Algoritmos eficientes para emparelhamentos desconexos em grafos cordais e grafos bloco

Bruno P. Masquio[1], **Paulo E. D. Pinto**[1*], **Jayme L. Szwarcfiter**[1,2*]

[1]Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

[2]Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

brunomasquio@gmail.com, pauloedp@ime.uerj.br, jayme@nce.ufrj.br

Abstract. *Graph matching problems are well studied and bring great contributions to Graph Theory from both the theoretical and practical points of view. There are numerous studies for unrestricted and weighted/unweighted matchings. More recently, subgraph-restricted matchings have been proposed, which consider properties of the subgraph induced by the vertices of the matching. In this paper, we approach one of these new proposals, disconnected matching, which seeks to study maximum matching, such that the subgraph induced by the matching vertices is disconnected. We have described efficient algorithms to solve the problem for chordal graphs and block graphs based on a theoretical characterization.*

1. Introdução

Um emparelhamento em grafos é um conjunto de arestas não adjacentes duas a duas. Os problemas de emparelhamentos máximos em grafos são amplamente estudados há décadas pela comunidade científica e já possuem diversos resultados e aplicações importantes.

Esses estudos abordam o problema de diversas formas, como, por exemplo, para grafos ponderados ou não, para classes de grafos específicas e para emparelhamentos restritos a subgrafos. Essa última abordagem, recentemente proposta, procura resolver o problema tal que certas propriedades de subgrafos induzidos pelos vértices de um emparelhamento sejam satisfeitas. Algumas dessas propriedades, por exemplo, é que esses subgrafos sejam 1-regulares, acíclicos, conexos ou desconexos. O problema do emparelhamento envolvendo essa última propriedade, ou seja, de que o grafo induzido pelos vértices do emparelhamento seja desconexo, estudado em [Masquio 2019] [Goddard et al. 2005], é o foco deste trabalho.

Neste artigo, introduzimos o problema para grafos em geral e apresentamos caracterizações do emparelhamento desconexo para grafos cordais e para algumas subclasses.

2. Emparelhamentos desconexos para grafos em geral

Apresentaremos a notação utilizada. Considere G um grafo e M um emparelhamento de G. Denotamos por $G[M]$, o subgrafo induzido de G pelos vértices incidentes às arestas de M. Os vértices incidentes a M são denominados M-saturados e os vértices de $G-M$, M-expostos. Além disso, usamos $M(G)$ para representar um emparelhamento máximo em G

*Projeto parcialmente financiado por FAPERJ.

e $\beta(G)$ para a sua cardinalidade. Analogamente, considere $M_d(G)$ um emparelhamento desconexo máximo e $\beta_d(G)$ a sua cardinalidade. Logo, $G[M_d(G)]$ é desconexo.

Um *grafo cordal* é aquele onde todo ciclo maior que 3 possui uma *corda*, ou seja, uma aresta unindo dois vértices não adjacentes do ciclo. Um *grafo split* é uma subclasse dos grafos cordais cujos vértices podem ser particionados em uma clique e um conjunto independente. Uma outra subclasse de grafos cordais, considerada neste trabalho, é a dos *grafos bloco*, nos quais todas as componentes biconexas são cliques.

Para todo par de vértices a e b de um grafo G, o conjunto de vértices S é um *separador de vértices* se a e b estão na mesma componente conexa de G e em componentes conexas distintas de $G - S$. Seja S um separador de vértices. Então, S é um *separador minimal* se não há um separador de vértices S' tal que $S' \subset S$. S é *separador composto* se $G - S$ possui pelo menos duas componentes conexas não triviais. Uma *articulação composta* é um separador composto de cardinalidade unitária. Observe que determinar um emparelhamento desconexo máximo de um grafo G pode ser simples quando o grafo possui uma das propriedades a seguir.

- Se G não possui separador composto, então G não possui emparelhamento desconexo. Observe que essa propriedade se aplica a grafos split, ou seja, essa classe não possui emparelhamentos desconexos.
- Se G é desconexo e contém mais de uma componente conexa não trivial, então $\beta(G) = \beta_d(G)$ e $M(G)$ também é $M_d(G)$.

Se G possuir uma única componente conexa não trivial C, então $\beta_d(G) = \beta_d(C)$ e $M_d(G)$ é $M_d(C)$. Assim, trataremos neste trabalho somente grafos conexos e não triviais.

