

Coloração Total de Grafos Linha de Grafos Completos

Giovana Ferreira Badreddine¹, Hebert Coelho¹, Marcia R. Cappelle¹

¹Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Goiânia – GO – Brasil

gfbadreddine@gmail.com
hebert@ufg.br
marcia@inf.ufg.br

Abstract. *Total coloring assigns colors to vertices and edges of a graph G so that adjacent vertices, adjacent edges, and any edge and its endpoints receive distinct colors. The total chromatic number $\chi''(G)$ is the minimum number of colors in such a coloring. The Total Coloring Conjecture (TCC) states that every simple graph G satisfies $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$, where $\Delta(G)$ denotes the maximum degree of G . In this work we study the TCC for line graphs of complete graphs, $L(K_n)$, a dense regular class for which, as far as we know, complete results were previously known only for small n . We present an explicit constructive method for total coloring $L(K_n)$, based on a vertex-coloring matrix that depends on the parity of n and on two edge-coloring stages that preserve a balanced use of colors. For every n we obtain a total coloring of $L(K_n)$ with at most $2n - 2$ colors, matching the upper bound $\Delta(L(K_n)) + 2$ given by the TCC.*

Resumo. *A coloração total atribui cores a vértices e arestas de um grafo G de modo que vértices adjacentes, arestas adjacentes e qualquer aresta e seus vértices incidentes recebam cores distintas. O número cromático total $\chi''(G)$ é o menor número de cores em uma coloração total de G . A Conjectura da Coloração Total (TCC) afirma que todo grafo simples G satisfaz $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$, em que $\Delta(G)$ denota o grau máximo de G . Neste trabalho estudamos a TCC para os grafos linha de grafos completos, $L(K_n)$, uma classe regular e densa para a qual, até onde sabemos, resultados completos eram conhecidos apenas para valores pequenos de n . Apresentamos um método construtivo explícito de coloração total de $L(K_n)$, baseado em uma matriz de coloração de vértices que depende da paridade de n e em duas etapas adicionais de coloração de arestas que preservam uma distribuição balanceada das cores. Para todo n obtemos uma coloração total de $L(K_n)$ com, no máximo, $2n - 2$ cores, o que coincide com o limitante superior $\Delta(L(K_n)) + 2$ dado pela TCC.*

1. Introdução

A *coloração total* de um grafo G consiste em atribuir cores aos vértices e às arestas de modo que vértices adjacentes, arestas adjacentes e cada aresta e suas extremidades recebam cores distintas. O menor número de cores para o qual isso é possível é o *número cromático total* de G , denotado por $\chi''(G)$.

Seja $\Delta(G)$ o grau máximo de G . A Conjectura da Coloração Total (TCC) afirma que todo grafo simples G satisfaz

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Assim, todo grafo simples é classificado como do Tipo 1, quando $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$, ou do Tipo 2, quando $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$.

Do ponto de vista da complexidade computacional, determinar o número cromático total de um grafo G qualquer é NP-difícil [Sánchez-Arroyo 1989]. Mais especificamente, o problema de decisão associado à TCC — determinar se um grafo é do Tipo 1 ou do Tipo 2 é NP-completo. Essa dificuldade de classificação permanece válida até mesmo quando restringimos as instâncias a famílias específicas, como a dos grafos bipartidos regulares [McDiarmid e Sánchez-Arroyo 1993].

Neste trabalho estudamos a TCC para grafos linha de grafos completos, denotados por $L(K_n)$. O *grafo linha* $L(G)$ de um grafo G é o grafo cujos vértices representam as arestas de G , sendo dois vértices adjacentes se, e somente se, as arestas correspondentes em G possuem uma extremidade em comum. Para o grafo completo com n vértices, denotado por K_n , o seu grafo linha $L(K_n)$ possui $\frac{n(n-1)}{2}$ vértices, $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ arestas e é regular de grau

$$\Delta(L(K_n)) = 2(n-2).$$

Um grafo regular G é *conformável* se ele admite uma coloração de vértices com $\Delta(G) + 1$ cores tal que o número de vértices em cada classe de cor tem a mesma paridade de $|V(G)|$. Todo grafo do Tipo 1 é conformável [Chetwynd et al. 1991]. Resultados mostram que, para grafos regulares de ordem ímpar e grau suficientemente grande em função de $|V(G)|$, a conformabilidade é suficiente para garantir que o grafo seja do Tipo 1 [Hilton e Hind 1993, Chetwynd et al. 1991, Chew 1996].

Recentemente, Faria, Nigro e Sasaki [Faria et al. 2023] provaram que todos os grafos linha de grafos completos $L(K_n)$ são conformáveis, o que fornece uma forte evidência de que essa família seja do Tipo 1. Entretanto, as condições do Tipo $\Delta(G) \geq c \cdot |V(G)|$, para uma constante $c \in \mathbb{R}$, usadas em [Hilton e Hind 1993, Chetwynd et al. 1991, Chew 1996] não são satisfeitas por $L(K_n)$, e portanto esses resultados não fornecem uma prova direta. Isso motiva a abordagem adotada neste trabalho para a coloração total de $L(K_n)$.

