

Uma Aproximação FPT Linear para o Problema da Cobertura Mínima por Varredura*

Lehilton Lelis Chaves Pedrosa¹, Lucas de Oliveira Silva^{1†}

¹ Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Campinas – SP – Brasil

{lehilton,lucas.oliveira.silva}@ic.unicamp.br

Abstract. *The Minimum Scan Cover (MSC) problem schedules pairwise communication among a satellite swarm using directional antennas. Satellites are points in the Euclidean space, and alignment costs are proportional to the rotation angles. The goal is to minimize the total time to complete the connections described as edges of an input graph. Approximating MSC within a constant factor is NP-hard, even in the 1D case; thus, we resort to treewidth parameterization. For 1D instances, we provide an exact linear FPT algorithm. For 2D, we introduce the minimum non-zero neighbor-switching angle as a second parameter to design a linear FPT 2-approximation.*

Resumo. *O problema da Cobertura Mínima por Varredura (MSC) escalona as comunicações par-a-par em enxames de satélites usando antenas direcionais. Satélites são pontos no espaço Euclidiano e os custos de alinhamento são proporcionais aos ângulos de rotação. O objetivo é minimizar o tempo total necessário para completar as conexões descritas como arestas de um grafo de entrada. Aproximar o MSC por um fator constante é NP-difícil, mesmo no caso 1D; portanto, recorremos a uma parametrização pela largura arbórea. Para instâncias 1D, fornecemos um algoritmo exato de tempo FPT linear. Para 2D, introduzimos o ângulo mínimo não nulo de troca entre vizinhos como segundo parâmetro para projetar uma 2-aproximação de tempo FPT linear.*

1. Introdução

Desafios de otimização em robótica de enxames frequentemente giram em torno da comunicação eficiente sob restrições físicas. No contexto de enxames de satélites, estabelecer uma rede de comunicação confiável é crítico para tarefas como o controle de topologia, a agregação de dados e as verificações periódicas de saúde (*health checks*). No entanto, devido à alta atenuação do sinal em transmissões omnidirecionais no espaço sideral, os satélites dependem de antenas direcionais que exigem alinhamento preciso entre o transmissor e o receptor [Lutz 1997]. Consequentemente, o tempo de comunicação não é instantâneo, mas dominado pelo direcionamento mecânico ou eletrônico de feixes para estabelecer *links*. O problema da Cobertura Mínima por Varredura (MSC), introduzido

*Apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo 2023/12529-8, e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processos #312271/2023-9 e #404315/2023-2.

†Autor correspondente.

por Fekete et al. [Fekete et al. 2021], modela o escalonamento dessas comunicações par-a-par. Diferentemente de cenários de *broadcasting*, em que a informação se propaga de uma fonte a todos os demais, o MSC requer apenas a satisfação de um conjunto prescrito de *links* de comunicação, especificados pelas arestas de um grafo de entrada. O objetivo é minimizar o tempo total necessário para completar todas as conexões, supondo que os satélites tenham posições estáticas, mas possam rotacionar suas antenas. A função de custo é dada pelo tempo gasto em ajustes angulares para alinhar as antenas. Para uma exploração mais abrangente do MSC e de outros problemas relacionados ao controle do enxame de robôs, consulte a tese de doutorado de Krupke [Krupke 2022] e a dissertação de mestrado de Silva [de Oliveira Silva 2025].

Como Fekete et al. observaram, o MSC em 1D e 2D está intimamente ligada à coloração de grafos [Fekete et al. 2021]. Em particular, eles mostraram que, dada uma instância de MSC com grafo G , o tempo ótimo total para concluir todas as comunicações é $\Theta(\log \chi(G))$. Surpreendentemente, usando essas conexões, eles mostraram que uma aproximação de fator constante para o MSC implicaria $P = NP$, mesmo em 1D. Para instâncias 2D, demonstraram que encontrar uma solução com fator de aproximação menor que $3/2$ é NP-difícil, mesmo para grafos bipartidos. Apesar dessas dificuldades, eles propuseram algoritmos de aproximação com garantias de desempenho que dependem do número cromático. Especificamente, eles apresentaram uma $\frac{9}{2}$ -aproximação para grafos bipartidos, que estenderam para uma $O(\gamma)$ -aproximação, com $\gamma \geq 1$, quando G é dado juntamente à uma k -coloração própria de seus vértices, em que $k \leq \chi(G)^\gamma$.

