_u - x_v| = |x'_u + x'_v - 1|$. Então, o resultado segue de $E^+(G^S) = E^+[S] \cup E^+[\bar{S}] \cup \delta^-(S)$ e $E^-(G^S) = E^-[S] \cup E^-[\bar{S}] \cup \delta^+(S)$. $\square$

Lema 3 *Sejam $S \subseteq V$, $\bar{S} = V \setminus S$ e $L \subseteq \{1, \dots, n + m + 1\}$. $\{(x_S^\ell, x_{\bar{S}}^\ell, y^\ell) : \ell \in L\}$ é um conjunto de pontos afins independentes em $\mathbf{P}(G)$ se, e somente se, $\{(\mathbf{e} - x_S^\ell, x_{\bar{S}}^\ell, y^\ell) : \ell \in L\}$ é um conjunto de pontos afins independentes em $\mathbf{P}(G^S)$.*

Prova. Seja $\{(x_S^\ell, x_{\bar{S}}^\ell, y^\ell) : \ell \in L\}$ um conjunto de pontos afim independente de $\mathbf{P}(G)$. Pelo Lema 2, é suficiente mostrar que $\{(\mathbf{e} - x_S^\ell, x_{\bar{S}}^\ell, y^\ell) : \ell \in L\}$ é afim independente, já que ele está contido em $\mathbf{P}(G^S)$. Tome $\alpha_\ell, \ell \in L$, tais que: $\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell (\mathbf{e} - x_S^\ell, x_{\bar{S}}^\ell, y^\ell) = \mathbf{0}$ e $\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell = 0$. Então, $\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell (x_S^\ell, x_{\bar{S}}^\ell, y^\ell) = (\mathbf{e}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \sum_{\ell \in L} \alpha_\ell = \mathbf{0}$. Como $\{(x_S^\ell, x_{\bar{S}}^\ell, y^\ell) : \ell \in L\}$ é afim independente, segue que $\alpha_\ell = 0$ para todo $\ell \in L$. Logo, $\{(\mathbf{e} - x_S^\ell, x_{\bar{S}}^\ell, y^\ell) : \ell \in L\}$ é afim independente. $\square$

Como implicação direta destes lemas temos a seguinte proposição:

Prop. 4 *Sejam $S \subseteq V$ e $\bar{S} = V \setminus S$. $\pi_S x_S + \pi_{\bar{S}} x_{\bar{S}} + \lambda y \leq \pi_0$ é válida para $\mathbf{P}(G)$ se, e somente se, $\pi_S(\mathbf{e} - x_S) + \pi_{\bar{S}} x_{\bar{S}} + \lambda y \leq \pi_0$ é válida para $\mathbf{P}(G^S)$. Mais ainda, a primeira desigualdade define faceta de $\mathbf{P}(G)$ se, e somente se, a segunda define faceta de $\mathbf{P}(G^S)$.*

E pelo Lema 1, esta proposição pode ser generalizada considerando apenas a comutação de um subgrafo de G , como mostra o teorema:

Teorema 2 *Sejam H um grafo de sinais, $S \subseteq V(H)$ e $\bar{S} = V(H) \setminus S$. Suponha H subgrafo de G e H^S subgrafo de um grafo G' . Então $\pi_S x_S + \pi_{\bar{S}} x_{\bar{S}} + \lambda_{E(H)} y_{E(H)} \leq \pi_0$ define faceta de $\mathbf{P}(G)$ se, e somente se, $\pi_S(\mathbf{e} - x_S) + \pi_{\bar{S}} x_{\bar{S}} + \lambda_{E(H)} y_{E(H)} \leq \pi_0$ define faceta de $\mathbf{P}(G')$.*

Uma aplicação direta do Teorema 2 resulta na constatação de que todas as restrições da formulação XOR são facetas de $\mathbf{P}(G)$.

