

Cobrindo as arestas de cactos com caminhos*

Carlos V. G. C. Lima¹, Ana Karolinna Maia², Samuel S. Morais²

¹Centro de Ciências e Tecnologia – Universidade Federal do Cariri (UFCA), Brasil

²Departamento de Computação – Universidade Federal do Ceará (UFC), Brasil

vinicius.lima@ufca.edu.br, karolmaia@ufc.br, csamuelssm@alu.ufc.br

Abstract. *An edge cover problem on graphs seeks a family of subsets of edges of the graph with a given property such that their union is exactly the edge set of the graph. [Harary and Schwenk 1972] defined $\pi^*(G)$ as the size of a minimum edge cover of G such that all subsets in the covering are simple paths in G . In this work we determine $\pi^*(G)$ for a cactus G .*

Resumo. *Um problema de cobertura de arestas em grafos procura por uma família de subconjuntos de arestas do grafo com uma determinada propriedade tal que sua união seja exatamente o conjunto de arestas do grafo. [Harary and Schwenk 1972] definiu $\pi^*(G)$ como o tamanho de uma menor cobertura de arestas de G de forma que todos os subconjuntos na cobertura são caminhos simples em G . Neste trabalho, determinamos $\pi^*(G)$ para um cacto G .*

1. Introdução

Dado um grafo $G = (V, E)$, dizemos que uma coleção de subconjuntos de arestas $\mathcal{F} = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ é uma *cobertura das arestas* de G se $\bigcup_{i=1}^k E_i$ é exatamente $E(G)$. Equivalentemente, para toda aresta e de G , existe ao menos um $E_i \in \mathcal{F}$ tal que $e \in E_i$. Se os elementos de $\mathcal{F}$ são dois-a-dois disjuntos, chamamos $\mathcal{F}$ de uma *decomposição* de G . Em geral, quando se estuda coberturas de arestas e decomposições de grafos, o objetivo é encontrar a *menor* família $\mathcal{F}$ que cobre (decompõe) as arestas do grafo de modo que todos os elementos da família possuam uma propriedade pré-determinada.

[Harary and Schwenk 1972] introduziram os parâmetros $\pi(G)$ e $\pi^*(G)$ que denotam os menores tamanhos, respectivamente, de uma decomposição por caminhos e de uma cobertura por caminhos de G . Os autores também iniciaram o estudo destes parâmetros em algumas classes de grafos. Em particular, se T é uma árvore com p vértices ímpares e ℓ vértices folhas, então $\pi(T) = p/2$ e $\pi^*(T) = \lceil \ell/2 \rceil$ [Harary and Schwenk 1972] e, se $G \cong K_n$, então $\pi(G) = \pi^*(G) = \lceil n/2 \rceil$ [Lovász 1968, Harary and Schwenk 1972].

É sabido que os problemas de, dados um grafo G e $k \in \mathbb{N}$, decidir se $\pi(G) = k$ ou $\pi^*(G) = k$ são NP-completos mesmo para grafos de grau máximo ≤ 4 [Péroche 1984]. [Fan 2002] provou que $\pi^*(G) \leq \lceil n/2 \rceil$ para todo grafo G , mas o valor exato de π^* ou algoritmos para computá-lo em outras classes de grafos não são conhecidos.

Como o valor de π^* é conhecido para árvores e os grafos cactos formam uma superclasse das árvores, é natural se perguntar se conseguimos obter o valor exato de π^* para

*Este estudo foi financiado parcialmente pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Código de Financiamento 001, e CNPq Proc 404479-2023-5.

essa classe. [Moran and Wolfstahl 1991] estudaram o problema de obter uma cobertura de *vértices* por caminhos *disjuntos em vértices* e mostraram um algoritmo linear para cactos que produz uma tal cobertura. [Jin and Li 2006] estudaram uma variante deste mesmo problema em que os caminhos não podem ter mais que k vértices e também apresentaram um algoritmo polinomial que encontra uma menor tal cobertura para cactos. Com relação à cobertura de arestas, [Arumugam and Suseela 1998] mostraram o valor exato de $\pi(G)$ quando G é um grafo unicíclico, uma subclasse dos grafos cactos. Neste trabalho, nós determinamos o valor exato de $\pi^*(G)$ quando G é um grafo cacto.