Apresentamos uma construção explícita de coloração total para $L(K_n)$ com no máximo $\Delta(L(K_n)) + 2$ cores, estruturada em três etapas: a etapa 1, dedicada à coloração dos vértices, e as etapas 2 e 3, focadas na coloração das arestas.

2. Coloração total de $L(K_n)$

Nossa construção para a coloração total de $L(K_n)$ é dividida em três etapas: a etapa 1 colore os vértices, a etapa 2 colore as arestas de um subgrafo inicial e a etapa 3 colore as arestas restantes. A ideia central é explorar o fato de que cada vértice de $L(K_n)$ corresponde a uma aresta de K_n , isto é, a um par de índices (i, j) com $0 \leq i < j \leq n-1$.

Na primeira etapa, realizamos a coloração de vértices. Organizamos os vértices de $L(K_n)$ em uma matriz M , em que a posição (i, j) corresponde ao vértice associado à

aresta (i, j) de K_n , como ilustrado na Figura 1. A coloração dessa matriz é construída de modo que não haja repetição de cor entre vértices adjacentes de $L(K_n)$. Uma vez que a adjacência nesse grafo corresponde ao compartilhamento de um vértice em K_n , a matriz M é preenchida sob a restrição de que uma mesma cor não seja atribuída a posições (i, j) e (i', j') tais que $\{i, j\} \cap \{i', j'\} \neq \emptyset$. Quando n é par, usamos $n - 1$ cores; quando n é ímpar, usamos n cores. A coloração de vértices de $L(K_4)$ está ilustrada na Figura 2(a).

	0	1	2	3
0	-1	2	1	0
1	-1	-1	0	1
2	-1	-1	-1	2
3	-1	-1	-1	0

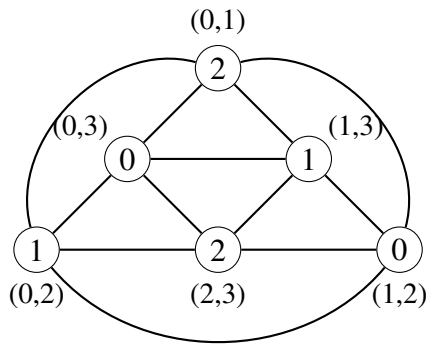
(a) $n = 4$

	0	1	2	3	4
0	-1	0	1	2	3
1	-1	-1	2	3	4
2	-1	-1	-1	4	0
3	-1	-1	-1	-1	1
4	-1	-1	-1	-1	-1

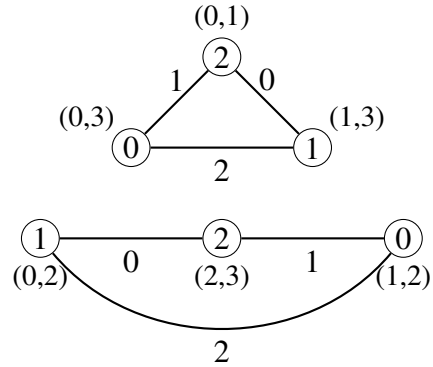
(b) $n = 5$

Figura 1: Matrizes de coloração dos vértices para (a) $n = 4$ (caso par) e (b) $n = 5$ (caso ímpar). Os valores representam a cor atribuída ao vértice (i, j) ; o valor -1 indica as posições não utilizadas no triângulo inferior da matriz.

Na segunda etapa, colorimos parte das arestas de $L(K_n)$. Para isso, consideramos dois vértices adjacentes (i, j) e (i, k) , que compartilham o índice i . Eliminando esse índice comum, obtemos o par (j, k) , que corresponde a um terceiro vértice de $L(K_n)$. Sempre que possível, atribuímos à aresta entre (i, j) e (i, k) a cor do vértice (j, k) . Caso não seja possível realizar essa atribuição, mantemos a aresta sem cor e avançamos para a próxima. Esse procedimento define uma coloração própria de arestas em um subgrafo $G_1 \subseteq L(K_n)$, utilizando apenas cores já empregadas na coloração dos vértices, como ilustrado na Figura 2(b).



(a) $L(K_4)$



(b) G_1

Figura 2: (a) $L(K_4)$ após a coloração de vértices (etapa 1). Os rótulos (i, j) indicam os vértices do grafo K_4 que geraram o respectivo vértice em $L(K_4)$, enquanto os demais números representam as cores. (b) Subgrafo G_1 de $L(K_4)$ com as arestas coloridas na etapa 2.