Neste trabalho, apresentamos resultados para o MSC em 1D e em 2D. Para 1D, apresentamos um algoritmo FPT parametrizado pela largura arbórea de G . Uma possível extensão desse algoritmo para o caso 2D não parece viável e acreditamos que o MSC em 2D seja $W[1]$ -difícil, parametrizado pela largura arbórea. Em vez disso, introduzimos um parâmetro adicional, denotado por λ , que é o ângulo mínimo não nulo necessário para que um satélite rotacione sua antena do alinhamento com um satélite vizinho em G para o alinhamento com outro em G . Nós apresentamos uma 2-aproximação de tempo FPT linear, parametrizada pela largura arbórea de G e por $\lceil 1/\lambda \rceil$.

Devido a restrições de espaço, omitimos partes das provas dos resultados, mas o leitor pode consultar a dissertação de mestrado de Silva para uma exposição aprofundada [de Oliveira Silva 2025].

2. Definição do Problema

Uma instância de MSC, denotada por (P, G) , consiste em um conjunto $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ de pontos distintos em $\mathbb{R}^d$, em que cada $p_i \in P$ corresponde a um satélite, e em um grafo simples $G = (P, E)$ com $E \subseteq P \times P$. Os satélites podem rotacionar suas antenas livremente, e o tempo necessário para rotacioná-las é proporcional à variação do ângulo de orientação. Para cada instância (P, G) de MSC, podemos definir unicamente sua *função de custo* $\alpha: \{(e, e') \in E \times E \mid e \cap e' \neq \emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}^+$, onde $\alpha((u, v), (u, w))$ é o menor ângulo formado pelos segmentos $\overline{uv}$ e $\overline{uw}$, o que equivale a $\arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\|_2 \cdot \|y\|_2}\right)$, com $x = v - u$ e $y = w - u$. Note que todos os valores de α estão no intervalo $[0, \pi]$. Por fim, para um inteiro não negativo N , usamos a notação $[N] := \{0, 1, \dots, N\}$.

Uma solução para uma instância é uma função $S: E \rightarrow \mathbb{R}^+$, chamada *cobertura por varredura* (*scan cover*), que mapeia as arestas a instantes de tempo, de modo que,

para cada par de arestas adjacentes e e f , vale que $|\mathcal{S}(e) - \mathcal{S}(f)| \geq \alpha(e, f)$. O objetivo do MSC é encontrar uma cobertura por varredura $\mathcal{S}$ que minimize o *tempo de varredura*, definido como $\max_{e \in E} \mathcal{S}(e)$. Por simplicidade, assumimos que uma vez que todas as arestas incidentes a um satélite tenham sido varridas, ele cessa de rotacionar sua antena.

Quando o espaço Euclidiano subjacente tem dimensões 1 ou 2, referimo-nos às respectivas variantes do MSC, MSC1D e MSC2D. Note que uma cobertura por varredura é completamente definida por uma permutação das arestas, pois é mais eficiente rotacionar diretamente entre varreduras sucessivas, usando o ângulo mínimo. Além disso, para cada permutação das arestas $e_1, \dots, e_m$ de $E(G)$, a cobertura por varredura ótima varrendo as arestas nesta ordem pode ser recuperada da seguinte forma: $\mathcal{S}(e_1) = 0$ e $\mathcal{S}(e_i) = \max_{j < i \text{ e } e_i \cap e_j \neq \emptyset} \{\mathcal{S}(e_j) + \alpha(e_i, e_j)\}$ para $i > 1$.

3. Conjuntos de Pontos Unidimensionais

No caso 1D, os satélites estão posicionados ao longo da reta real $\mathbb{R}$ e se comunicam alternando as antenas entre apontar para a direção positiva e a negativa. Note que α pode assumir apenas os valores 0 e π . Além disso, sem perda de generalidade, supomos que toda cobertura por varredura ótima mapeia cada aresta em múltiplos de π e que, nesses instantes, cada antena de satélite está voltada para a direção positiva ou negativa.

