

Espectro do número de intervalo na convexidade $\vec{P}_3^*$

Álvaro da Silva Farias¹, Ana Karolinnia Maia¹, Nalbert Pietro da Costa²

¹Departamento de Computação – Universidade Federal do Ceará (UFC), Brasil

²Departamento de Matemática – Universidade Federal do Ceará (UFC), Brasil

alvarofarias@alu.ufc.br, karolmaia@ufc.br, nalbertpietro@gmail.com

Abstract. Given a graph $G = (V, E)$, the spectrum of a given parameter in the graph is the set of values this parameter assumes over all possible orientations of G . In this work, we present the spectrum of the interval number for the $\vec{P}_3$ convexity, denoted by $S_{\vec{P}_3}(G) = \{\overrightarrow{in}_{\vec{P}_3}(D) \mid D \text{ is an orientation of } G\}$. We prove that this spectrum is continuous, meaning it forms an interval of consecutive integers. Furthermore, we explicitly determine the spectrum of the interval number for trees, paths, and cycles

Resumo. Dado um grafo $G = (V, E)$, o espectro de um determinado parâmetro no grafo é o conjunto de valores que este parâmetro assume em todas as orientações possíveis de G . Neste trabalho apresentamos o espectro do número de intervalo da convexidade $\vec{P}_3$, denotado por $S_{\vec{P}_3}(G) = \{\overrightarrow{in}_{\vec{P}_3}(G) \mid D \text{ é uma orientação de } G\}$, e mostramos que é contínuo, isto é, é um intervalo de inteiros. Além disso, calculamos explicitamente o espectro do número de intervalo para árvores, caminhos e ciclos.

1. Introdução

A teoria da convexidade em grafos é uma área que busca adaptar os conceitos de topologia e geometria contínua em um ambiente discreto. Naturalmente, o estudo da convexidade se estende aos grafos orientados. Dentre os vários tipos de convexidade estudados, as convexidades baseadas em caminhos, mais especificamente a convexidade $\vec{P}_3$, onde um vértice é gerado por um conjunto se possui vizinhança de entrada e vizinhança de saída neste conjunto, introduzida em [Erdős et al. 1972], será o foco deste trabalho.

Um dos principais parâmetros estudados na convexidade em grafos orientados é o *número de intervalo*, introduzido na convexidade geodésica [Harary et al. 1993], denotado por $in(G)$. Como todos os resultados apresentados são referentes a grafos orientados e especificamente na convexidade $\vec{P}_3$, será utilizado $\overrightarrow{in}(D)$, onde D é um grafo direcionado.

Na convexidade $\vec{P}_3$, a função de intervalo $\overrightarrow{I}_{\vec{P}_3}(u, v)$ retorna todos os vértices de D que pertencem a (u, v) -caminhos (ou (v, u) -caminhos) direcionados que possuem exatamente 3 vértices [Erdős et al. 1972]. Dado um subconjunto de vértices $S \subseteq V(D)$, se $\overrightarrow{I}_{\vec{P}_3}(S) = V(D)$, temos que S é um *conjunto de intervalo* de D . É possível obter vários conjuntos de intervalo e a cardinalidade mínima dentre todos os conjuntos de intervalo é o *número de intervalo* $\overrightarrow{in}(D)$.

*Parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) 88887.163297/2025-00 e por CNPq Tapioca 404479-2023-5

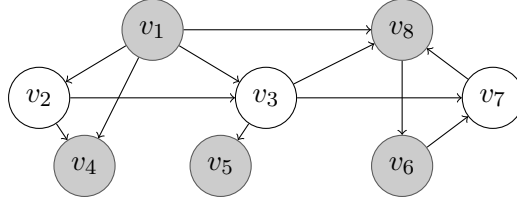


Figura 1. Os vértices em cinza formam um conjunto de intervalo com cardinalidade 5.

O espectro em um determinado parâmetro é o conjunto de valores que o parâmetro assume em todas as orientações possíveis de um grafo. O objetivo deste trabalho é analisar o espectro do *número de intervalo* na convexidade $\vec{P}_3$ denotado por $S_{\vec{P}_3}(G) = \{\vec{in}(D) \mid D \text{ é uma orientação de } G\}$. Dizemos que o espectro é contínuo quando o parâmetro assume todos os valores inteiros no intervalo entre o limite inferior e o limite superior.

