

Rotulação de arestas semiforte em grafos com grau máximo elevado

Luis G. S. Gonzaga¹, Christiane N. Campos¹

¹Instituto de Computação – Universidade de Campinas (Unicamp)
Campinas – SP – Brazil

luis.gonzaga@ic.unicamp.br, cnc@unicamp.br

Abstract. A neighbourhood-distinguishing edge-labelling assigns labels to the edges of a graph such that the sum of the labels of the edges incident with each vertex yields a proper colouring. The 1, 2, 3-Conjecture, due to Karoński, Łuczak, and Thomason, states that every graph without isolated edges admits a neighbourhood-distinguishing edge-labelling with labels in $\{1, 2, 3\}$. Although the conjecture was recently proven, efficiently computing such labellings remains an open problem. In this work, we present a polynomial-time algorithm to obtain neighbourhood-distinguishing edge-labellings for graphs with maximum degree at least $n - 2$.

Resumo. Uma rotulação de arestas semiforte atribui rótulos às arestas de um grafo de modo que a soma dos rótulos das arestas incidentes em cada vértice resulte em uma coloração própria. A Conjectura 1, 2, 3 (Karoński, Łuczak e Thomason) afirma que todo grafo sem arestas isoladas admite uma rotulação de arestas semiforte com rótulos em $\{1, 2, 3\}$. Embora recentemente provada, a construção eficiente de tais rotulações permanece um problema aberto. Neste trabalho, apresentamos um algoritmo em tempo polinomial para obter rotulações de arestas semifortes em grafos com grau máximo pelo menos $n - 2$.

1. Introdução

Seja G um grafo com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$. As cardinalidades de $V(G)$ e $E(G)$ são denotadas por n e m , respectivamente. Usamos $d(v)$ para denotar o grau de um vértice $v \in V(G)$ e $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$. O conjunto $N(v)$ de vizinhos de v é definido como $\{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$.

Para $\mathcal{L}$ um conjunto de rótulos e $\mathcal{C}$ um conjunto de cores, uma rotulação de arestas é um par (π, c_π) , tal que $\pi : E(G) \rightarrow \mathcal{L}$, $c_\pi : V(G) \rightarrow \mathcal{C}$ e $c_\pi(v) = \sum_{u \in N(v)} \pi(uv)$. Quando $c_\pi(u) \neq c_\pi(v)$ para todo par u e v de vértices adjacentes, c_π é chamada de coloração (própria) de vértices e diz-se que (π, c_π) é uma rotulação de arestas semiforte. Se $\mathcal{L} = \{1, \dots, k\}$, então (π, c_π) também é chamada de k -rotulação de arestas semiforte. O menor valor de k para o qual G admite uma k -rotulação de arestas semiforte é denotado por $\chi_\Sigma^e(G)$.

Rotulações de arestas semifortes foram introduzidas por [Karoński et al. 2004] como uma variação do problema de determinar o menor número de laços e/ou arestas paralelas que poderiam ser adicionados a um grafo a fim de torná-lo *irregular*, i.e., com todos os graus distintos. Em seu trabalho, os autores provaram a existência de uma 3-rotulação de arestas semiforte para grafos completos e grafos 3-coloráveis. Além disso,

propuseram a *Conjectura 1,2,3*, que afirma que todo grafo G sem arestas isoladas possui uma 3-rotulação de arestas semiforte. Note que grafos com arestas isoladas não admitem tais rotulações, uma vez que vértices incidentes em uma aresta isolada sempre compartilham a mesma cor em qualquer rotulação de arestas semiforte. Um grafo sem arestas isoladas é um *grafo comportado*.

