

Jogo Normal Partizan de Dominação nas Estrelas

João Marcos Brito¹, Edileudo Maciel M. Filho, Jeffer G. Maciel Paz, Rudini Sampaio

¹Dept. Computação – Universidade Federal do Ceará (DC-UFC) – Fortaleza – CE – Brazil

{jmbmaluno, edileudomaciel, jefterpaz}@alu.ufc.br, rudini@dc.ufc.br

Abstract. *The Domination game was introduced in 2010, and its normal variant was only proven PSPACE-complete in 2026. In this paper, we determine the winner of the Normal Partizan Domination game on the union of complete split graphs for any coloring of its vertices, which includes star forests.*

Resumo. *O Jogo de Dominação em grafos foi criado em 2010 e sua variante normal só foi provada PSPACE-completa em 2026. Nesse artigo, determinamos o vencedor do Jogo Normal Partizan de Dominação na união de grafos split completos para qualquer coloração dos vértices, incluindo florestas de estrelas.*

1. Introdução

Um subconjunto D de vértices de um grafo G é *dominante* se todo vértice tem vizinho em D ou está em D . Dizemos que um vértice u *domina* um vértice v se u e v são vizinhos ou $u = v$. No Jogo de Dominação sobre G , Alice e Bob se alternam escolhendo um vértice jogável, onde um vértice é *jogável* se domina pelo menos um vértice não dominado pelos vértices escolhidos anteriormente no jogo. O jogo termina quando o conjunto de vértices escolhidos é um conjunto dominante de G . Na variante normal, vence quem jogar por último. Na variante misère, perde quem jogar por último. Na variante de otimização, é dado um inteiro k e Alice vence se forem selecionados no máximo k vértices; senão, Bob vence. O menor inteiro k tal que Alice vence essa variante é o *número jogo de dominação* $\gamma_g(G)$. Note que $\gamma_g(G) \geq \gamma(G)$, onde o *número de dominação* $\gamma(G)$ é o tamanho do menor conjunto dominante de G . O Jogo de Dominação foi introduzido por [Brešar et al. 2010] na variante de otimização, que foi provada PSPACE-completa por [Brešar et al. 2016]. A variante normal foi provada PSPACE-completa por [Brito et al. 2026], que também provou que Alice vence em um caminho P_n (resp. ciclo C_n) se e só se o resto da divisão de n por 4 é diferente de 0 (resp. igual a 3).

O Jogo de Dominação é considerado um *jogo imparcial*, pois não há jogadas especiais para cada jogador, ou seja, em cada posição do jogo em um grafo, se Alice pode fazer uma certa jogada, Bob também poderia fazer a mesma se fosse a sua vez. Dizemos que um jogo é *partizan* se não é imparcial. Na variante partizan do Jogo Normal de Dominação, os vértices do grafo G já vem coloridos com A , B ou C , e Alice (resp. Bob) só pode selecionar vértices coloridos com a cor A (resp. B) ou C . Com exceção desta diferença, o jogo partizan tem a mesma dinâmica do jogo imparcial. Se todo vértice tem cor C , estamos no jogo imparcial. [Brito et al. 2026] provaram que o jogo normal partizan é PSPACE-completo e obtiveram algoritmo polinomial para decidir o vencedor do jogo partizan em caminhos e ciclos, para qualquer coloração possível dos vértices com cores A e B . Neste artigo, obtemos valores exatos do Jogo Normal de Dominação, tanto na variante imparcial como partizan, em uniões de grafos split completos, incluindo florestas de estrelas, para qualquer coloração dos vértices, obtendo algoritmos polinomiais para determinar o vencedor nesses grafos.