Como, uma vez que todas as arestas incidentes a um vértice $p_i \in P$ tenham sido varridas, p_i cessa a rotação de sua antena, os fatos acima nos permitem mapear cada cobertura por varredura $\mathcal{S}$ de uma instância (P, G) de MSC1D, com tempo de varredura no máximo πN , onde $N \in \mathbb{N}$, para uma única função $h: P \rightarrow \{0, 1\}^{N+1}$. Para cada $p_i \in P$ e $j \in [N]$, se, no tempo πj , a antena de p_i está voltada para a direção positiva, então $h_j(p_i) = 0$; caso contrário, a antena está voltada para a direção negativa e $h_j(p_i) = 1$. Note que, em geral, esse mapeamento não é sobrejetor. Ainda assim, existe uma cobertura por varredura de tempo no máximo πN se e somente se existe uma função $h: P \rightarrow \{0, 1\}^{N+1}$ tal que, para cada aresta $p_i p_j \in E$, com $p_i < p_j$, existe um índice m tal que $h_m(p_i) = 0$ e $h_m(p_j) = 1$. De fato, o sentido direto decorre da definição de h : no instante em que p_i e p_j se comunicam, a antena do ponto à esquerda aponta para a direção positiva e a do ponto à direita, para a direção negativa. Para o sentido inverso, dada uma função h com essa propriedade, definimos, para cada aresta $e = p_i p_j$ com $p_i < p_j$, $\mathcal{S}_h(e) = \pi \cdot \min\{m \in [N] \mid h_m(p_i) = 0 \text{ e } h_m(p_j) = 1\}$. Mostremos que $\mathcal{S}_h$ é uma cobertura por varredura válida. Considere duas arestas adjacentes e e f com vértice comum p . Se os outros extremos de e e f estão do mesmo lado de p , então $\alpha(e, f) = 0$. Caso contrário, para varrer e e f , a antena de p deve apontar em direções opostas; portanto, os índices escolhidos pela definição de $\mathcal{S}_h(e)$ e $\mathcal{S}_h(f)$ não podem coincidir. Como esses índices são inteiros, segue que $|\mathcal{S}_h(e) - \mathcal{S}_h(f)| \geq \pi = \alpha(e, f)$.

Esse mapeamento conecta o MSC1D a uma variante do clássico problema de q -Coloração, que pergunta se um dado grafo pode ser colorido propriamente com q cores: cada vetor em $\{0, 1\}^{N+1}$ pode ser interpretado como uma “cor”. Assim, podemos ver h como uma coloração própria dos vértices de G , com cores em $\{0, 1\}^{N+1}$, com o requisito adicional de que, para cada aresta $p_i p_j \in E$, com $p_i < p_j$, existe um índice m tal que $h_m(p_i) = 0$ e $h_m(p_j) = 1$. Com isso, podemos adaptar o algoritmo FPT para q -Coloração, parametrizado pela largura arbórea k , que executa em tempo $q^k \cdot k^{O(1)} \cdot n$ [Cygan et al. 2015], para a versão de decisão do MSC1D, também

parametrizada por k . Precisamos apenas incorporar a restrição adicional sobre as cores atribuídas aos vértices adjacentes de G . Podemos verificar se duas cores diferentes podem ser atribuídas a um par de nós vizinhos em tempo $N^{O(1)}$: basta testar se há uma coordenada m em que a cor do vértice à esquerda tem valor 0 e a cor do vértice à direita tem valor 1. Esse custo é pago nas verificações de compatibilidade das arestas e acrescenta apenas o fator $N^{O(1)}$ ao tempo de execução da programação dinâmica; portanto, essa modificação pode ser adicionada mantendo ainda um tempo de execução FPT. Portanto, dada uma instância MSC1D (P, G) em que a largura arbórea de G é k e um limite de tempo de $O(\pi N)$, podemos decidir se existe uma cobertura por varredura de tempo no máximo $O(\pi N)$ em tempo $O((2^{N+1})^k \cdot N^{O(1)} \cdot k^{O(1)} \cdot n)$.

