

Coloração de identificação local em grafos split-comparabilidade

Robson Oliveira , Márcia Cappelle , Hebert Coelho , Julliano Nascimento

¹Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Goiânia – GO – Brasil

robsonmedradooili@gmail.com,
{mcappelle, hebert, jullianonascimento}@ufg.br

Abstract. A locally identifying coloring (lid-coloring) is a proper vertex coloring in which adjacent vertices with distinct closed neighborhoods must be distinguished by the sets of colors appearing in those neighborhoods. The lid-chromatic number $\chi_{lid}(G)$ of a graph G is the minimum number of colors required in such a coloring. In this work we investigate the lid-chromatic number of a subclass of split-comparability graphs, characterized by a more restricted neighborhood structure, deriving exact expressions for $\chi_{lid}(G)$ depending on the structural decomposition of the graph and analyzing the effect of removing twin vertices.

Resumo. Uma coloração de identificação local (lid-coloração) é uma coloração própria de vértices tal que vértices adjacentes com vizinhanças fechadas distintas devem ser distinguidos pelos conjuntos de cores presentes nessas vizinhanças. O número lid-cromático $\chi_{lid}(G)$ de um grafo G é o menor número de cores necessário em uma lid-coloração. Neste trabalho investigamos o número lid-cromático de uma subclasse de grafos split-comparabilidade, caracterizada por uma estrutura de vizinhança mais restrita, obtendo expressões exatas para $\chi_{lid}(G)$ em função da estrutura do grafo e analisando o efeito da remoção de vértices gêmeos.

1. Introdução

Consideramos grafos finitos, simples e não direcionados. Para um grafo $G = (V, E)$, a vizinhança aberta (fechada) de um vértice $v \in V(G)$ é o conjunto $N(v) = \{u \in V(G) \mid vu \in E(G)\}$ ($N[v] = N(v) \cup \{v\}$). Seja $S \subseteq V(G)$. Denotamos por $N[S]$ o conjunto $\bigcup_{u \in S} N[u]$. Dois vértices u e v são gêmeos verdadeiros se $N[u] = N[v]$ e gêmeos falsos se $N(u) = N(v)$. Denotamos por $[k]$ o conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$.

O problema da coloração própria de vértices consiste em atribuir cores aos vértices de um grafo de tal forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. O número mínimo de cores necessárias para colorir propriamente um grafo G é seu número cromático, denotado por $\chi(G)$. Seja $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}^*$ uma coloração própria de vértices de G . Para $S \subseteq V(G)$, definimos $c(S)$ como o conjunto de cores atribuídas aos vértices em S . Uma coloração própria de vértices c de um grafo é chamada de coloração de identificação local (lid-coloração) se para cada par de vértices adjacentes u e v tem-se que se $N[u] \neq N[v]$, então $c(N[u]) \neq c(N[v])$. O número cromático de identificação local do grafo G , denotado por $\chi_{lid}(G)$, é o menor número de cores necessárias em qualquer lid-coloração de G . Na Figura 1(a) temos um grafo G e sua lid-coloração mínima com

$c(N[v_1]) = \{1, 2, 3\}$, $c(N[v_2]) = c(N[v_3]) = \{1, 2, 3, 4\}$, $c(N[v_4]) = c(N[v_5]) = \{1, 3\}$
e $c(N[v_6]) = c(N[v_7]) = \{2, 3, 4\}$.

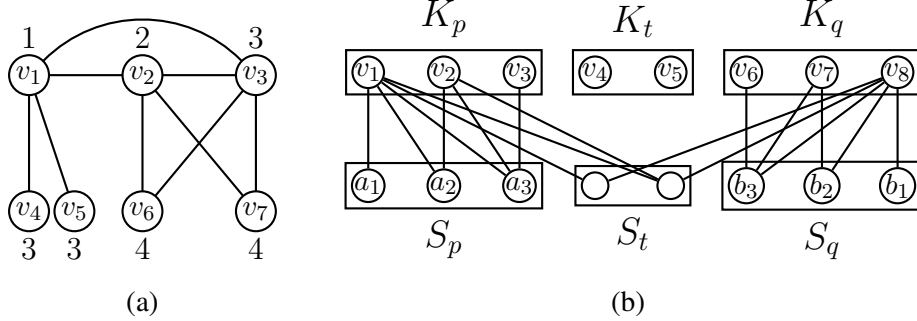


Figura 1: Em (a) um exemplo de lid-coloração e em (b) um grafo *split-comparabilidade* onde as arestas da clique $K = K_p \cup K_t \cup K_q$ foram omitidas.