Considerando r a menor cardinalidade de um separador composto de um grafo G, temos que $\beta_d(G) \geq \beta(G) - r$ [Goddard et al. 2005]. Mostraremos, a seguir, um método para determinar emparelhamentos desconexos máximos em um grafo geral.

Os separadores compostos são a chave para um algoritmo para obter emparelhamentos desconexos pois, se M é um emparelhamento desconexo, os vértices M-expostos formam um separador composto, que contém um separador composto minimal. Assim, se os separadores compostos minimais do grafo puderem ser enumerados em tempo polinomial, então $\beta_d(G)$ pode ser determinado em tempo polinomial. Basta considerar cada um dos separadores compostos S e, por sua vez, determinar um emparelhamento máximo em $G - S$, o que pode ser feito em tempo polinomial. Os emparelhamentos mencionados de maior cardinalidade são emparelhamentos desconexos máximos.

3. Emparelhamentos desconexos para grafos cordais

Considere um grafo cordal G, o qual possui, no máximo, $n - 1$ separadores de vértices minimais [Fulkerson and Gross 1965], que podem ser obtidos em tempo linear [Chandran 2001]. A partir do método para encontrar emparelhamentos desconexos máximos em grafos gerais, encontraríamos o separador composto minimal S que maximiza $\beta(G-S)$ e determina um emparelhamento desconexo máximo, que seria $M(G-S)$. Utilizando o algoritmo de [Micali and Vazirani 1980] para calcular cada emparelhamento em $O(m\sqrt{n})$, a implementação completa para determinar um emparelhamento desconexo máximo teria complexidade de tempo $O(nm\sqrt{n})$.

Apresentaremos a seguir um método que pode ser usado para construir um algoritmo mais eficiente, com complexidade de tempo $O(nm)$. Esse processo usará a representação em *clique tree* do grafo cordal, que é uma árvore cujos vértices correspondem às cliques maximais e as arestas, aos separadores de vértices minimais. Observe que os separadores compostos minimais correspondem a um subconjunto das arestas da clique tree. A Figura 1 ilustra, do lado esquerdo, um grafo cordal e, do direito, uma clique tree correspondente. A Figura 2 mostra dois emparelhamentos desconexos máximos do grafo da Figura 1, sendo o da esquerda relativo ao separador $\{2, 5\}$ e o da direita, $\{3, 5\}$.

A ideia para a obtenção do emparelhamento desconexo num grafo cordal é, então, examinar os emparelhamentos irrestritos máximos dos grafos obtidos a partir da remoção dos separadores e considerar o de maior cardinalidade, desde que seja um emparelhamento desconexo válido. Vamos mostrar um método de determiná-lo considerando um grafo cordal G representado por uma clique tree T.

Ao retirarmos a aresta (a, b) de T, a árvore será dividida em duas subárvores. A subárvore $T - (a, b)$ que contém o vértice a será chamada de A. Analogamente, B representa a outra subárvore. Se desconsiderarmos os vértices do separador (a, b), A e B representam, cada uma, pelo menos, uma componente conexa em G. Denotamos S_{AB} como o conjunto dos vértices de G que estão representados em A e não estão representados em B. Ou seja, consideramos todos os vértices representados em A e retiramos os vértices relativos ao separador (a, b), pois estes estão em B. Também vamos denotar $M_{a,b}$ e $M_{b,a}$ como dois emparelhamentos máximos dos subgrafos induzidos em G pelos vértices de S_{AB} e S_{BA}, respectivamente.

Note que, se os dois grafos induzidos de G pelos vértices de S_{AB} e de S_{BA} contêm, cada um, pelo menos uma componente conexa não trivial, então (a, b) representa um separador composto. Além disso, podemos dizer que $M_{a,b} > 0$, $M_{b,a} > 0$ e, portanto, $M_{a,b} \cup M_{b,a}$ é um emparelhamento desconexo de G. Se determinarmos $M_{a,b}$ e $M_{b,a}$ para todas as arestas (a, b) de T, então é possível determinar um emparelhamento desconexo máximo. Basta saber a aresta (a, b) que maximiza a soma $|M_{a,b}| + |M_{b,a}|$. Nesse caso, o emparelhamento desconexo máximo será $M_{a,b} \cup M_{b,a}$.