2. Um Pouco de Teoria dos Jogos Normais Partizan

Livros de Teoria dos Jogos Combinatórios, como [Berlekamp et al. 1982, Siegel 2013, Araújo et al. 2026], mostram uma teoria estabelecida para jogos normais, associando a cada posição de um jogo um número surreal, que faz parte de um conjunto numérico criado por [Conway 1976], contendo números racionais, mas também elementos diferentes, como $*$ (que é incomparável com 0), $\uparrow$ e $\downarrow$. Sabe-se que um número racional é surreal se e só se é um *diádico* (seu denominador é potência de 2, incluindo assim os inteiros). Grosso modo, seja s o número surreal de um jogo. Sabe-se que $s > 0$ (resp. $s < 0$) se Alice (resp. Bob) sempre vence, jogando primeiro ou não, que $s = 0$ se o primeiro a jogar perde e que $s || 0$ (incomparável a 0) se o primeiro a jogar vence.

A notação $\{X|Y\}$ descreve números surreais associados a jogos, onde X (resp. Y) é uma lista das opções de jogadas de Alice (resp. Bob). Por exemplo, no jogo vazio $0 = \{\}$, Alice e Bob não tem opções e então o primeiro a jogar perde. No jogo $1 = \{0|\}$ (resp. $-1 = \{|\}$), Alice (resp. Bob) vence obtendo o jogo 0 (sem jogadas para o adversário). Sabe-se que o jogo $1/2^{n+1}$ é igual a $\{0|1/2^n\}$ e que $-1/2^{n+1} = \{-1/2^n|0\}$. Na estrela $* = \{0|0\}$, o primeiro jogador vence, obtendo o jogo 0 e portanto $* || 0$.

A soma de jogos $J_1 + J_2$ é o jogo em que o próximo jogador faz um movimento em apenas um dos jogos J_1 ou J_2 . É fácil ver que soma de jogos é comutativa e associativa. Dado um jogo J , seja $n \cdot J$ a soma de n cópias disjuntas de J , seja $nJ* = * + n \cdot J$ e seja $-J$ um jogo tal que $J + (-J) = 0$ (o primeiro a jogar sempre perde na soma de J e $-J$).

Sejam $\uparrow = \{0|*\}$ e $\downarrow = \{*\|0\}$. Define-se recursivamente $\uparrow^{[n]}$ como $\uparrow^{[1]} = \uparrow$ e $\uparrow^{[n]} = \{\uparrow^{[n-1]} | *\}$ para $n \geq 2$. Analogamente, $\downarrow^{[1]} = \downarrow$ e $\downarrow^{[n]} = \{*\| \downarrow^{[n-1]}\}$ para $n \geq 2$. Sabe-se que $\uparrow^{[n]} = -\downarrow^{[n]}$, $\uparrow^{[n+1]} > \uparrow^{[n]} > 0$, $\downarrow^{[n+1]} < \downarrow^{[n]} < 0$, $\uparrow^{[n]} || * \text{ e } \downarrow^{[n]} || *$.

Quando $\{X|Y\}$ é imparcial, então $X = Y$. Nesses jogos, além de $*0 = 0 = \{\}$ e $*1 = * = \{0|0\}$, define-se recursivamente $*(n+1) = \{*0, *1, \dots, *n | *0, *1, \dots, *n\}$ para todo natural n , chamado *nimber*. Pela Teoria de Sprague-Grundy, tem-se que $*m + *n = *(m \oplus n)$, onde $\oplus$ é a operação de ou-exclusivo bit-a-bit. Além disso, se X é um conjunto de nimbers, então $\{X|X\}$ tem valor $\text{mex}(X)$, que é o menor nimber não pertencente a X . Por exemplo, $*1 + *2 + *3 = *(1 \oplus 2 \oplus 3) = *0 = 0$ e, portanto, o primeiro a jogar perde. Além disso, se $X = \{*0, *1, *2, *5\}$, então $\{X|X\} = \text{mex}(X) = *3$.

