Convexidade em Grafos Linha de Bipartidos

Vitor Ponciano[1], **Rômulo Luiz Oliveira**[2]

[1]PPGI-DCC-UFRJ, [2]UFRJ

vtponciano@gmail.com, romulolo51@gmail.com

Abstract. *For a nontrivial connected and simple graphs $G = (V(G), E(G))$, a set $S \subset E(G)$ is called edge geodetic set of G if every edge of G it's in S or is contained in a geodesic joining some pair of edges in S. The edge geodetic number $eds(G)$ of G is the minimum order of its edge geodetic sets. We prove that it is NP-complete to decide for a given bipartiti graphs G and a given integer k whether G has a edge geodetic set of cardinality at most k. A set $M \subset V(G)$ is called P_3 set of G if all vertices of G have two neighbors in M. The P_3 number of G is the minimum order of its P_3 sets. We prove that it is NP-complete to decide for a given graphs G (diamond,odd-hole)-free and a given integer k whether G has a P_3 set of cardinality at most k.*

1. Introdução

Consideraremos aqui grafos simples, sem direção e finitos G, onde $V(G)$ e $E(G)$ são seus conjuntos de vértices e arestas, respectivamente. O grafo $L(G)$ é o grafo linha de G, onde os vértices de $L(G)$ são as arestas de G e dois vértices em $L(G)$ são adjacentes se suas respectivas arestas, em G, têm pelo menos um extremo em comum, G é chamado raiz de $L(G)$. Os grafos linha de bipartido foram estudados por [Harari and Holzmann 1974], que na ocasião publicaram a caracterização baseada em subgrafos induzidos proibidos do tipo *garra* $K_{1,3}$, *diamante* e buracos ímpares. Em [Maffray and Reed 1999] observa-se que quando um grafo H não contém garra e nem diamante como subgrafo induzido, a vizinhança de todo vértice ou é uma clique, neste caso este vértice é chamado *simplicial*, ou duas cliques sem arestas entre elas. A partir dessa ideia, dado um grafo $H = L(G)$, é fácil encontrar sua raiz linha [Soares 2008]. Nosso objetivo é relacionar a convexidade em vértice no grafo $L(G)$ com a convexidade em aresta em sua raiz G. Em trabalhos como [Santhakumaran and John 2007], vê-se, inicialmente, resultados voltados para convexidades em grafos envolvendo a geração de arestas, o que motivou esse trabalho.

2. O número Geodético em aresta

O comprimento de um caminho, em um grafo G, é definido como o número de arestas desse caminho, partindo desse conceito [Bondy and Murty 2011] definine a distância entre dois vértices u e v, como sendo o comprimento de um uv-caminho mínimo em G. Uma das primeiras discussões sobre convexidade em grafos encontra-se em [Moon 1972] com resultados sobre torneios e para convexidade dos caminhos mínimos, conhecida como convexidade geodética, [Harary et al. 1981], [Pelayo 2013]. A distância entre duas arestas e_1, e_2, denotada por $d(e_1, e_2)$, é definida como sendo o comprimento de um e_1e_2-caminho mínimo em G, entendendo que um e_1e_2-caminho é um caminho que conecta um dos vértices extremos da aresta $e_1 = (u_1, v_1)$ a um dos vértices extremos da aresta $e_2 = (u_2, v_2)$. O intervalo geodésico $I_g[e_1, e_2]$ entre a arestas e_1, e_2, no grafo G, é formado pelo conjunto das arestas $E'(G) \subseteq E(G)$ que pertencem a todo caminho mínimo que conecta as arestas e_1 e e_2, ou seja, é formado pelas arestas que possuem seus dois extremos em qualquer caminho mínimo que conecte as arestas e_1 e e_2. Observe que se $w \in I[e_1, e_2]$, então $d(e_1, e_2) = d(e_1, w) + d(w, e_2) + 1$. Para um conjunto de arestas S, o seu intervalo geodésico é definido da seguinte forma: $I_g[S] = \bigcup I_g[e_1, e_2]$, para todo par de arestas $e_1, e_2 \in S$. Um conjunto de arestas S é chamado geodésico em arestas, quando $I_g[S] = E(G)$. chamamos de número geodésico em aresta ao tamanho do menor conjunto geodésico em aresta do grafo G e mostraremos que decidir se um grafo bipartido possui um conjunto geodésico em arestas de tamanho no máximo k, é NP-completo, que é o mesmo que mostrar que o problema do conjunto geodésico, em vértices, é NP-completo para $L(G)$.

Dada uma aresta $e \in E(G)$, seu grau $d(e)$ é o número de arestas incidentes em e. Uma aresta e é chamada de folha, quando $d(e) = 1$. Uma aresta e se diz dominada por uma aresta e_1, quando e incidir em um vértice extremo da aresta e_1, neste caso, dizemos que a aresta e_1 é uma aresta dominadora. Um subconjunto $S \subset E(G)$ se chama um conjunto dominante em aresta, ou conjunto simplesmente dominante em aresta de G, quando qualquer aresta $e \in E(G)$ pertencer ao conjunto S ou for dominada por pelo menos uma aresta de S [Yannakakis and Gavril 1980]. A seguir temos o problema computacional do conjunto simplesmente dominante em aresta que na década de 80 foi provado ser NP-completo, mesmo para grafo bipartido [Yannakakis and Gavril 1980].

