Um esquema de aproximação para um problema de empacotamento com cenários*

Y. G. F. Borges[1], T. A. de Queiroz[2], V. L. Lima[1], F. K. Miyazawa[1], L. L. C. Pedrosa[1]

[1]Instituto de Computação - Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Av. Albert Einstein, 1251 - 13083-852 - Campinas - SP - Brasil

`{glebbyo,fkm,lehilton}@ic.unicamp.br, vini.loti@gmail.com`

[2]Instituto de Matemática e Tecnologia - Universidade Federal de Goiás (UFG)
UFG-RC, 75704-020, Catalão-GO - Brasil

`taq@ufg.br`

Abstract. *We investigate a packing problem where each item has a weight and is associated with one or more scenarios, and all containers have a fixed capacity. A packing is an assignment of items to bins in a manner that the total weight of the items allocated to a bin for the same scenario does not exceed the capacity of the bin. The objective of the problem is to find a packing of all items into the bins that minimizes the maximum number of bins used in any given scenario. We present an asymptotic approximation scheme when the number of scenarios is bounded by a constant.*

Resumo. *Investigamos um problema de empacotamento onde cada item possui um peso e está associado a um ou mais cenários e todos os recipientes têm uma capacidade fixa. Um empacotamento é uma atribuição de itens a recipientes de maneira que o peso total dos itens alocados a um recipiente para um mesmo cenário não ultrapasse a capacidade do recipiente. O objetivo do problema é encontrar um empacotamento de todos os itens em recipientes, de maneira a minimizar o número máximo de recipientes usados em qualquer cenário. Apresentamos um esquema de aproximação assintótico quando o número de cenários é limitado por uma constante.*

1. Introdução

Um dos desafios atuais no desenvolvimento de algoritmos é modelar situações de incerteza que surgem em problemas do mundo real. Uma maneira de lidar com essa questão é modelar o problema por meio de possíveis cenários que representam situações incertas, considerando que apenas um dos cenários de fato ocorrerá. Para problemas de empacotamento, a versão com cenários foi introduzida por Bódis e Balogh (2018), que apresentaram algoritmos *online* com fator de aproximação para diferentes funções objetivo. Investigaremos uma destas versões, que pode ser definida como se segue. Cada item está associado a um ou mais cenários, possui um peso e deve ser empacotado em um recipiente. Todos os recipientes têm a mesma capacidade e o peso total dos itens de um mesmo cenário em um mesmo recipiente não pode ultrapassar a capacidade do recipiente. O objetivo é minimizar o número de recipientes usados no pior cenário. Uma definição formal é dada a seguir.

*Pesquisa financiada pela FAPESP, processos #2015/11937-9, #2017/11831-1, #2016/01860-1 e #2016/23552-7, e CNPq, processos #314366/2018-0, #425340/2016-3 e #313026/2017-3.

Problema de Empacotamento com Cenários (PEC). São dados um conjunto de itens $I = \{1, \ldots, n\}$, cada item $i \in I$ com peso $s_i > 0$, recipientes de capacidade C, um conjunto de cenários $\mathcal{S} = \{1, \ldots, d\}$ e um subconjunto $S_k \subseteq I$, para cada $k \in \mathcal{S}$. O objetivo é encontrar uma partição $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_r\}$ de I, tal que para cada $B_j \in \mathcal{B}$ e $k \in \mathcal{S}$, $\sum_{i \in B_j \cap S_k} s_i \leq C$ e $\max_{k \in \mathcal{S}} |\{B \in \mathcal{B} : B \cap S_k \neq \emptyset\}|$ seja mínimo.

Sem perda de generalidade, vamos presumir que a capacidade de todos os recipientes é 1 e o peso dos itens é escalado apropriadamente. O empacotamento é representado pela partição $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_r\}$ e cada parte B_j representa os itens empacotados no recipiente j. Como no final ocorrerá apenas um cenário, para que B_j seja uma parte viável, basta que a soma dos pesos dos itens de B_j pertencentes a um mesmo cenário esteja limitada à capacidade do recipiente. No restante desta seção, apresentamos alguns resultados da literatura para contextualizar a complexidade computacional e as contribuições deste trabalho. Na próxima seção, apresentamos um esquema de aproximação assintótico para o PEC e as ideias envolvidas na demonstração. Por fim, apresentamos a bibliografia utilizada.