Proposição 1 ([Siegel 2013]).

$$\begin{aligned} \{0 | n \uparrow\} &= (n+1) \uparrow * \quad \text{e} \quad \{0 | n \uparrow *\} = (n+1) \uparrow \\ \{n \downarrow | 0\} &= (n+1) \downarrow * \quad \text{e} \quad \{n \downarrow * | 0\} = (n+1) \downarrow \end{aligned}$$

Teorema 2. Para todo inteiro $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \uparrow^{[n]} * &= \{0, \uparrow^{[n-1]} * | 0, \uparrow^{[n+1]} *\} = \{0, \uparrow^{[n-1]} * | 0\} \\ \downarrow^{[n]} * &= \{0, \downarrow^{[n+1]} * | 0, \downarrow^{[n-1]} *\} = \{0 | 0, \downarrow^{[n-1]} *\} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \uparrow^{[n]} * &= \left\{ 0, \{0, \uparrow^{[n]} * | 0, \uparrow^{[n]} *\} \mid 0, \{0, \uparrow^{[n]} * | 0, \uparrow^{[n]} *\} \right\} \\ \downarrow^{[n]} * &= \left\{ 0, \{0, \downarrow^{[n]} * | 0, \downarrow^{[n]} *\} \mid 0, \{0, \downarrow^{[n]} * | 0, \downarrow^{[n]} *\} \right\} \end{aligned}$$

3. Casos do Jogo de Dominação em Grafos Bipartidos Completos

No jogo partizan, os vértices do grafo já vem coloridos com A , B ou C , de modo que Alice (resp. Bob) só pode selecionar vértices de cor A (resp. B) ou C . Na variante imparcial, todo vértice tem cor C . A seguir, lidamos com qualquer coloração de grafos completos e algumas colorações de grafos bipartidos completos.

Proposição 3. *Em um grafo completo, o valor do Jogo de Dominação é 1 se todo vértice tem cor A , ou é -1 se todo vértice tem cor B , ou é $*$, caso contrário.*

Teorema 4. *Considere o Jogo de Dominação em um grafo bipartido completo $K_{s,t}$ com partes S e T tais que $|S| = s \geq 2$ e $|T| = t \geq 2$. Se todo vértice de $S \cup T$ tem cor A (resp. B), o valor do jogo é $\max\{s, t\}$ (resp. $-\max\{s, t\}$). Se tanto S como T têm pelo menos (i) um vértice de cor C ou (ii) um vértice de cor A e um vértice de cor B , então o valor é 0. Se todo vértice de S tem cor A (resp. B) e todo vértice de T tem cor B (resp. A), então o valor é 0.*

O caso dos grafos bipartidos completos em que uma parte só tem uma única cor entre A e B e a outra parte tem a cor C ou pelo menos duas cores é mais complicado. A próxima seção lida com o caso particular das estrelas, que são bipartidos completos $K_{1,n}$.

4. Jogo Normal de Dominação em Grafos Split Completos

Teorema 5. *No jogo normal imparcial (todo vértice de cor C) de dominação numa estrela $K_{1,n}$, o valor do jogo é $*$, se n é ímpar, e é $*2$ se n é par.*

Demonstração. Por indução em n . Note que $K_{1,1}$ tem valor $\text{mex}\{0\} = *$. Seja $n > 1$ e suponha valer para valores menores que n . Logo $K_{1,n}$ tem valor $\text{mex}\{0, K_{1,n-1}\}$. Se n é ímpar, $K_{1,n-1}$ tem valor $*2$ por indução e portanto $K_{1,n}$ tem valor $\text{mex}\{0, *2\} = *$. Se n é par, $K_{1,n-1}$ tem valor $*$ por indução e portanto $K_{1,n}$ tem valor $\text{mex}\{0, *\} = *2$. $\square$

Teorema 6. *Considere o jogo normal de dominação em uma estrela $K_{1,n}$ com a folhas de cor A , $b = n - a$ folhas de cor B e $n \geq 2$ tal que o vértice universal u tem cor A . Então o valor é $a - b$ se $b < a$, ou é $1/2^{b-a+1}$ se $b \geq a \geq 1$, ou é $(b-1) \cdot \uparrow *$ se b ímpar e $a = 0$, ou é $(b-1) \cdot \uparrow$ se b par e $a = 0$. No caso de vértice universal de cor B , o valor é $-J$, onde J é o valor trocando as cores A e B .*