Prop. 5 *As restrições (2), (3), (4) e (5) são facetas de $\mathbf{P}(G)$.*

Prova. Seja H uma aresta positiva uv . Os pontos (x_u, x_v, y_{uv}) iguais a $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ estão em $\mathbf{P}(H)$, são afins independentes e satisfazem $x_u - x_v \leq y_{uv}$ na igualdade, mostrando que tal desigualdade induz faceta de $\mathbf{P}(H)$. Aplicando o Teorema 2 para cada $S \subseteq \{u, v\}$, sendo H^S uma aresta negativa quando $S = \{u\}$ ou $S = \{v\}$, concluímos que (2), (3), (4) e (5) são facetas de $\mathbf{P}(G)$. $\square$

4. Facetas de ciclo negativo

Os resultados da seção anterior nos auxiliam a caracterizar facetas induzidas por certas estruturas, e suas comutações, contidas em um grafo de sinais. Em particular, podemos usá-los para mostrar que as desigualdades de ciclo negativo (8) induzem faceta de $\mathbf{P}(G)$. Para isso, primeiro formalizamos o resultado para ciclos com apenas uma aresta negativa.

Lema 4 *Se C é um ciclo com uma única aresta negativa, então a desigualdade (8) define faceta de $\mathbf{P}(C)$.*

Prova. Seja $\langle u_1, \dots, u_p, u_{p+1} = u_1 \rangle$ a sequência circular de vértices de C , com $E^-(C) = \{u_p u_1\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, sejam $x^i \in \mathbb{B}^n$ e $y^i \in \mathbb{B}^m$ os pontos com coordenadas 1 indexadas por $u_1, \dots, u_i$ e $u_i u_{i+1}$. Os pontos (x^i, y^i) e $(\mathbf{e} - x^i, y^i)$, para $i = 1, \dots, p$, estão na face definida por (8) e são afins independentes. $\square$

Usando o Teorema 2, resta mostrar que qualquer ciclo negativo pode ser obtido pela comutação de um ciclo com uma aresta negativa para obter o seguinte resultado:

Teorema 3 *Se C é um ciclo negativo de G , a desigualdade (8) define faceta de $\mathbf{P}(G)$.*

Prova. Seja C' o ciclo obtido de C com a contração de suas arestas positivas. Cada vértice v de C' representa a união dos vértices U_v de C ligados por um caminho de arestas positivas de C . Seja $E_{C'} = E(C')$, como C' possui um número ímpar de arestas, existe uma partição $S', \bar{S}' = V(C') \setminus S'$ dos vértices de C' , tal que $|E_{C'}[S']| = 1$ e $|E_{C'}[\bar{S}']| = 0$. Tal partição pode ser obtida escolhendo para S' um par de vértices adjacentes e, em seguida, vértices alternados na sequência do ciclo. Note que $S = \bigcup_{v \in S'} U_v$ e $\bar{S} = \bigcup_{v \in \bar{S}'} U_v$ são uma partição de $V(C)$ e que $\delta_{C'}(S') = \delta_C(S)$ contém todas as arestas negativas de C , exceto uma, a que está em $E_C[S]$. Logo, o ciclo comutado C^S tem uma única aresta negativa, e este ciclo está no grafo comutado G^S . Segue dos Lemas 4 e 1 que a desigualdade $\sum_{e \in E(C^S)} y_e \geq 1$ define faceta de $\mathbf{P}(C^S)$ e de $\mathbf{P}(G^S)$. O Teorema 2 garante, então, que ela também induz faceta de $\mathbf{P}(G)$. $\square$

Referências

- Aref, S., Mason, A. J., and Wilson, M. C. (2020). A modeling and computational study of the frustration index in signed networks. *Networks*, 75(1):95–110.
- Cartwright, D. and Harary, F. (1956). Structural balance: a generalization of heider's theory. *Psychological review*, 63(5):277.
- Harary, F. (1953). On the notion of balance of a signed graph. *Michigan Mathematical Journal*, 2(2):143–146.
- Harary, F. (1959). On the measurement of structural balance. *Behavioral Science*, 4(4):316–323.
- Zaslavsky, T. (1982). Signed graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 4(1):47–74.