O Problema de Empacotamento (PE), que pode ser definido como um caso particular do PEC onde há apenas um cenário, é um dos problemas mais investigados na literatura sob diversas abordagens e técnicas. O PE não só é NP-difícil, mas também é APX-difícil. Mais especificamente, não há algoritmo de aproximação com fator de aproximação menor que $1{,}5$, a menos que P = NP. Por ser um caso especial do PEC, estes resultados negativos também valem para o PEC. Por outro lado, Fernandez de la Vega e Lueker (1981) apresentaram um esquema de aproximação assintótico, i.e., para cada constante $\varepsilon > 0$, apresentaram um algoritmo de tempo polinomial A_ε, tal que $\limsup_{n\to\infty} \sup_I \{A_\varepsilon(I)/\mathrm{opt}(I) : \mathrm{opt}(I) = n\} \leq 1 + \varepsilon$, onde $A_\varepsilon(I)$ (resp. $\mathrm{opt}(I)$) é o número de recipientes usados no empacotamento produzido por A_ε (resp. em um empacotamento ótimo) para a instância I. Mais precisamente, Fernandez de la Vega e Lueker (1981) obtiveram um esquema de aproximação de tempo polinomial de maneira que $A_\varepsilon(I) \leq (1+\varepsilon)\mathrm{opt}(I)+1$, para toda instância I. Note que a existência de um esquema de aproximação assintótico para um problema NP-difícil tem um grande impacto no estudo da complexidade computacional do problema, uma vez que indica que é possível se obter, assintoticamente, algoritmos de tempo polinomial que obtêm soluções com valores tão próximos do valor ótimo quanto se queira. Para mais detalhes sobre este problema, veja os trabalhos de Coffman et al. (1984, 2013) e Christensen et al. (2017) para algoritmos de aproximação, de Delorme et al. (2016) para algoritmos exatos e de Dyckhoff (1990) e Wäscher et al. (2007) para uma revisão geral sobre problemas de corte e empacotamento.

Versões dos problemas de empacotamento com cenários foram motivadas principalmente pelos problemas de escalonamento de tarefas com cenários. Os problemas de escalonamento de tarefas apresentam características próximas dos problemas de empacotamento e muitas vezes coincidem quando escritos na versão de decisão. Feuerstein et al. (2017) propuseram vários algoritmos de aproximação e limitantes para os fatores de aproximação na versão com duas máquinas. O PEC foi proposto por Bódis e Balogh (2018) no contexto de algoritmos online considerando as aplicações dos problemas de escalonamento de tarefas em cenários, propostos por Feuerstein et al. (2017).

1.1. Agrupamento Linear para o Problema de Empacotamento

Antes de apresentar as ideias do algoritmo, vamos considerar o esquema de aproximação assintótico apresentado por Fernandez de la Vega e Lueker (1981) para o Problema de Empacotamento, que denotaremos por VL_ε. O algoritmo divide a lista I dos itens de entrada em duas partes, uma de itens “grandes”, $G = \{i \in I : s_i > \varepsilon\}$, que tem itens com peso maior que ε, e outra do itens “pequenos”, $P = I \setminus G$.

Para os itens grandes, aplica-se a técnica de *agrupamento linear*, que consiste em ordenar os itens em G em ordem não-crescente de peso e subdividi-los em $N + 1$ grupos $G_0, \ldots, G_N$, onde N é constante. Os grupos têm tamanhos iguais a $\lfloor \varepsilon^2 |G| \rfloor$, exceto possivelmente o último grupo, que pode ter tamanho menor. Denote por $\overline{G}_i$ a lista de itens obtida a partir de G_i, trocando-se o peso de cada item pelo maior peso em G_i. Para obter um empacotamento de G, empacota-se cada item de G_0 em um recipiente, totalizando no máximo $\lfloor \varepsilon^2 |G| \rfloor \leq \varepsilon \sum_{i \in G} s_i \leq \varepsilon \mathrm{opt}(I)$ recipientes e, para obter um empacotamento de $G' := G_1 \cup \ldots \cup G_N$, obtém-se primeiro um empacotamento para $\hat{G} := \overline{G}_1 \cup \ldots \cup \overline{G}_N$. Depois, esse empacotamento é usado para empacotar G', uma vez que cada item de G' tem um mapeamento a um item de $\hat{G}$ com peso maior ou igual. Como $\hat{G}$ possui apenas itens grandes e número de itens de pesos distintos limitado por uma constante, é possível obter um empacotamento ótimo de $\hat{G}$ em tempo polinomial. Além disso, é possível obter um mapeamento $\phi : \hat{G} \to G$ tal que $s_i \leq s_{\phi(i)}$, para todo $i \in \hat{G}$ e, com isso, temos que $\mathrm{opt}(\hat{G}) \leq \mathrm{opt}(G) \leq \mathrm{opt}(I)$. Portanto, é possível obter um empacotamento $\mathcal{P}_G$ de G tal que $|\mathcal{P}_G| \leq (1 + \varepsilon)\mathrm{opt}(I)$.

