

Cobertura Exata por Caminhos Arco-Íris com Conflitos em Grafos Tricoloridos

Gustavo Henrique Sencio de Souza¹, Santiago Valdés Ravelo¹

¹Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Campinas, São Paulo.

g171425@dac.unicamp.br, ravelo@unicamp.br

Abstract. *This work studies the EXACT RAINBOW PATH COVER IN TRICOLORED GRAPHS WITH CONFLICTS (3ERC) problem, in which, given a graph whose edges are colored with three colors and a list of pairs of vertices in conflict, the goal is to cover all edges with the minimum number of valid rainbow paths (edge-disjoint paths that do not contain conflicting pairs). It is shown that the problem is NP-hard via a reduction from 3-DIMENSIONAL MATCHING. A polynomial-time algorithm based on maximum matching that guarantees a 2-approximation is also presented.*

Resumo. *Este trabalho estuda o problema COBERTURA EXATA POR CAMINHOS ARCO-ÍRIS COM CONFLITOS EM GRAFOS TRICOLORIDOS (3ERC), no qual, dado um grafo com arestas coloridas com três cores e uma lista de pares de vértices em conflito, deseja-se cobrir todas as arestas com o menor número de caminhos arco-íris válidos (disjuntos nas arestas e que não contêm pares em conflito). Demonstra-se que o problema é NP-difícil por redução a partir de EMPARELHAMENTO TRIDIMENSIONAL. Também é apresentado um algoritmo polinomial baseado em emparelhamento máximo que garante uma 2-aproximação.*

1. Introdução

Problemas de cobertura por caminhos em grafos surgem em diversos contextos combinatórios e computacionais. Neste trabalho, estudamos uma variação em grafos com arestas coloridas, na qual buscamos caminhos sem repetição de cores. Essa restrição pode modelar redes de comunicação em que cores representam diferentes recursos ou canais. Caminhos sem repetição de cores evitam o uso repetido de um mesmo recurso, podendo reduzir interferência e congestionamentos, além de aumentar a robustez do sistema [Chartrand et al. 2008, Siewiorek and Swarz 1998]. Com base nesses conceitos, definimos a seguir o problema investigado neste trabalho.

COBERTURA POR CAMINHOS ARCO-ÍRIS COM CONFLITOS EM GRAFOS TRICOLORIDOS (3ERC) 3ERC. Entrada $(G, c, \mathcal{F})$, onde: $G = (V, E)$ é um grafo simples, $c : E \rightarrow A, B, C$ é uma coloração das arestas e $\mathcal{F} \subseteq V(G) \times V(G)$ é um conjunto de pares de vértices. O objetivo é encontrar uma coleção mínima $\mathcal{P}$ de caminhos **arco-íris** (com todas as arestas de cores diferentes), dois a dois disjuntos em arestas, que cubra todas as arestas de G e tal que nenhum caminho contenha um par de vértices em conflito.

Como as arestas de G recebem uma dentre três cores, dizemos que G é um grafo tricolorido. Além disso, qualquer par de vértices pertencente a $\mathcal{F}$ é denominado um par de vértices em conflito.

Este trabalho investiga a complexidade e a aproximabilidade desse problema. Inicialmente, na Seção 2, mostra-se que o problema é NP-difícil. Em seguida, na Seção 3, apresentamos um algoritmo baseado em emparelhamento máximo que fornece uma 2-aproximação.

2. Complexidade

Para demonstrar a dificuldade do problema, utiliza-se uma redução a partir de um problema clássico da otimização combinatória, conhecidamente NP-Difícil: o **Emparelhamento Tridimensional** (3-Dimensional Matching, 3DM)[Karp 1972].

PROBLEMA 3DM(X, Y, Z, T): *Sejam X, Y, Z conjuntos disjuntos com $|X| = |Y| = |Z| = n$ e $T \subseteq X \times Y \times Z$. Existe $M \subseteq T$ com $|M| = n$ tal que cada elemento aparece exatamente uma tripla?*

Teorema 1 3ERC é NP-difícil.

Prova: Dada uma instância (X, Y, Z, T) do 3DM, constrói-se um grafo G com cores A , B e C para o 3ERC como segue:

- Para cada elemento $v \in X \cup Y \cup Z$, são criados dois vértices v e v' , conectados por uma aresta (v, v') de cor A .
- Para cada tripla $t = (x, y, z) \in T$, constrói-se um *gadget*, conforme ilustrado na Figura 1-(a), descrito a seguir: adicionamos os vértices $\{t_x, t_y, t_z, t, t', t'_x, t'_y, t'_z\}$ e as arestas $\{(t_z, t), (t', t_x)\}$ de cor A ; $\{(t_x, x), (t_z, z), (t'_y, y'), (t_y, t_z), (t'_y, t'_z)\}$ de cor B ; e $\{(t_y, y), (t'_x, x'), (t'_z, z'), (t_x, t_y), (t'_x, t'_y)\}$ de cor C .
- Para evitar caminhos que usem arestas de gadgets diferentes adicionamos, para cada dupla de gadgets a, b , os pares de vértices $(t_x^a, t_x^b), (t_y^a, t_y^b), (t_z^a, t_z^b)$ a $\mathcal{F}$.