2. Preliminares

Um grafo G é um cacto se, e somente se, toda aresta de G pertence a no máximo um ciclo e G é conexo. Equivalentemente, todas as componentes 2-conexas de G são isomorfas a um K_2 ou a um ciclo e G é conexo. De agora em diante, G é um grafo cacto não-isomorfo a C_n , a menos que dito o contrário. Um vértice de G é uma *folha* se $d_G(v) = 1$. Se $G - v$ é desconexo, então v é uma *articulação* de G . Um ciclo C de G é chamado de um *ciclo folha* se no máximo um vértice de C é uma articulação.

Dado um ciclo C e um vértice a de C , dizemos que um vértice v de C é um *vértice antipodal* de a em C se v possui a maior distância a a no ciclo. Note que, em ciclos pares, cada vértice possui exatamente um vértice antipodal, enquanto que, em ciclos ímpares, cada vértice possui exatamente dois vértices antipodais. Denote por $ap_C(a)$ o conjunto de vértices antipodais de a em C . Seja P um caminho e u, v dois vértices de P . Denote por $P(u, v)$ o subcaminho de P com extremidades u e v .

Considere agora um ciclo C de G com *exatamente duas articulações*, tal que a é uma articulação de C com $d_G(a) = 3$ e b é o vizinho de a que não pertence a C . Suponha que G_C^a é um caminho induzido com vértices $(a, b, \dots, l)$, onde l é uma folha. Seja $P \subseteq V(G)$ o conjunto de vértices que induz o caminho de b até l . Neste caso, dizemos que C é um *ciclo com rabo* e que P é *rabo* de C . Note que C é um ciclo folha de $G - P$. A Figura 2 mostra um cacto com alguns ciclos com rabo e uma cobertura ótima.

Para um grafo cacto G qualquer, denote por $c(G)$ e $\ell(G)$ o número de ciclos folhas de G e o número de vértices folhas de G , respectivamente.

3. Computando o valor de π^* para cactos

Seja G^- o grafo obtido de G pela remoção dos rabos de todos os ciclos com rabos, transformando-os em ciclos folhas. O seguinte lema, cuja demonstração está no apêndice, nos diz que podemos remover os rabos de todo ciclo com rabo de G sem afetar o tamanho de uma cobertura ótima.

Lema 1. *Seja C um ciclo com rabo de G e P o rabo de C . Então $\pi^*(G - P) = \pi^*(G)$.*

Sejam $\mathcal{C}(G^-) = \{C_1, \dots, C_{c(G^-)}\}$ e $\mathcal{L}(G^-) = \{l_1, \dots, l_{\ell(G^-)}\}$ os conjuntos, respectivamente, de ciclos folhas e vértices folhas de G^- . Denote por $a(C_i)$ a articulação de $C_i \in \mathcal{C}(G^-)$. Para cada $C_i \in \mathcal{C}(G^-)$, fixe uma ordenação cíclica $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ dos vértices de C_i . Vamos chamar o sentido *crescente* dos índices dos vértices de *direção positiva* de C_i , fixando conseqüentemente a o sentido oposto como a *direção negativa*. Para simplificar, vamos abusar um pouco da notação, utilizando $ap_{C_i}(x)$ para denotar um *único e fixo* vértice antipodal de x em C_i , mesmo que C_i seja ímpar.