[Addario-Berry et al. 2007] estabeleceram o primeiro limite superior para o problema, demonstrando que, para um grafo comportado G , $\chi_\Sigma^e(G) \leq 30$. No ano seguinte, [Addario-Berry et al. 2008] melhoraram o limite para $\chi_\Sigma^e(G) \leq 16$ e [Wang and Yu 2008] mostraram que $\chi_\Sigma^e(G) \leq 13$. Os limites mais significativos foram obtidos por [Kalkowski et al. 2009] e por, [Kalkowski et al. 2010]: em 2009, os autores provaram que $\chi_\Sigma^e(G) \leq 6$; e, em 2010, refinaram o limite para $\chi_\Sigma^e(G) \leq 5$, resultado que permaneceu como melhor limite conhecido até a resolução completa da conjectura por [Keusch 2024]. [Dudek and Wajc 2011] demonstraram que decidir se um grafo arbitrário admite uma 2-rotulação de arestas semiforte é um problema NP-completo; ademais, apenas grafos localmente irregulares – a saber, aqueles em que $d(u) \neq d(v)$ para quaisquer dois vértices adjacentes u e v – admitem 1-rotulações de arestas semifortes.

A Conjectura 1, 2, 3 foi provada por [Keusch 2024], por meio de uma abordagem atrelada ao corte máximo mas sem, contudo, exibir um algoritmo em tempo polinomial para construir a coloração. A despeito desse resultado, questões relevantes permanecem em aberto: projetar algoritmos polinomiais para construir 3-rotulações de arestas semifortes e identificar classes de grafos para as quais o terceiro rótulo seria desnecessário. Neste trabalho, apresentamos um algoritmo em tempo polinomial para encontrar uma 3-rotulação de arestas semiforte de grafos comportados com grau máximo pelo menos $n - 2$.

2. Resultados

Os resultados estão apresentados nos Teoremas 1 e 2. No primeiro teorema é construída, em tempo polinomial, uma 3-rotulação de arestas semiforte para todo grafo comportado com grau máximo $n - 1$, tais vértices são denominados *universais*. O Teorema 2 amplia o Teorema 1 ao considerar grafos comportados com grau máximo $n - 2$.

Teorema 1. *Seja G um grafo comportado com $\Delta(G) = n - 1$. Então, uma 3-rotulação de arestas semiforte para G pode ser encontrada em tempo polinomial.*

Demonstração. Sejam G um grafo comportado com um vértice universal u e $V(G) \setminus \{u\} = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Seja $\pi : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ tal que: $\pi(uv_i) = 3$, para todo i , $1 \leq i \leq n - 1$; e $\pi(v_i v_j) = 2$ para cada $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n - 1$. Definindo c_π de forma usual, vamos modificar π para que (π, c_π) seja uma 3-rotulação de arestas semiforte. Esse processo é realizado em duas etapas. No final da primeira etapa, a cor de u pode se repetir. Na segunda etapa, são feitos ajustes de modo a garantir que c_π seja uma coloração de vértices.

Inicialmente, atribuímos rótulos às arestas de G , garantindo que $c_\pi(v_i) \neq c_\pi(v_j)$ para todo $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n - 1$. Para cada v_k , $k \in [1, n - 1]$, em ordem crescente de índices, garantimos que os invariantes (i) a (v) a seguir sejam satisfeitos.

Dado um inteiro fixo k , para cada i, j e l , tal que $1 \leq i, j, l \leq n - 1$, $i \leq k \leq l$ e $j \leq k \leq l$: (i) se v_i e v_j são adjacentes, então $c_\pi(v_i) \neq c_\pi(v_j)$; (ii) $\pi(uv_i) \in \{2, 3\}$;

(iii) $\pi(v_i v_j) \in \{1, 2, 3\}$; (iv) $\pi(v_i v_l) = 2$; (v) $\pi(uv_k) = 3$. A validade desses ajustes segue por indução em k , cuja demonstração está omitida por limitação de espaço.

Os invariantes anteriores garantem que π possui as seguintes propriedades:

- (a) se $v_i v_j \in E(G)$, com $1 \leq i, j \leq n - 1$, então $c_\pi(v_i) \neq c_\pi(v_j)$ (pelo item (i));
- (b) não existem arestas incidentes a u com rótulo 1 (pelos itens (ii) e (v));
- (c) $\pi(uv_{n-1}) = 3$, porque uv_{n-1} nunca são alterados após sua atribuição inicial;
- (d) se $\pi(v_{n-1} v_j) = 1$, então $\pi(uv_j) = 3$;
- (e) se $\pi(v_{n-1} v_j) = 3$, então $\pi(uv_j) = 2$.