Uma vez que temos um empacotamento quase ótimo para os itens de G, o algoritmo utiliza estes recipientes para empacotar os itens de P nos espaços livres de $\mathcal{P}_G$ de maneira gulosa. Caso não seja possível empacotar um item de P nos recipientes atuais, abrimos um novo recipiente para inserir o item. Ao fim desse processo, há duas possibilidades: *(i)* Não foi necessário abrir novos recipientes além dos recipientes de $\mathcal{P}_G$, ou *(ii)* foi necessário abrir novos recipientes para empacotar os itens de P. No primeiro caso, o empacotamento final usa no máximo $(1 + \varepsilon)\mathrm{opt}(I)$ recipientes, uma vez que este limite é válido para o empacotamento $\mathcal{P}_G$ e nenhum outro recipiente foi utilizado. No segundo caso, cada recipiente, exceto possivelmente o último gerado, está quase cheio, uma vez que não pode receber um item pequeno. Nesse caso, pode-se provar que podemos obter um empacotamento que usa no máximo $(1 + \varepsilon)\mathrm{opt}(I) + 1$ recipientes. O esquema de aproximação assintótico segue dos dois casos. Para mais detalhes, veja (Fernandez de la Vega e Lueker, 1981).

2. Esquema de Aproximação Assintótico

Nesta seção, apresentamos os principais elementos para a elaboração de um esquema de aproximação assintótico de tempo polinomial $\mathcal{A}_\varepsilon$, para $\varepsilon > 0$, quando temos um número constante de cenários. Primeiramente, no Problema de Empacotamento com Cenários, note que cada item i pertence a um subconjunto de cenários. Para aplicar a estratégia de agrupamento linear, devemos ter compatibilidade de um item para o item arredondado para o qual foi mapeado. Assim, no algoritmo $\mathcal{A}_\varepsilon$, os itens são agrupados em tipos que representam um mesmo subconjunto de cenários. Como o número de cenários é limitado por uma constante, o número de tipos também é limitado por uma constante. Com isso, é possível percorrer em tempo polinomial todas as configurações de empacotamento de itens grandes com quantidade de tamanhos distintos limitada a uma constante. Assim, se G contém os itens de I com peso maior que ε, é possível obter um empacotamento de G que usa no máximo $(1+\varepsilon')\mathrm{opt}(I)$ recipientes, enumerando as possíveis configurações de empacotamento dos itens de $\hat{G}$, onde ε' é um fator constante de ε.

Por outro lado, diferentemente do que ocorreu com o Problema do Empacotamento, quando bastou encontrar um empacotamento quase ótimo dos itens de G e preencher os recipientes gerados com os itens de P, a existência de cenários leva a uma complicação na distribuição dos itens pequenos. Para solucionar esse problema, agrupamos os itens pequenos de cada tipo e criamos um conjunto de itens grandes, todos com tamanho dado por um fator constante de ε e com o mesmo tipo. Utilizando esses novos itens no lugar dos itens pequenos, construímos uma instância modificada apenas com itens grandes e encontramos um empacotamento utilizando o algoritmo anterior. Finalmente, os itens criados são substituídos pelos itens pequenos correspondentes. Como o número de elementos criados para cada tipo é o mínimo necessário para receber os itens pequenos desse tipo, uma solução ótima para a instância modificada não é muito maior do que uma solução ótima para a instância original. O seguinte teorema resume esse resultado.

Teorema 2.1 *Existe uma família de algoritmos $\{\mathcal{A}_\varepsilon\}$ tal que, para cada constante $\varepsilon > 0$, o algoritmo $\mathcal{A}_\varepsilon$ executa em tempo polinomial e, para toda instância I do Problema de Empacotamento com Cenários, $\mathcal{A}_\varepsilon(I) \leq (1+\varepsilon)\mathrm{opt}(I) + 1$.*

Referências

Bódis, A. e Balogh, J. (2018). Bin packing problem with scenarios. *Central European Journal of Operations Research*, pages 1–19.

Christensen, H. I., Khan, A., Pokutta, S., e Tetali, P. (2017). Approximation and online algorithms for multidimensional bin packing: A survey. *Computer Science Review*, 24:63 – 79.

Coffman, E. G., Csirik, J., Galambos, G., Martello, S., e Vigo, D. (2013). Bin packing approximation algorithms: survey and classification. In *Handbook of combinatorial optimization*, pages 455–531. Springer.

Coffman, E. G., Garey, M. R., e Johnson, D. S. (1984). Approximation algorithms for bin-packing-an updated survey. In *Algorithm design for computer system design*, pages 49–106. Springer.

Delorme, M., Iori, M., e Martello, S. (2016). Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms. *European Journal of Operational Research*, 255(1):1 – 20.

Dyckhoff, H. (1990). A typology of cutting and packing problems. *European J. Operational Research*, 44:145–159.

Fernandez de la Vega, W. e Lueker, G. S. (1981). Bin packing can be solved within $1+\epsilon$ in linear time. *Combinatorica*, 1(4):349–355.

Feuerstein, E., Marchetti-Spaccamela, A., Schalekamp, F., Sitters, R., van der Ster, S., Stougie, L., e van Zuylen, A. (2017). Minimizing worst-case and average-case makespan over scenarios. *Journal of Scheduling*, 20(6):545–555.

Wäscher, G., Haussner, H., e Schumann, H. (2007). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1109–1130.