A partir do método descrito, é possível construir um algoritmo com complexidade de tempo $O(nm)$ para determinar emparelhamentos desconexos máximos. A idéia é fazer duas buscas em profundidade, onde a primeira percorre a clique tree das folhas à raiz, obtendo emparelhamentos do tipo $M_{a,b}$, e a segunda, da raiz às folhas, obtendo emparelhamentos do tipo $M_{b,a}$. O algoritmo e as provas podem ser obtidos em [Masquio 2019].

4. Emparelhamentos desconexos para grafos bloco

Vamos apresentar uma idéia do método que leva a um algoritmo mais eficiente para grafos bloco, com complexidade de tempo $O(m)$.

Sabemos que, em um grafo bloco B, u é um separador minimal se e somente se u é uma articulação. Portanto, $\beta(B) - 1 \leq \beta_d(B) \leq \beta(B)$. Definimos uma articulação composta livre v em B como uma articulação composta tal que $\beta(B - v) = \beta(B)$. Em outras palavras, se M é um emparelhamento máximo, v pode estar M-exposto. Nesse caso, podemos ver que $M(B - v)$ é um emparelhamento desconexo máximo.

Considere T uma clique tree que representa B. Podemos observar que os vértices

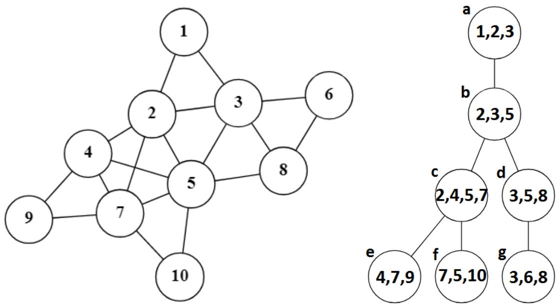

Figura 1: Um grafo cordal e uma clique tree correspondente

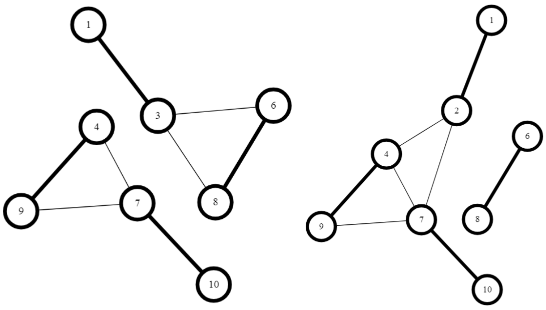

Figura 2: Emparelhamentos desconexos máximos do grafo da Figura 1

de T representam as componentes biconexas de B e as arestas, as articulações de B. Também é possível ver que todo vértice de B está representado em uma estrela de T.

A partir de características estruturais de T, é possível determinar todas as articulações compostas livres de B em tempo linear usando duas buscas em profundidade de forma semelhante às feitas para grafos cordais. No caso de grafos bloco, não é necessário construir emparelhamentos baseados em caminhos alternantes. Se houver alguma articulação composta livre v, podemos usar um algoritmo de emparelhamentos máximos para grafos bloco em $B - v$, com complexidade $O(m)$, resultando na complexidade total $O(m)$. Os algoritmos e as provas podem ser obtidos em [Masquio 2019].

Referências

Chandran, L. S. (2001). A linear time algorithm for enumerating all the minimum and minimal separators of a chordal graph. In Wang, J., editor, *Computing and Combinatorics*, p. 308–317, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.

Fulkerson, D. R. and Gross, O. A. (1965). Incidence matrices and interval graphs. *Pacific J. Math.*, 15(3):835–855.

Goddard, W., Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T., and Laskar, R. (2005). Generalized subgraph-restricted matchings in graphs. *Discrete Math.*, 293(1-3):129–138.

Masquio, B. P. (2019). Emparelhamentos desconexos. Master's thesis, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Disponível em https://github.com/BMasquio/papers/raw/master/MastersThesisBrunoMasquio.pdf.

Micali, S. and Vazirani, V. V. (1980). An O(sqrt(|V|)|E|) algorithm for finding maximum matching in general graphs. In *21st Ann. Symp. on Foundations of Comp. Sc.*, p. 17–27.