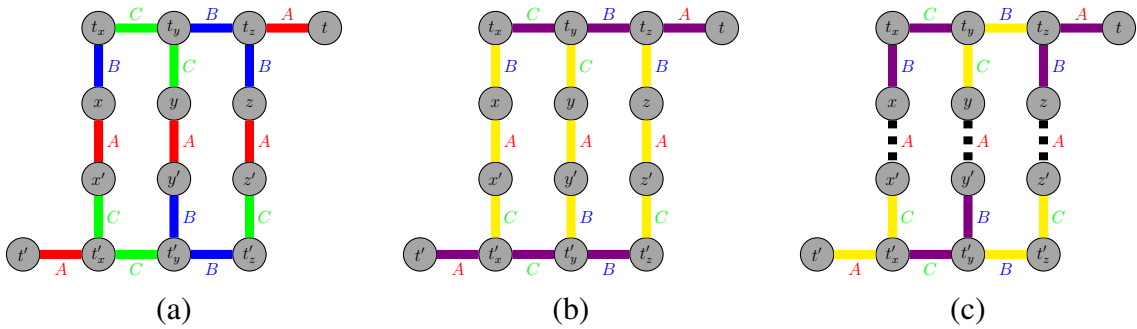


Figura 1. (a) Gadget da tripla $t = (x, y, z)$. (b) Os 5 caminhos na solução do 3ERC se a tripla $t = (x, y, z)$ pertence ao emparelhamento (dois horizontais em violeta e três verticais em amarelo). (c) Os 6 caminhos na solução do 3ERC se a tripla $t = (x, y, z)$ não pertence ao emparelhamento.

Fazendo $m = |T|$, a construção acima gera um grafo com $2n + 8m$ vértices e $n + 12m$ arestas, e um conjunto de pares em conflitos de tamanho $O(m^2)$, podendo ser realizada em $O(n + m^2)$ operações.

A seguir, mostra-se que (X, Y, Z, T) é uma instância SIM para 3DM se, e somente se, G é coberto por até $6m - n$ caminhos arco-íris.

Suponha que (X, Y, Z, T) é uma instância SIM para 3DM e denote por $M \subseteq T$ um emparelhamento tal que $|M| = n$. Para cada tripla $t \in M$, podemos cobrir as arestas do gadget correspondente com 5 caminhos arco-íris, como ilustrado na Figura 1-(b). Esses caminhos também cobrem todas as arestas associadas aos elementos, já que M é um emparelhamento perfeito. Dessa forma, resta apenas cobrir as arestas dos gadgets associados às triplas em $T \setminus M$, e cada um deles é coberto por 6 caminhos arco-íris, como mostrado na Figura 1-(c). Assim, G é coberto por:

$$\underbrace{5n}_{\text{gadgets associados às triplas de } M} + \underbrace{6(m-n)}_{\text{gadgets associados às triplas em } T \setminus M} = 6m - n.$$

Suponha que G é coberto por no máximo $6m - n$ caminhos arco-íris. Se uma aresta de elemento (do tipo (v, v') , com $v \in X \cup Y \cup Z$) é coberta por um caminho que também contém alguma aresta de um gadget, dizemos que esse gadget cobre a aresta em questão. Observe que, pela construção do conjunto $\mathcal{F}$ de pares em conflito, nenhum caminho em uma solução pode conter arestas de gadgets distintos, exceto pelas arestas de elementos.

Denote por T_0, T_1, T_2 e T_3 o número de gadgets que cobrem, respectivamente, 0, 1, 2 ou 3 arestas de elementos. Um gadget que cobre três arestas de elementos precisa de pelo menos 5 caminhos arco-íris para ser coberto. Por outro lado, se um gadget cobre menos do que três arestas de elementos, então necessita de pelo menos 6 caminhos arco-íris para cobrir todas as suas arestas. Assim,

$$5T_3 + 6(T_2 + T_1 + T_0) \leq 6m - n.$$

Observe que $m = T_0 + T_1 + T_2 + T_3$. Logo,

$$5T_3 + 6(T_2 + T_1 + m - T_3 - T_2 - T_1) \leq 6m - n.$$

Daí segue que $T_3 \geq n$, isto é, existem pelo menos n gadgets que cobrem 3 arestas de elementos. Portanto, as triplas associadas a esses gadgets formam um emparelhamento perfeito e (X, Y, Z, T) é uma instância SIM para 3DM.