Demonstração. Por indução em $n = a + b$. Suponha que a cor de u é A (o caso da cor B é análogo). Vamos representar o jogo como (a, b) . Se $(a, b) = (2, 0)$, então $(a, b) = \{0, 1\} = 2$. Se $(a, b) = (1, 1)$, então $(a, b) = \{0, *|1\} = 1/2$. Se $(a, b) = (0, 2)$, então $(a, b) = \{0|*\} = \uparrow$. Seja $n \geq 3$ e suponha valer para valores menores que n . Vamos provar para $n = a + b$. Note que, por indução e pela Proposição 1, onde $k \geq 2$ é inteiro:

- $(0, 2k-1) = \{0 \mid (0, 2k-2)\} = \{0 \mid (2k-3) \uparrow\} = (2k-2) \uparrow *$
- $(0, 2k) = \{0 \mid (0, 2k-1)\} = \{0 \mid (2k-2) \uparrow *\} = (2k-1) \uparrow$
- $(1, 2k-1) = \{0, (0, 2k-1) \mid (1, 2k-2)\} = \{(2k-1) \uparrow * \mid 1/2^{2k-2}\} = 1/2^{2k-1}$
- $(1, 2k) = \{0, (0, 2k) \mid (1, 2k-1)\} = \{(2k-1) \uparrow \mid 1/2^{2k-1}\} = 1/2^{2k}$

Suponha então que $a \geq 2$. Note que

- $(a, 0) = \{0, (a-1, 0)\} = \{a-1\} = a$
- $(a, a-1) = \{0, (a-1, a-1) \mid (a, a-2)\} = \{1/2 \mid 2\} = 1$

- $(a, a) = \{0, (a-1, a) \mid (a, a-1)\} = \{1/4 \mid 1\} = 1/2$
- $(a, a+1) = \{0, (a-1, a+1) \mid (a, a)\} = \{1/8 \mid 1/2\} = 1/4$

Se $b < a-1$ e $b > 0$, então

- $(a, b) = \{0, (a-1, b) \mid (a, b-1)\} = \{a-b-1 \mid a-b+1\} = a-b$

Se $b > a+1$, então

- $(a, b) = \{0, (a-1, b) \mid (a, b-1)\} = \{1/2^{b-a+2} \mid 1/2^{b-a}\} = 1/2^{b-a+1}$

□

Teorema 7. Considere o jogo normal de dominação em uma estrela $K_{1,n}$ com a folhas de cor A , $b = n - a$ folhas de cor B e $n \geq 1$ tal que o vértice universal tem cor C . Se $a = b$, o valor é $*2$. Se $|a - b| = 1$, o valor é $*$. Se $a \geq b + 2$, o valor é $\uparrow^{[a-b-1]} *$. Se $b \geq a + 2$, o valor é $\downarrow_{[b-a-1]} *$.

Demonstração. Por indução em $n = a + b$. Vamos representar o jogo como (a, b) . Se (a, b) é $(1, 0)$ ou $(0, 1)$, então temos o jogo $\{0 \mid 0\} = *$. Seja $n \geq 2$ e suponha valer para valores menores que n . Vamos provar que vale para $n = a + b$. Note que

- $(a, 0) = \{0, (a-1, 0) \mid 0\} = \{0, \uparrow^{[a-2]} * \mid 0\} = \uparrow^{[a-1]} *$
- $(0, b) = \{0 \mid 0, (0, b-1)\} = \{0 \mid 0, \downarrow_{[b-2]} *\} = \downarrow_{[b-1]} *$

por indução e pelo Teorema 2. Considere então que $a, b \geq 1$ e $a + b \geq 2$. Note que:

- $(a, a-2) = \{0, (a-1, a-2) \mid 0, (a, a-3)\} = \{0, * \mid 0, \uparrow^{[2]} *\} = \uparrow *$
- $(a, a-1) = \{0, (a-1, a-1) \mid 0, (a, a-2)\} = \{0, *2 \mid 0, \uparrow *\} = *$
- $(a, a) = \{0, (a-1, a) \mid 0, (a, a-1)\} = \{0, * \mid 0, *\} = *2$
- $(a, a+1) = \{0, (a-1, a+1) \mid 0, (a, a)\} = \{0, \downarrow * \mid 0, *2\} = *$
- $(a, a+2) = \{0, (a-1, a+2) \mid 0, (a, a+1)\} = \{0, \downarrow_{[2]} * \mid 0, *\} = \downarrow *$

Se $a \geq b + 3$, então

- $(a, b) = \{0, (a-1, b) \mid 0, (a, b-1)\} = \{0, \uparrow^{[a-b-2]} * \mid 0, \uparrow^{[a-b]} *\} = \uparrow^{[a-b-1]} *$

Se $b \geq a + 3$, então

- $(a, b) = \{0, (a-1, b) \mid 0, (a, b-1)\} = \{0, \downarrow_{[b-a-2]} * \mid 0, \downarrow_{[b-a]} *\} = \downarrow_{[b-a-1]} *$

□

Teorema 8. No jogo normal de dominação na estrela $K_{1,n}$ com a folhas de cor A , b folhas de cor B e $c = n - a - b \geq 1$ folhas de cor C tal que o vértice universal tem cor A : Se $a = 0$, o valor é $(n-1) \cdot \uparrow$ se n é par, e é $(n-1) \cdot \uparrow *$ se n é ímpar. Se $a > 0$, o valor é J se c é par, e é $J*$ se c é ímpar, onde J é o valor do jogo removendo as folhas de cor C . Se o vértice universal tem cor B , o valor é $-J$, onde J é o valor trocando as cores A e B .

Teorema 9. No jogo normal de dominação na estrela $K_{1,n}$ com a folhas de cor A , b folhas de cor B e $c = n - a - b \geq 1$ folhas de cor C tal que o vértice universal tem cor C e $a + b \geq 1$: Se c é par, o valor é o mesmo removendo folhas de cor C . Assuma c ímpar. Se $a = b$, o valor é $*$. Se $|a - b| = 1$, o valor é $*2$. Se $a \geq b + 2$, o valor é $\{0, \uparrow^{[a-b-1]} * \mid 0, \uparrow^{[a-b-1]} *\}$. Se $b \geq a + 2$, o valor é $\{0, \downarrow_{[b-a-1]} * \mid 0, \downarrow_{[b-a-1]} *\}$.

Teorema 10. Considere o jogo normal partizan de dominação em um grafo split completo G com partição (K, S) tal que K é uma clique e S é um conjunto independente. Se todo vértice de K tem cor A (resp. B), o jogo equivale ao jogo na estrela com centro de cor A (resp. B). Senão, o jogo equivale ao jogo na estrela com centro de cor C .

Referências

- Araújo, S., Martins, N., Nisse, N., and Sampaio, R. (2026). *Theory of Combinatorial Games in Graphs*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology (SUMAT), Springer Cham.
- Berlekamp, E. R., Conway, J. H., and Guy, R. K. (1982). *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, volume 1. Academic Press.
- Brešar, B., Klavžar, S., and Rall, D. F. (2010). Domination game and an imagination strategy. *SIAM J. Discrete Math.*, 24(3):979–991.
- Brešar, B., Dorbec, P., Klavžar, S., Košmrlj, G., and Renault, G. (2016). Complexity of the game domination problem. *Theoretical Computer Science*, 648:1–7.
- Brito, J. M., Marcilon, T., Martins, N. A., and Sampaio, R. M. (2026). The normal domination game in graphs. *J. Comput. Syst. Sci.*, 157:103751.
- Conway, J. H. (1976). *On numbers and games*. L.M.S. monographs ; no. 6. Academic Press, London.
- Siegel, A. N. (2013). *Combinatorial Game Theory*. Graduate studies in mathematics. American Math. Soc.