Suponha que $c(G^-) \geq 3$. Vamos criar um grafo completo auxiliar $H = (\mathcal{C}(G^-), E_H)$ e escolher um ciclo Hamiltoniano C_H de H . Assuma primeiro que $c(G^-)$ é par e considere uma 2-aresta-coloração própria que atribui um rótulo de $\{+, -\}$ a cada aresta de C_H . Observe que cada $C_i \in \mathcal{C}(G^-)$ possui exatamente um vizinho de uma aresta rotulada com $+$ e um vizinho de uma aresta rotulada com $-$. Para cada $C_i \in \mathcal{C}(G^-)$, denote por C_i^+ e C_i^- tais vizinhos, respectivamente. Seja Q_i^+ (Q_i^-) um caminho de $ap_{C_i}(a(C_i))$ até $ap_{C_i^+}(a(C_i^+))$ ($ap_{C_i^-}(a(C_i^-))$) seguindo a direção positiva (negativa) em ambos os ciclos. Convencionamos que, para uma aresta positiva (negativa) $C_i C_j$, os caminhos Q_i^+ e Q_j^+ (Q_i^- e Q_j^-) são os mesmos. Definimos então a família $\mathcal{Q} = \{Q_i^+, Q_i^- \mid C_i \in \mathcal{C}(G^-)\}$.

No caso em que $c(G^-)$ é ímpar, defina um terceiro rótulo “+−” e considere a 3-aresta-coloração própria de C_H em que a aresta $C_1 C_{c(G^-)}$ recebe o rótulo +− e as demais arestas de C_H recebem rótulos $+$ ou $-$ alternadamente, sem perda de generalidade. Temos então que o rótulo de $C_1 C_2$ é $+$, o rótulo de $C_{c(G^-)-1} C_{c(G^-)}$ é $-$, e o rótulo de $C_1 C_{c(G^-)}$ é +−. Logo Q_1^+ cobre a “metade positiva” de C_1 e $Q_{c(G^-)}^-$ cobre a “metade negativa” de $C_{c(G^-)}$. Defina então $Q_{1,c(G^-)}^{+-}$ como o caminho que passa pela “metade negativa” de C_1 e vai até a “metade positiva” de $C_{c(G^-)}$. Neste caso, defina $\mathcal{Q} = \{Q_1^+, Q_{1,c(G^-)}^{+-}, Q_{c(G^-)}^-\} \cup \{Q_i^+, Q_i^- \mid 2 \leq i < c(G^-)\}$.

No caso em que $c(G^-) = 2$, definimos $\mathcal{Q}$ composto por exatamente dois caminhos $Q_{1,2}^+$ e $Q_{1,2}^-$, um deles cobrindo as metades positivas de C_1 e C_2 e o outro cobrindo as metades negativas. Se $c(G^-) = 0$, tomamos $\mathcal{Q} = \{\emptyset\}$.

Em todos os casos anteriores, a família $\mathcal{Q}$ tem tamanho $c(G^-)$ e cobre todos os ciclos folhas.

Agora, seja $R_{i,j}$ um caminho entre uma folha l_i e uma folha l_j em G^- . Defina a família de caminhos $\mathcal{R} = \{R_{2i-1,2i} \mid i \leq \lfloor \ell(G^-)/2 \rfloor\} \cup \{R_{\ell(G^-),j} \mid \text{para algum } j \text{ fixo, se } \ell(G^-) \text{ for ímpar}\}$. Veja que $\mathcal{R}$ tem tamanho $\lfloor \ell(G^-)/2 \rfloor$ e cobre todas as arestas incidentes em vértices folhas. Os lemas a seguir nos ajudarão a cobrir arestas (possivelmente) não cobertas por $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{R}$.