2. Continuidade do espectro na convexidade $\vec{P}_3$

Dado um grafo G , se encontramos as orientações D^+ e D^- desse grafo que tornam o seu número de intervalo máximo e mínimo, respectivamente, gostaríamos de poder afirmar que existe uma orientação D_k que, para qualquer número inteiro k entre $\vec{in}(D^+)$ e $\vec{in}(D^-)$, faz que $\vec{in}(D_k) = k$, isto é, todos os inteiros no intervalo entre os elementos máximo e mínimo do espectro também pertencem ao espectro, assim o espectro é um intervalo de inteiros e dizemos que é *contínuo*.

Essa *continuidade* do espectro não acontece para todos os grafos em todas as convexidades, mas para qualquer grafo o espectro do número de intervalo na convexidade $\vec{P}_3$ é contínuo; para mostrar isso, utilizaremos o seguinte lema.

Lema 2.1. Se D é um grafo orientado e D' é uma orientação obtida ao inverter o sentido de exatamente um arco de D , então $|\vec{in}(D) - \vec{in}(D')| \leq 1$.

Demonstração. Seja S um conjunto de intervalo minimal no grafo orientado D e, assim, $\vec{in}_{\vec{P}_3}(D) = |S|$. Sendo, também, D' uma orientação obtida invertendo o arco $(u, v) \in A(D)$, logo $V(D') = V(D)$ e $A(D') = (A(D) - \{(u, v)\}) \cup \{(v, u)\}$ e S' um conjunto de intervalo minimal em D' .

Vamos mostrar que nos casos que $|S| \neq |S'|$ a diferença entre os números de intervalo é de 1.

Caso 1: $u, v \notin S$ ou $u, v \in S$

Note que S também é um conjunto de intervalo em D' , logo $\vec{in}(D') \leq \vec{in}(D)$. Suponha, então, que $|S'| < |S|$.

Temos, em D' , que todo vértice $w \in V(D')$, $w \in S'$ ou w possui um vizinho de entrada e um vizinho de saída em S' . E, também, não ocorrem os casos que $u, v \in S'$ e $u, v \notin S'$. De fato, nesses casos, S' também seria um conjunto de intervalo em D , o que é absurdo pela minimalidade de S .

Supondo, então, que $u \in S'$ e $v \notin S'$, assim, em D , para todo $w \in V(D) - \{v\}$, $w \in S'$ ou w possui um vizinho de entrada e um vizinho de saída que pertence a S' , logo

$S' \cup \{v\}$ é um conjunto de intervalo de D e, assim, $|S'| < |S| \leq |S' \cup \{v\}| = |S'| + 1$; portanto, $\vec{in}(D) = \vec{in}(D') + 1$. Vale notar ainda que, em D , v não pode ter vizinho de saída em S' , pois, caso ocorresse, S' seria conjunto de intervalo de D , o que é absurdo pela minimalidade de S . Essa observação é equivalente a dizer que u é o único vizinho de saída de v em D' .

Análogo ao parágrafo anterior, supondo $u \notin S'$ e $v \in S'$, temos que $S' \cup \{u\}$ é conjunto de intervalo em D e, portanto, $\vec{in}(D) = \vec{in}(D') + 1$.

Caso 2: $u \in S$ e $v \notin S$

Perceba que, sendo S' um conjunto de intervalo minimal em D' , pelo caso anterior, não precisamos fazer os casos que $u, v \in S'$ e $u, v \notin S'$ para evitar repetição.

Supondo $u \in S'$ e $v \notin S'$, temos que, se $|S'| < |S|$, então, para todo $w \in V(D) - (S' \cup \{v\})$ existem vizinho de entrada e vizinho de saída de w que pertence a S' , logo $S' \cup \{v\}$ é conjunto de intervalo de D e, assim, $|S'| < |S| \leq |S' \cup \{v\}| = |S'| + 1$; portanto, $\vec{in}(D) = \vec{in}(D') + 1$. Analogamente, se $|S| < |S'|$, então, para todo $w \in V(D') - (S \cup \{v\})$ existem vizinho de entrada e vizinho de saída de w que pertence a S , logo $S \cup \{v\}$ é conjunto de intervalo de D' e, assim, $|S| < |S'| \leq |S \cup \{v\}| = |S| + 1$; portanto, $\vec{in}(D') = \vec{in}(D) + 1$.

Com uma argumentação análoga a do paragrafo anterior, supondo que $u \notin S'$ e $v \in S'$, se $|S'| < |S|$, então $S' \cup \{u\}$ é conjunto de intervalo de D , portanto $\vec{in}(D) = \vec{in}(D') + 1$. E, se $|S| < |S'|$, então $S \cup \{u\}$ é conjunto de intervalo de D' , portanto, $\vec{in}(D') = \vec{in}(D) + 1$.

Caso 3: $u \notin S$ e $v \in S$

Está totalmente provado pelos casos anteriores. $\square$

O resultado da continuidade do espectro pode ser visto como um teorema a partir do resultado anterior, e está enunciado a seguir.