Dessa forma, resta mostrar que é possível alterar π de modo a garantir que $c_\pi(u) \neq c_\pi(v_i)$ para todo i , $1 \leq i \leq n - 1$, mantendo a propriedade de que $c_\pi(v_i) \neq c_\pi(v_j)$ para todo $v_i v_j \in E(G)$.

Renomeie os vértices de $V(G) \setminus \{u\}$ como $x_1, \dots, x_{n-1}$, de forma que $c_\pi(x_i) \leq c_\pi(x_j)$ sempre que $i \leq j$. Se $c_\pi(u) \neq c_\pi(x_i)$ para todo $i \in [1, n - 1]$, então o resultado segue. Portanto, suponha que exista $t \in [1, n - 1]$ tal que $c_\pi(u) = c_\pi(x_t)$. Mostramos que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $c_\pi(u) - l$ é uma cor que não ocorre em c_π ou que esta propriedade pode ser obtida após alterar os rótulos de algumas arestas incidentes em v_{n-1} . Para isso, consideramos dois casos, dependendo da existência de i , $1 \leq i < t$, tal que $c_\pi(x_i) + 2 \leq c_\pi(x_{i+1})$. Isto é, a existência de uma cor no intervalo $[c_\pi(x_i), c_\pi(x_{i+1})]$, que não ocorre em nenhum vértice.

Caso 1. Existe x_i , $i \in [1, t - 1]$, tal que $c_\pi(x_i) + 2 \leq c_\pi(x_{i+1})$.

Pela hipótese, $c_\pi(x_{i+1}) - 1$ não ocorre em nenhum vértice. Escolha o maior $i \in [1, t - 1]$ satisfazendo a hipótese. Pela escolha de i e pela forma como os vértices em $V(G) \setminus \{u\}$ foram renomeados, para todo l , $i + 1 \leq l \leq t$, temos $c_\pi(x_l) \in \{c_\pi(x_{l+1}), c_\pi(x_{l+1}) - 1\}$. Seja $\alpha = c_\pi(x_t) - (c_\pi(x_{i+1}) - 1)$. Por definição, α é o número de cores no intervalo $[c_\pi(x_{i+1}), c_\pi(x_t)]$.

Suponha $i \geq \alpha$. Para cada j , $1 \leq j \leq \alpha$, decrementamos o rótulo de ux_j em uma unidade, o que significa que o novo valor para $c_\pi(u)$ é $c_\pi(u) - \alpha = c_\pi(u) + c_\pi(x_{i+1}) - c_\pi(x_t) - 1 = c_\pi(x_{i+1}) - 1$. Por construção, cada vértice x_l , $l > \alpha$, tem suas cores inalteradas. Por outro lado, para x_l , $1 \leq l \leq i$, $c_\pi(x_l)$ é decrementada em uma unidade, não interferindo na cor originalmente disponível $c_\pi(x_{i+1}) - 1$. Observe, ainda que, pelo item (ii), todas as arestas cujos rótulos foram alterados tinham rótulo 2 ou 3 e, portanto, podiam, de fato, terem sido decrementadas. Além disso, para todo $1 \leq j, l \leq \alpha$, $|c_\pi(x_l) - c_\pi(x_j)|$ permanece inalterado, uma vez que tanto x_l quanto x_j foram alterados.

O raciocínio para o caso $i < \alpha$ é semelhante. Decrementamos $c_\pi(x_j)$ em uma unidade para todo j , $1 \leq j \leq \alpha + 1$. No entanto, neste caso, as arestas ux_i e ux_{i+1} também são decrementadas. Assim, a cor $c_\pi(x_{i+1}) - 1$, originalmente disponível, será a nova cor de x_{i+1} , e a cor $c_\pi(x_{i+1}) - 2$ torna-se uma cor disponível. O novo valor para $c_\pi(u)$, então, é $c_\pi(u) - (\alpha + 1) = c_\pi(x_{i+1}) - 2$, que está disponível.