Lema 2. *Se existe uma aresta de corte e de G^- não coberta por $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{R}$, então podemos obter uma cobertura $\mathcal{P}'$ que cobre e, todas as arestas de $\mathcal{P}$ e tal que $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$.*

Demonstração. Sejam u e v as extremidades de e . Veja que $G^- - e$ possui exatamente duas componentes G_u^- e G_v^- e que devem existir caminhos $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ tais que $P_1 \subseteq G_u^-$ e $P_2 \subseteq G_v^-$, caso contrário, um caminho entre um vértice de G_u^- e G_v^- necessariamente passaria por e e, portanto, e estaria coberta por $\mathcal{P}$. Sejam x_i, y_i extremidades de P_i . Seja ainda b_1 (b_2) um vértice interno de P_1 (P_2) tal que ou $b_1 = u$ ($b_2 = v$) ou existe um caminho $P_{b_1,u}$ ($P_{b_2,v}$) de b_1 (b_2) para u (v) de forma que $P_{b_1,u}$ ($P_{b_2,v}$) não usa arestas de P_1 (P_2). Observe que b_1 e b_2 sempre existem. Defina então $P'_1 = P_1(x_1, b_1) \cup P_{b_1,u} \cup e \cup P_{b_2,v} \cup P_2(b_2, x_2)$ e $P'_2 = P_2(y_2, b_2) \cup P_{b_2,v} \cup e \cup P_{b_1,u} \cup P_1(b_1, y_1)$. Veja que $\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus \{P_1, P_2\}) \cup \{P'_1, P'_2\}$ cobre as mesmas arestas que $\mathcal{P}$ cobre, além de cobrir também e . A Figura 1 ilustra o argumento dado neste lema. $\square$

Lema 3. *Se existe uma aresta e de um ciclo C de G^- não coberta por $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{R}$, então podemos obter uma cobertura $\mathcal{P}'$ que cobre e, todas as arestas de $\mathcal{P}$ e tal que $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$.*

Com isso, conseguimos calcular $\pi^*(G)$ em termos de G^- .

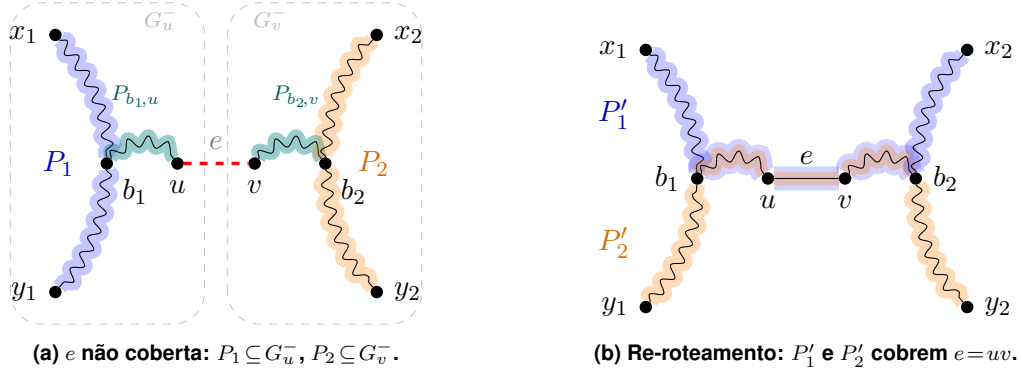


Figura 1. Ilustração do argumento utilizado no Lema 2, fazendo o re-roteamento de dois caminhos de $\mathcal{P}$ em componentes diferentes de $G - e$.

Teorema 4. *Seja G um grafo cacto. Então $\pi^*(G) = c(G^-) + \lceil \ell(G^-)/2 \rceil$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que $\pi^*(G^-) = c(G^-) + \lceil \ell(G^-)/2 \rceil$, pelo Lema 1. Veja que $\pi^*(G^-) \geq c(G^-) + \lceil \ell(G^-)/2 \rceil$, pois cada caminho cobre no máximo dois vértices folhas e cada ciclo folha de G^- necessita de no mínimo dois caminhos para cobri-lo. Mostraremos a seguir que $\pi^*(G^-) \leq c(G^-) + \lceil \ell(G^-)/2 \rceil$.