Teorema 2.1. *Para qualquer grafo, o espectro do número de intervalo na convexidade $\vec{P}_3$ é contínuo, isto é, se $k_1, k_2 \in S_{\vec{P}_3}(G)$ e $k_1 \leq k \leq k_2$, $k \in \mathbb{N}$, então $k \in S_{\vec{P}_3}(G)$.*

Ideia da demonstração. Quaisquer duas orientações de um grafo G podem ser obtidas, uma da outra, por uma sequência de mudanças de sentido de seus arcos e, assim, pelo Lema 2.1, o número de intervalo de orientações vizinhas nessa sequência só aumenta, ou diminui, em no máximo um. Com isso podemos provar o resultado por indução.

3. Limitantes do espectro do número de intervalo em árvores, caminhos e ciclos

Teorema 3.1. *Seja G um grafo com $n \geq 3$ vértices. O espectro do número de intervalo na convexidade $\vec{P}_3$, denotado por $S_{\vec{P}_3}(G)$, é um intervalo contínuo de inteiros definido da seguinte forma para classes abaixo:*

- **Para árvores T :** $S_{\vec{P}_3}(T) = \{in^-(T), \dots, n\}$, onde $in^-(T)$ é o menor valor do número de intervalo entre todas as orientações.
- **Para caminhos P_n :** $S_{\vec{P}_3}(P_n) = \{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil, \dots, n\}$.

- **Para ciclos C_n :** $S_{\vec{P}_3}(C_n) = \{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \dots, n-1\}$ se n for ímpar, e $S_{\vec{P}_3}(C_n) = \{\frac{n}{2}, \dots, n\}$ se n for par.

Demonstração. A demonstração divide-se na análise dos limites extremos para cada classe e, subsequentemente, na prova da continuidade do espectro entre esses limites.

1. **Limites Superiores:** Um vértice é extremo se ele é fonte, sumidouro ou transitivo [Chartrand et al. 2002]. Além disso, todos os vértices extremos em um grafo orientado conexo devem estar em um conjunto de envoltória [Gary et al. 2003]. Como árvores, caminhos e ciclos pares são grafos bipartidos [West 2001], é possível orientar suas arestas de modo que uma partição A do conjunto de vértices contenha apenas fontes e uma partição B contenha apenas sumidouros. Nessa orientação, todos os vértices são considerados extremos, portanto, $\vec{in}(D)_T = \vec{in}(D)_{P_n} = \vec{in}(D)_{C_{2k}} = n$. Por outro lado, por conta da paridade, ciclos ímpares não são bipartidos. É fácil ver que pelo menos um vértice no ciclo terá vizinho de entrada e um vizinho de saída para maximizar o número de vértices extremos, logo, obtemos $in(D)_{C_{2k+1}} = n-1$.
2. **Limites Inferiores:** Pela função de intervalo da convexidade $\vec{P}_3$ se o vértice v tem pelo menos um vizinho de saída e um vizinho de entrada no conjunto de envoltória S , $v \in S$. Consequentemente, os vértices que pertencem a $V(G) \setminus S$ formam, obrigatoriamente, um conjunto independente no grafo.
Para ciclos C_n , o tamanho máximo de um conjunto independente é $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, impondo um valor mínimo para o número de vértices que estão em um conjunto de envoltória de $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, limite este alcançado quando a orientação é um ciclo direcionado.
Para caminhos P_n , os vértices das extremidades são folhas, logo são vértices extremos e devem pertencer a um conjunto de envoltória S . Os $n-2$ vértices internos formam um subcaminho cujo maior conjunto independente tem tamanho $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$. Assim, o tamanho mínimo de S é $2 + (n-2) - \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, limite alcançado orientando o caminho para uma só direção.
3. **Continuidade do Espectro:** Pelo Teorema 2.1, temos de forma direta que o espectro para árvores, caminhos e ciclos são contínuos.

□

Referências

- Chartrand, G., Frederick Fink, J., and Zhang, P. (2002). Convexity in oriented graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 116(1):115–126.
- Erdős, P., Fried, E., Hajnal, A., and Milner, E. (1972). Some remarks on simple tournaments. *Algebra Universalis*, 2:238–245.
- Gary, C., Fink, J., and Ping, Z. (2003). The hull number of an oriented graph. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003.
- Harary, F., Loukakis, E., and Tsouros, C. (1993). The geodetic number of a graph. *Mathematical and Computer Modelling*, 17(11):89–95.
- West, D. (2001). *Introduction to Graph Theory*. Featured Titles for Graph Theory. Prentice Hall.