Caso 2. Não existe x_i , $i \in [1, t - 1]$, tal que $c_\pi(x_i) + 2 \leq c_\pi(x_{i+1})$.

A hipótese desse caso significa que, para todo i , $2 \leq i \leq t$, temos que $c_\pi(x_{i-1}) + 2 > c_\pi(x_i)$. Isso implica que ou $c_\pi(x_{i-1}) = c_\pi(x_i) - 1$ ou $c_\pi(x_{i-1}) = c_\pi(x_i)$, ou seja, $c_\pi(x_i) - 1 \leq c_\pi(x_{i-1}) \leq c_\pi(x_i)$. Consideramos dois casos, dependendo se $t = n - 1$.

Suponha que $t \neq n - 1$. Como $x_t \neq x_{n-1}$ e $c_\pi(x_t) = c_\pi(u)$, concluímos que $c_\pi(u) < c_\pi(x_1) + (n - 2)$. Portanto, podemos decrementar em uma unidade o rótulo de cada aresta ux_j , $1 \leq j \leq n - 1$. Note que a nova cor de x_1 é $c_\pi(x_1) - 1$, que ainda é a menor cor entre todos os x_i , $1 \leq i \leq n - 1$. Além disso, a nova cor de u é $c_\pi(u) - (n - 1)$. Como $c_\pi(u) - (n - 1) < c_\pi(x_1) - 1$ e $c_\pi(x_i) \neq c_\pi(x_j)$ para todo $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n - 1$, concluímos que c_π é uma coloração própria e o resultado segue.

Considere, agora, que $t = n - 1$. Neste caso, $c_\pi(u) = c_\pi(x_{n-1}) = c_\pi(x_1) + (n - 2)$, pois $c_\pi(u) \leq c_\pi(x_1) + (n - 2)$ e, caso $c_\pi(u) < c_\pi(x_1) + (n - 2)$, podemos decrementar toda aresta incidente em u para que $c_{\pi'}(u) < c_{\pi'}(x_1)$. Esse é um cenário muito restrito, no qual a cor de cada vértice x_i , para $1 \leq i \leq n - 1$, é única e consecutiva de acordo com a ordem dos índices. Para abordá-lo, modificamos a cor do vértice v_{n-1} (note que v_{n-1} pode ser diferente de x_{n-1}) de modo a reduzi-la ao Caso 1 ou ao caso em que $t \neq n - 1$.

Por construção, $\pi(uv_{n-1}) = 3$. Além disso, para todo $v_i \in N(v_{n-1})$, temos $\pi(uv_i) = 3$ se $\pi(v_iv_{n-1}) = 1$, e $\pi(uv_i) = 2$ se $\pi(v_iv_{n-1}) = 3$. Seja $V^+(v_{n-1}) = \{v_i : v_iv_{n-1} \in E(G), i < n - 1 \text{ e } \pi(uv_i) = 3\}$ e $V^-(v_{n-1}) = \{v_i : v_iv_{n-1} \in E(G), i < n - 1 \text{ e } \pi(uv_i) = 2\} \cup \{u\}$. Defina $I_{VP}(v_{n-1}) = [c_\pi(v_{n-1}) - |V^-(v_{n-1})|, c_\pi(v_{n-1}) + |V^+(v_{n-1})|]$. O intervalo $I_{VP}(v_{n-1})$ representa os valores que a cor de v_{n-1} pode assumir por meio da alteração dos rótulos das arestas v_iv_{n-1} e v_iu , para $v_i \in V^+(v_{n-1}) \cup V^-(v_{n-1})$, sem violar os itens (i) e (ii) dos invariantes. Consequentemente, $|I_{VP}(v_{n-1})| = |N(v_{n-1})| + 2$, o que implica que existe uma cor possível que não foi atribuída a nenhum vizinho de v_{n-1} . Modificamos π para π' , seguindo as regras para incrementar e decrementar $c_\pi(v_{n-1})$ como anteriormente com os conjuntos $V^-(v_{n-1})$ e $V^+(v_{n-1})$, de modo a respeitar o item (ii) dos invariantes e minimizando o número de alterações, para que v_{n-1} receba esta cor.