O Teorema 1 com o Lema 1 de Fekete et al. [Fekete et al. 2021] garante que, para qualquer instância MSC1D (P, G) onde $\chi(G) > 2$, existe uma cobertura por varredura de tempo de varredura πN para $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lceil \log_2 \chi(G) + 1/4 \log_2 \log_2 \chi(G) \rceil \leq N \leq \lceil \log_2 \chi(G) + 1/2 \log_2 \log_2 \chi(G) + 1 \rceil$. É fácil ver que, caso $\chi(G) \leq 2$, o MSC1D torna-se trivial. Caso contrário, aplicamos busca binária sobre os inteiros neste intervalo para estender o algoritmo da versão de decisão para a de otimização. Como é padrão na literatura, supomos que, junto com a instância de entrada, também recebemos uma decomposição arbórea *nice* de largura k do grafo de entrada G , com nós de introdução de aresta (consulte [Cygan et al. 2015] para uma definição de tal decomposição). Por fim, obtemos o seguinte lembrando que $\chi(G) \leq k + 1$ [Cygan et al. 2015].

Teorema 1. *Seja (P, G) uma instância do MSC1D em que G possui largura arbórea k . Então, pode-se computar uma cobertura por varredura ótima S em tempo $k^{O(k)} \cdot n$.*

4. Conjuntos de Pontos Bidimensionais

Consideramos agora o MSC2D. O maior grau de liberdade torna o problema significativamente mais difícil. De fato, enquanto o MSC1D pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos bipartidos, o MSC2D é NP-difícil de aproximar com fator de aproximação inferior a $3/2$ [Fekete et al. 2021]. A observação a seguir estabelece um limite superior para o tempo de varredura ótimo nas instâncias MSC2D, em função da largura arbórea G , o que é fundamental para o nosso algoritmo. A prova dessa observação segue do Teorema 5 de Fekete et al. [Fekete et al. 2021].

Observação 1. *Seja (P, G) uma instância MSC2D com tempo de varredura ótimo t^* . Se a largura arbórea de G é k , então $t^* \leq 3\pi \lceil \log_2(k + 1) \rceil$.*

Acreditamos que o MSC2D possa ser $W[1]$ -difícil quando parametrizado apenas pela largura arbórea, o que sugere que uma extensão simples do algoritmo exato para MSC1D é improvável. Em vez disso, introduzimos um parâmetro adicional e consideramos aproximações. Obtivemos uma 2-aproximação parametrizada pela largura arbórea k e por $\lceil 1/\lambda \rceil$, onde λ é o valor mínimo não nulo da função de custo α . Note que $\lambda \leq \pi$. Nosso algoritmo executa em tempo FPT linear.

Teorema 2. *Existe uma 2-aproximação para MSC2D, parametrizada pela largura arbórea k e por $\lceil 1/\lambda \rceil$, com tempo $\lambda^{-O(k^2 + \frac{k \log k}{\lambda})} \cdot (\log k)^{O(k^2)} \cdot n$.*

A ideia central do algoritmo é discretizar o espaço ao redor de cada satélite, permitindo apenas rotações que ocorram em múltiplos de um passo angular θ que depende de λ . Dessa forma, obtemos, inicialmente, uma solução para um problema relaxado, que tornamos válida para o problema original ao multiplicar por 2 todos os valores de tempo atribuídos às arestas.

5. Conclusão

Vários problemas em aberto permanecem para o MSC. Um primeiro passo seria remover a dependência de $\lceil 1/\lambda \rceil$ da aproximação parametrizada apresentada no Teorema 2, deixando apenas a largura arbórea, o que melhoraria o fator de aproximação para $1 + \epsilon$, ou propor um algoritmo FPT exato, caso seja possível. Paralelamente, para o MSC em 3D, fornecer quaisquer limites inferiores ou superiores não triviais é de grande interesse.

Referências

- Cygan, M., Fomin, F. V., Marx, D., Saurabh, S., Kowalik, L., Lokshtanov, D., and Pilipczuk, M. (2015). *Parameterized Algorithms*. Springer International Publishing, Cham, Switzerland.
- de Oliveira Silva, L. (2025). Algorithms for the freeze-tag and related swarm robotics problems. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Fekete, S. P., Kleist, L., and Krupke, D. (2021). Minimum scan cover with angular transition costs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 35(2):1337–1355.
- Krupke, D. M. (2022). *Algorithm Engineering for Hard Problems in Computational Geometry*. PhD thesis, Technische Universität Braunschweig.
- Lutz, H. (1997). Optical communications in space - twenty years of esa effort. [Online; acessado em Fevereiro de 2026 <https://www.esa.int/esapub/bulletin/bullet91/b91lutz.htm>].