Se $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{R}$ for uma cobertura das arestas de G^- , não precisamos fazer mais nada. Assuma então que existe uma aresta $e \in E(G^-)$ que não é coberta por $\mathcal{P}$. Veja que, como G^- é um cacto, então toda aresta e ou é uma aresta de corte ou faz parte de um ciclo. Então, pelos Lemas 2 e 3, conseguimos obter uma nova família de caminhos $\mathcal{P}'$ que cobre todas as arestas que $\mathcal{P}$ cobre, além de cobrir também e .

Podemos aplicar os Lemas 2 e 3 repetidamente, fazendo re-roteamentos de caminhos e aumentando estritamente a quantidade de arestas cobertas iterativamente até cobrir todo o grafo, mantendo sempre a mesma quantidade de $c(G^-) + \lceil \ell(G^-)/2 \rceil$ caminhos.

Resta somente o caso em que $c(G^-) = 1$. Neste caso, seja a a articulação do único ciclo folha de G^- . Remova todos os vértices do ciclo folha com exceção de a e pendure em a dois novos vértices folhas x_1 e x_2 , obtendo um novo grafo $\hat{G}$ tal que $c(\hat{G}) = 0$. Como já provamos que o teorema vale para o caso em que o grafo não possui ciclos folhas, temos que $\pi^*(\hat{G}) = \lceil \ell(\hat{G})/2 \rceil = 1 + \lceil \ell(G^-)/2 \rceil = c(G^-) + \lceil \ell(G^-)/2 \rceil$. Observe que uma cobertura ótima de $\hat{G}$ pode ser adaptada para obter uma cobertura de G^- . $\square$

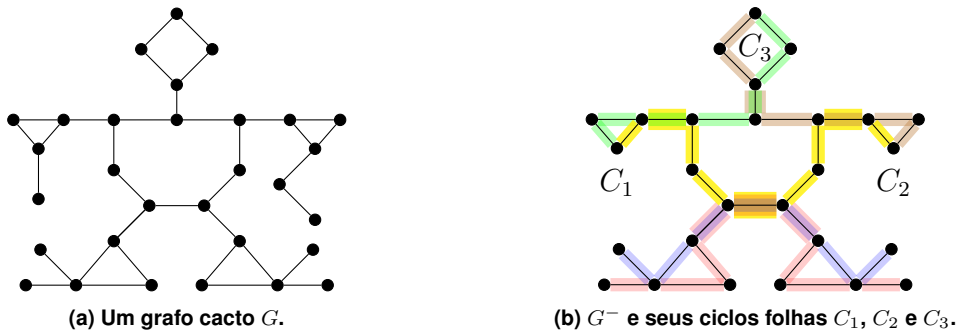


Figura 2. Ilustração de um grafo cacto, o grafo resultante após a poda dos seus ramos e uma cobertura por caminhos obtida como no Teorema 4.

Referências

- Arumugam, S. and Suseela, J. S. (1998). Acyclic graphoidal covers and path partitions in a graph. *Discrete Mathematics*, 190(1):67–77.
- Fan, G. (2002). Subgraph coverings and edge switchings. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 84(1):54–83.
- Harary, F. and Schwenk, A. J. (1972). Evolution of the path number of a graph: Covering and packing in graphs. In READ, R. C., editor, *Graph Theory and Computing*, pages 39–45. Academic Press.
- Jin, Z. and Li, X. (2006). On the k-path cover problem for cacti. *Theoretical Computer Science*, 355(3):354–363.
- Lovász, L. (1968). On covering of graphs. In *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*, pages 231–236. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Moran, S. and Wolfstahl, Y. (1991). Optimal covering of cacti by vertex-disjoint paths. *Theoretical Computer Science*, 84(2):179–197.
- Péroche, B. (1984). NP-completeness of some problems of partitioning and covering in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 8(2):195–208.