Se $c_{\pi'}(v_{n-1}) > c_\pi(v_{n-1})$, então $c_{\pi'}(u)$ diminui na mesma proporção, de modo que $c_{\pi'}(u) < c_\pi(x_1) + (n - 2)$, e o caso em que $t \neq n - 1$ se aplica. Se $c_{\pi'}(v_{n-1}) < c_\pi(v_{n-1})$, três subcasos são possíveis:

- (a) a cor de u aumenta — como $c_\pi(u) = c_\pi(x_{n-1})$ é a cor máxima, $c_{\pi'}(u)$ torna-se única em π' , e o resultado segue;
- (b) a cor de u permanece inalterada — a minimização do número de alterações implica que duas arestas incidentes em v_{n-1} têm seus rótulos decrementados, sendo uv_{n-1} uma delas, e para algum vértice x_i o rótulo de ux_i é incrementado, de forma que nenhum vértice herda a cor $c_\pi(v_{n-1})$ em π' , criando uma lacuna entre $c_{\pi'}(x_l)$ e $c_{\pi'}(x_{l+1})$ que permite aplicar o Caso 1;
- (c) A cor de u diminui — pela mesma minimização, apenas uv_{n-1} tem seu rótulo alterado, e se $v_{n-1} = x_1$ surge uma lacuna entre $c_{\pi'}(x_1)$ e $c_{\pi'}(x_2)$, que recai no Caso 1, ao passo que se $v_{n-1} \neq x_1$ obtém-se $c_{\pi'}(u) < c_\pi(x_1) + (n - 2)$, recaindo no caso em que $t \neq n - 1$. Como o grafo é comportado, $x_1 \neq x_{n-1}$, o que garante que todos os subcasos estão cobertos. $\square$

O Teorema 2 estende o Teorema 1 para o caso $\Delta(G) = n - 2$, caso em que a ausência de um vértice universal impõe a análise de um vértice w , não adjacente a u de grau máximo, exigindo que os invariantes de coloração sejam mantidos simultaneamente para u e w ao longo da indução, o que multiplica a análise em casos e subcasos.

Teorema 2. *Seja G um grafo comportado com n vértices e $\Delta(G) = n - 2$. Então, uma 3-rotulação de arestas semiforte para G pode ser encontrada em tempo polinomial.* $\square$

Referências

- Addario-Berry, L., Dalal, K., McDiarmid, C., Reed, B. A., and Thomason, A. (2007). Vertex-colouring edge-weightings. *Combinatorica*, 27(1):1–12.
- Addario-Berry, L., Dalal, K., and Reed, B. A. (2008). Degree constrained subgraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 156(7):1168–1174.
- Dudek, A. and Wajc, D. (2011). On the complexity of vertex-coloring edge-weightings. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 13(3):45–50.
- Kalkowski, M., Karonski, M., and Pfender, F. (2009). Vertex colouring edge weightings with integer weights at most 6. In *Rostock. Math. Kolloq*, volume 64, pages 39–43. Citeseer.
- Kalkowski, M., Karoński, M., and Pfender, F. (2010). Vertex-coloring edge-weightings: towards the 1-2-3-conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 100(3):347–349.
- Karoński, M., Łuczak, T., and Thomason, A. (2004). Edge weights and vertex colours. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 91(1):151–157.
- Keusch, R. (2024). A solution to the 1-2-3 conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 166:183–202.
- Wang, T. and Yu, Q. (2008). On vertex-coloring 13-edge-weighting. *Frontiers of Mathematics in China*, 3(4):581–587.