A lid-coloração foi introduzida em 2012 [Esperet et al. 2012], quando foram apresentados vários limites para $\chi_{lid}(G)$, incluindo grafos planares, subclasses de grafos perfeitos e grafos com grau máximo limitado. Foi demonstrado que todo grafo bipartido G tem $\chi_{lid}(G) \leq 4$ e que decidir se um grafo bipartido é 3-lid-colorível é um problema NP-completo. Para qualquer grafo planar G , tem-se $\chi_{lid}(G) \leq 1280$ [Gonçalves et al. 2013]. Resultados sobre produtos de grafos e grafos cordais podem ser encontrados em [Bhavarapu et al. 2023, Oliveira et al. 2023, Oliveira et al. 2024a, Oliveira et al. 2024b].

Neste trabalho investigamos o número lid-cromático de uma subclasse de grafos *split-comparabilidade*, caracterizada por uma estrutura de vizinhança mais restrita, obtendo expressões exatas para $\chi_{lid}(G)$ em função da estrutura do grafo e analisando o efeito da remoção de vértices gêmeos.

2. Lid-coloração em grafos *split-comparabilidade*

Uma *clique* é um conjunto de vértices que induz um grafo completo. Um *conjunto independente* de um grafo G é um conjunto de vértices que induz um grafo vazio. Um grafo *split* $G = [K, S]$ é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique K e um conjunto independente S . O número lid-cromático de um grafo *split* conexo G satisfaz os limites $|K| + 1 \leq \chi_{lid}(G) \leq 2|K| - 1$, quando K e S são não vazios. Um grafo G é denominado *grafo de comparabilidade* se admite uma orientação transitiva de suas arestas. Dizemos que G é um *grafo split-comparabilidade* se G pertence simultaneamente às classes dos grafos *split* e dos grafos de comparabilidade. Ortiz e Villanueva [Ortiz and Villanueva 2010] caracterizaram esses grafos da seguinte forma.

Teorema 1 [Ortiz and Villanueva 2010] *Um grafo split $G = [K, S]$ é um grafo de comparabilidade se, e somente se, K pode ser ordenado $v_1 \prec v_2 \prec \dots \prec v_r$ e $K_p = [v_1, v_p]$, $K_q = [v_q, v_r]$ e $K_t = K \setminus (K_p \cup K_q)$ tal que, para qualquer $s \in S$, $N(s)$ tem uma das seguintes formas: i) $[v_1, v_i]$, $i \leq p$; ii) $[v_j, v_r]$, $q \leq j \leq r$; iii) $[v_1, v_i] \cup [v_j, v_r]$, para $i \leq p$ e $q \leq j \leq r$.*

Dado $G = [K, S]$, a partição $[K_p, K_t, K_q]$ de K , definida no Teorema 1, induz S_q (vértices de S não adjacentes a K_p), S_p (não adjacentes a K_q) e $S_t = S \setminus (S_p \cup S_q)$,

formando a partição $[K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$ de $V(G)$ (Figura 1(b)). Escrevemos $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$ e assumimos s.p.g. $|S_p| \geq |S_q|$. Usamos $|K| = k$, $|S_p| = w$, $|S_q| = z$; vértices $v_i \in K$, $a_\ell \in S_p$ e $b_f \in S_q$ ordenados por grau crescente; todo v_i com $N[v_i] = V(K)$ pertence a K_t . No restante do trabalho, consideramos grafos split-comparabilidade com $|K| \geq 3$ e $S_t = \emptyset$, salvo menção em contrário.

Lema 2 *Seja G um grafo split-comparabilidade com $S_p \neq \emptyset$ e $S_q \neq \emptyset$. Para qualquer lid-coloração c de G , vale $c(S_p) \neq c(S_q)$.*

Prova. Como $N[v_1] = V(K) \cup S_p$, tem-se $c(N[v_1]) = c(K) \cup c(S_p)$. Analogamente, $N[v_k] = V(K) \cup V(S_q)$, logo $c(N[v_k]) = c(K) \cup c(S_q)$. Como v_1 e v_k são adjacentes e $N[v_1] \neq N[v_k]$, a condição de lid-coloração exige $c(N[v_1]) \neq c(N[v_k])$, o que implica $c(S_p) \neq c(S_q)$. $\square$

Para analisar os limites inferiores, particionamos S_p em classes de gêmeos falsos. Seja $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_\ell\}$ uma partição de S_p (resp. S_q) em classes de gêmeos falsos, com $d(a_i) < d(a_j)$ para $a_i \in T_i$, $a_j \in T_j$, $i < j$. Uma cor $x_i \in c(T_i)$ é *exclusiva* em $\mathcal{T}$ se $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} c(T_j) \cup c(K)$.