□

3. Aproximação

Como o problema é NP-difícil, buscamos algoritmos de aproximação que produzam soluções com garantia de desempenho em tempo polinomial, conforme o arcabouço clássico de algoritmos de aproximação [Williamson and Shmoys 2011]. Nossa proposta para aproximar 3ERC consiste em construir um grafo auxiliar e obter um emparelhamento máximo nesse grafo.

Dado um grafo $G = (V, E)$ para 3ERC, constrói-se um grafo auxiliar H da seguinte forma:

- Para cada aresta $e \in E$, definimos um vértice v_e em H .
- Dois vértices $v_{e_1}, v_{e_2} \in H$ são adjacentes em H se as arestas e_1 e e_2 possuem um vértice em comum, cores diferentes e não possuem vértices que são um par em $\mathcal{F}$.

Note que o grafo H possui $|E|$ vértices e $O(|E|^2)$ arestas, podendo ser construído

em $O(|E|^2)$ operações. Após obter o grafo H , calcula-se um emparelhamento máximo em H , o que pode ser feito em $O(|E|^2 \sqrt{|E|}) = O(|E|^{2.5})$ operações [Edmonds 1965]. Observe que, por construção, as arestas selecionadas pelo emparelhamento máximo definem caminhos arco-íris dois a dois disjuntos no grafo original. Assim, a solução do algoritmo consiste nesses caminhos e nas arestas restantes não cobertas por eles, cada uma considerada como um caminho unitário.

Teorema 2 *O algoritmo proposto é uma 2-aproximação para o problema 3ERC.*

Prova: Seja $\mathcal{O}$ uma solução ótima para 3ERC no grafo G e denote $OPT = |\mathcal{O}|$. Defina por T_3 , T_2 e T_1 o número de caminhos de comprimento 3, 2 e 1 em $\mathcal{O}$, respectivamente. Assim,

$$OPT = T_3 + T_2 + T_1 \quad \text{e} \quad |E| = 3T_3 + 2T_2 + T_1.$$

Observe que todo caminho de comprimento 2 ou 3 em $\mathcal{O}$ contém ao menos um par de arestas adjacentes com cores distintas. Cada um desses pares corresponde a uma aresta em H . Como M é um emparelhamento máximo em H , obtemos

$$|M| \geq T_3 + T_2.$$

O algoritmo constrói $|M|$ caminhos de comprimento 2, e as demais arestas são cobertas individualmente. Assim, o número de caminhos (ALG) produzidos pelo algoritmo é

$$ALG = |M| + (|E| - 2|M|) = |M| + (3T_3 + 2T_2 + T_1 - 2|M|) = 3T_3 + 2T_2 + T_1 - |M|.$$

Como $|M| \geq T_3 + T_2$, obtemos

$$ALG \leq 3T_3 + 2T_2 + T_1 - (T_3 + T_2) = 2T_3 + T_2 + T_1 \leq 2(T_3 + T_2 + T_1) = 2OPT.$$

A complexidade do algoritmo é dominada pelo cálculo do emparelhamento máximo, que pode ser realizada em $O(|E|^{2.5})$ operações. Portanto, o algoritmo fornece uma 2-aproximação em tempo polinomial para o problema. $\square$

Uma possível melhoria do algoritmo proposto seria estender alguns dos caminhos de comprimento 2 obtidos, utilizando as arestas não cobertas (inclusive por meio de um segundo emparelhamento). Contudo, isso não garante uma melhoria no fator de aproximação, pois existem instâncias nas quais o algoritmo produz uma solução, sem possibilidade de estender caminhos, cuja razão de aproximação é arbitrariamente próxima de 2.

4. Conclusão

Este trabalho investigou o problema 3ERC, demonstrando sua NP-dificuldade por meio de uma redução de 3DM. Foi apresentado um algoritmo polinomial baseado em emparelhamento máximo que garante uma 2-aproximação e mostrou-se que esse fator é justo, não sendo melhorado por refinamentos naturais baseados na extensão de caminhos. Como trabalhos futuros, destacamos o estudo da versão sem conflitos, a obtenção de melhores fatores ou limites de inaproximabilidade, bem como a análise de classes restritas de grafos e variantes com mais cores.

Referências

- Chartrand, G., Johns, G. L., McKeon, K. A., and Zhang, P. (2008). Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*, 133(1):85–98.
- Edmonds, J. (1965). Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17:449–467.
- Karp, R. (1972). Reducibility among combinatorial problems. volume 40, pages 85–103.
- Siewiorek, D. P. and Swarz, R. S. (1998). *Reliable Computer Systems: Design and Evaluation*. AK Peters.
- Williamson, D. P. and Shmoys, D. B. (2011). *The Design of Approximation Algorithms*. Cambridge University Press.