Na terceira etapa, tratamos apenas as arestas que permanecem sem cor após a etapa 2. Essas arestas formam um subgrafo regular G_2 , como ilustrado na Figura 3(a), de

grau $n - 2$ quando n é par e de grau $n - 3$ quando n é ímpar. Nessa etapa, introduzimos novas cores, distintas das já usadas nos vértices (etapa 1) e nas arestas (etapa 2). Pelo teorema de Vizing, a coloração de arestas de um grafo simples G pode ser feita com no máximo $\Delta(G) + 1$ cores [Vizing 1964]; assim, a etapa 3 utiliza no máximo $n - 1$ cores se n é par e no máximo $n - 2$ cores se n é ímpar. Na Figura 3(b) apresentamos o grafo $L(K_4)$ com a sua coloração total final.

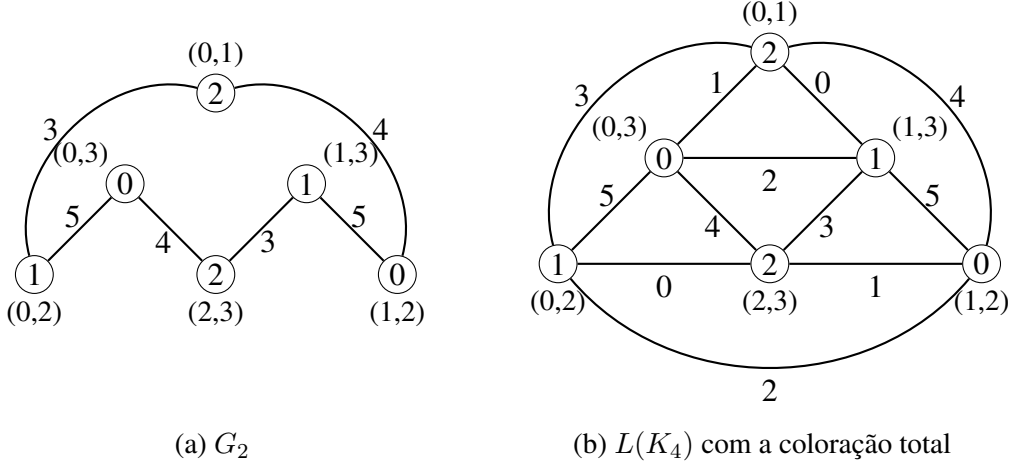


Figura 3: (a) Subgrafo G_2 de $L(K_4)$ com as arestas coloridas na etapa 3 utilizando as novas cores. (b) Grafo $L(K_4)$ com a sua coloração total final.

Somando as cores empregadas nas três etapas, obtemos uma coloração total de $L(K_n)$ com no máximo $2n - 2$ cores. Como $\Delta(L(K_n)) = 2n - 4$, segue que

$$\chi''(L(K_n)) \leq 2n - 2 = \Delta(L(K_n)) + 2.$$

Desse modo, concluímos que a construção proposta fornece uma coloração total de $L(K_n)$ com no máximo $\Delta(L(K_n)) + 2$ cores, confirmando a validade da Conjectura da Coloração Total para os grafos linha de grafos completos.

3. Considerações finais

Apresentamos uma construção explícita de coloração total para grafos linha de grafos completos $L(K_n)$, obtendo uma coloração com no máximo $\Delta(L(K_n)) + 2$ cores. Dessa forma, verificamos a validade da Conjectura da Coloração Total para essa classe de grafos.

A construção combina uma coloração balanceada dos vértices com duas etapas subsequentes para a coloração das arestas, sendo a etapa 3 justificada pelo teorema de Vizing [Vizing 1964]. Como perspectiva futura, pretendemos investigar se a etapa 3 pode ser realizada usando apenas $\Delta(G_2)$ cores, onde G_2 é o subgrafo remanescente após a etapa 2. Caso isso seja possível, obteremos uma coloração total de $L(K_n)$ com $\Delta(L(K_n)) + 1$ cores, o que mostra que essa classe de grafos é do Tipo 1.

Referências

- Chetwynd, A. G., Hilton, A. J. W., e Cheng, Z. (1991). The total chromatic number of graphs of high minimum degree. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-44(2):193–202.
- Chew, K. (1996). Total chromatic number of regular graphs of odd order and high degree. *Discrete Mathematics*, 154(1):41–51.
- Faria, L., Nigro, M., e Sasaki, D. (2023). On the conformability of regular line graphs. *RAIRO-Oper. Res.*, 57(2023):2527–2536.
- Hilton, A. e Hind, H. (1993). The total chromatic number of graphs having large maximum degree. *Discrete Mathematics*, 117(1):127–140.
- McDiarmid, C. J. H. e Sánchez-Arroyo, A. (1993). Total colouring regular bipartite graphs is NP-hard. *Discrete Mathematics*, 3:155–162.
- Sánchez-Arroyo, A. (1989). Determining the total colouring number is NP-hard. *Discrete Mathematics*, 36(1):315–319.
- Vizing, V. G. (1964). On an estimate of the chromatic class of a multigraph. *Diskret. Analiz.*, 3:8–10.