Lema 3 *Em qualquer lid-coloração c de G : (i) para todo $i \in [\ell - 1]$, existe uma cor $x_i \in c(T_i)$ exclusiva em $\mathcal{T}$; (ii) existe uma lid-coloração mínima na qual todos os vértices de cada T_i recebem a mesma cor.*

Prova. (i): Por simetria, seja $\mathcal{T}$ partição de S_p . Suponha, por contradição, que $c(T_i) \setminus (\bigcup_{j \neq i} c(T_j) \cup c(K)) = \emptyset$ para i mínimo. Então $(c(T_i) \setminus c(K)) \subseteq (\bigcup_{j > i} c(T_j) \setminus c(K))$. Para $v_i \in N(T_i)$ e $v_j \in N(T_{i+1})$, temos $N[v_i] \subsetneq N[v_j]$ com $N_{S_p}[v_i] = \bigcup_{j \geq i} T_j$ e $N_{S_p}[v_j] = \bigcup_{j > i} T_j$. A ausência de cor exclusiva em T_i implica $c(N[v_i]) = c(N[v_{i+1}])$, contradizendo a lid-coloração. (ii): Seja c lid-coloração mínima. Por (i), para $i \in [\ell - 1]$ existe $x_i \in c(T_i)$ exclusiva; atribua $c'(a) = x_i$ para todo $a \in T_i$ e uniformize T_ℓ com qualquer cor de $c(T_\ell)$. Tem-se $|c'| \leq |c|$. Como as vizinhanças em K_p são aninhadas e cada x_i é exclusiva, $c'(N[v_d]) \neq c'(N[v_j])$ para $v_d, v_j \in K_p$ com $N[v_d] \neq N[v_j]$, logo c' é lid-coloração mínima. $\square$

Lema 4 *Seja G um grafo split-comparabilidade. Para qualquer par de gêmeos falsos $u, w \in S$, temos $\chi_{lid}(G) = \chi_{lid}(G - w)$.*

Prova. Pelo Lema 3(ii), existe uma lid-coloração mínima com $c(u) = c(w)$, pois u e w pertencem à mesma classe T_i . Como $N(u) = N(w)$, atribuir a mesma cor a ambos não viola a coloração própria nem altera os conjuntos de cores nas vizinhanças fechadas de nenhum vértice de K . Portanto, $\chi_{lid}(G - w) = \chi_{lid}(G)$. $\square$

Lema 5 *Seja G um grafo split-comparabilidade com S livre de gêmeos falsos. Então:*

- (i) $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p| - 1$;
- (ii) se $K = K_p$, ou $K_t \neq \emptyset$, ou $(K_t = \emptyset \text{ e } |S_p| - |S_q| \leq 1)$, então $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p|$;
- (iii) se $K_t \neq \emptyset$ e $|S_p| = |S_q|$, então $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p| + 1$.

Prova. A clique K é colorida com $|K|$ cores distintas. Para (i): pelo Lema 3, cada T_i com $i \in [\ell - 1]$ possui uma cor exclusiva, de modo que os vértices de S_p requerem pelo menos $|S_p| - 1$ cores novas, possivelmente reutilizando uma cor de K no último elemento. Para (ii): se $K_t \neq \emptyset$, existe $v_j \in K_t$ com $c(N[v_j]) = c(K)$. Se $c(a_w) \in c(K)$, então para $v_\ell \in N(a_w)$ tem-se $c(N[v_\ell]) = c(K) = c(N[v_j])$, contradizendo a lid-coloração. Se $K = K_p$, reutilizar uma cor de K em a_w violaria a coloração própria. Nos dois casos, S_p exige $|S_p|$ cores novas. Se $K_t = \emptyset$ e $|S_p| - |S_q| \leq 1$: suponha, por contradição, que $|S_p| - 1$ cores extras sejam suficientes. Então $c(a_w) \in c(K)$ e $c(b_z) \in c(K)$, implicando $c(N[v_p]) = c(N[v_q]) = c(K)$, contradição. Para (iii): por (ii), $\chi_{lid}(G) \geq |K| + |S_p|$. Como $|S_p| = |S_q|$, se apenas $|S_p|$ cores extras fossem usadas, as mesmas cores seriam necessárias para distinguir K_p e K_q , implicando $c(S_p) = c(S_q)$, o que contradiz o Lema 2. $\square$

O resultado principal a seguir caracteriza o número lid-cromático de grafos split-comparabilidade quando $S_p \neq \emptyset$ e $S_t = \emptyset$.

Teorema 6 *Seja $G = [K_p, K_t, K_q, S_p, S_t, S_q]$ com $S_p \neq \emptyset$, $S_t = \emptyset$ e S livre de gêmeos falsos.*

Se $S_q = \emptyset$, então $\chi_{lid}(G) = |K| + |S_p|$.

Se $S_q \neq \emptyset$ e $K_t = \emptyset$: $\chi_{lid}(G) = \begin{cases} |K| + |S_p|, & |S_p| - |S_q| \leq 1, \\ |K| + |S_p| - 1, & |S_p| - |S_q| > 1. \end{cases}$

Se $S_q \neq \emptyset$ e $K_t \neq \emptyset$: $\chi_{lid}(G) = \begin{cases} |K| + |S_p|, & |S_p| > |S_q|, \\ |K| + |S_p| + 1, & |S_p| = |S_q|. \end{cases}$

Prova. Os limites inferiores seguem do Lema 5. Para os limites superiores, defina a coloração c como segue:

$$\begin{aligned} c(v_i) &= i, \quad i \in [k]; \\ c(a_\ell) &= k + \ell, \quad \ell \in [w - 1]; \\ c(a_w) &= \begin{cases} k + w, & \text{se } S_q = \emptyset, \text{ ou } |S_p| - |S_q| = 1, \text{ ou } K_t \neq \emptyset, \\ k, & \text{caso contrário;} \end{cases} \\ c(b_f) &= \begin{cases} k + f, & \text{se } |S_p| > |S_q| \text{ ou } K_t = \emptyset, \\ k + f + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

$\square$

Considerações finais. Investigamos também o efeito da remoção de gêmeos verdadeiros da clique K . Quando $|K| \geq 4$, remover um deles reduz $\chi_{lid}(G)$ em exatamente uma unidade: o grafo resultante preserva $|S_p|$ e $|S_q|$ e reduz $|K|$ em uma unidade, mantendo a estrutura de K_t , de modo que o mesmo caso do Teorema 6 se aplica com $|K| - 1$. Para $|K| \leq 3$, esse comportamento não é garantido. Como trabalho futuro, pretendemos investigar o caso $S_t \neq \emptyset$.

Agradecimentos. Os autores gostariam de agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro fornecido por meio de bolsa de estudos e também à FAPEG - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás, Chamada 21/2024.

Referências

- Bhyravarapu, S., Kumari, S., and Reddy, I. V. (2023). On locally identifying coloring of graphs. In *Conference on Algorithms and Discrete Applied Mathematics*, pages 147–158. Springer.
- Esperet, L., Gravier, S., Montassier, M., Ochem, P., and Parreau, A. (2012). Locally identifying coloring of graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 19(2):#P40.
- Gonçalves, D., Parreau, A., and Pinlou, A. (2013). Locally identifying coloring in bounded expansion classes of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161(18):2946–2951.
- Oliveira, M. R., Cappelle, R. M., and Coelho, H. (2023). Locally identifying coloring in some chordal graphs. *Matemática Contemporânea*, 22:152–160.
- Oliveira, R. M., Cappelle, M. R., and Coelho, H. (2024a). Coloração de identificação local no produto corona de ciclos e caminhos. In *Anais do IX Encontro de Teoria da Computação*, pages 119–123. SBC.
- Oliveira, R. M., Cappelle, M. R., and Coelho, H. (2024b). Locally identifying coloring of corona products: Complexity and structural results. In *Anais do LVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pages 1–12.
- Ortiz, C. and Villanueva, M. (2010). Threshold dimension of split-permutation graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 75:117.