Conjunto Dominante em Aresta:
Instancia: Um grafo $G = (V, E)$ bipartido e um inteiro positivo k;
Questão: O grafo G tem um conjunto simplesmente dominante em aresta de tamanho no máximo k ?

Conjunto Geodésico em Aresta:
Instancia: Um grafo $G = (V, E)$ bipartido e um inteiro positivo k;
Questão: G tem um conjunto geodésico em aresta de tamanho no máximo k ?

Teorema 2.1. *O problema do conjunto geodésico em aresta restrito a grafos bipartidos é NP-completo.*

Demonstração. Para a pertinência em NP, basta observar que dado um conjunto de arestas S, é fácil verificar se este conjunto é, de fato, um conjunto geodésico em aresta do grafo, apenas varrendo todas as combinações possíveis de pares de arestas de S e calculando o intervalo geodésico desses pares.

Para a NP-dificuldade, reduziremos polinomialmente o problema NP-completo da dominação simples de aresta [Yannakakis and Gavril 1980], restrito a grafo bipartido, ao problema do conjunto geodésico em aresta, também em grafo bipartido. Para isto, seja (G, k) uma instância do problema da dominação simples em aresta, em grafo bipartido. Construiremos um gadget G', a partir da instancia fornecida, da seguinte maneira: Seja X e Y as partições da instância G. Adicionamos novos conjuntos de arestas ao grafo G. $W = \{(w_1w'_1), (w_2w'_2), ..., (w_{|X|}w'_{|X|})\}$, $Z = \{(z_1z'_1), (z_2z'_2), ..., (z_{|Y|}z'_{|Y|})\}$ e novas arestas (w'_ix_i) em $X = \{x_1, x_2, , ..., x_{|X|}\}$ e (z'_jy_j) em $Y = \{y_1, y_2, , ..., y_{|Y|}\}$, por fim $(w'_iz'_j)$, para todo $1 \leq i \leq |X|$ e $1 \leq j \leq |Y|$, em $W \cup Z$. Seja $k' = k + n$. Note que G' é bipartido.

Se G tem um conjunto de aresta simplesmente dominante $|E_D| \leq k$, provaremos que G' tem um conjunto geodético em aresta S, tal que $S = E_D \cup W \cup Z$. Seja uv uma aresta de $E(G') - S$ vamos mostrar que $uv \in I[S]$. Dividimos o raciocínio em casos, teremos:

Caso 1: Se uv for uma aresta do tipo (w'_i, z'_j), estarão no caminho entre as arestas $(w_i w'_i)$ e $(z'_j z_j)$. Sendo $P = (w_i w'_i)(w'_i, z'_j)(z'_j z_j)$ um caminho de tamanho 1 e portanto, $w'_i z'_j \in I[ww', z'z] \subseteq I[S]$.

Caso 2: Se uv for uma aresta do tipo (w'_i, x_i), onde $xy \in E_D$. Note que essa aresta esta em um caminho mínimo entre as arestas (ww') e (xy'), a saber $P' = (w_i w'_i)(w'_i x_i)(x_i y_j)$ que tem tamanho 1. portanto, $w'_i x_i \in I[w_i w'_i, x_i y_j] \subseteq I[S]$. De modo análogo $z'_j y_j \in I[z_j z'_j, x_i y_j] \subseteq I[S]$.

Caso 3: Se uv for uma aresta do tipo (w'_i, x'_i), pela definição de dominação simples em aresta, $x'_i y_j$ existe e é adjacente a uma aresta $y_j x_i \in E_D$. Observe que a aresta $x'y$ esta em um caminho mínimo entre as arestas ww' e xy, a saber $P = (ww')(w'x')(x'y)(yx)$ que tem tamanho 2, logo $(w'x)$ e $(x'y)$ pertencem ao intervalo $I[ww', xy] \subseteq I[S]$. De modo análogo se procede para o caso $(z'y')$ e (xy'), pertencendo então ao intervalo $I[ww', xy] \subseteq I[S]$. Note que o diâmetro em aresta do conjunto S é 2. Podemos assim concluir que S é um conjunto geodético de tamanho $k + n$.

Por outro lado, Seja S um conjunto geodético em aresta de G' com $|S| \leq k + n$, vamos provar que $E_D = S - W \bigcup Z$. Seja $x'y' \in E(G) - S$, sabemos que $x'y' \in I[S]$, teremos portanto ou $P = (ww')(w'x')(x'y)(yx)$ ou $P = (zz')(z'y')(y'x)(xy)$, com $xy \in S$ em $E(G)$. Assim existirá a aresta $x'y$ ou a aresta yx' e portando $S = W \bigcup Z$ é uma dominação simples de G. Note também que se (xy) não for simplesmente dominada, então não estará em algum caminho mínimo de S.

$\square$

3. O número P_3 em grafos livre de diamante e buraco ímpar.

O intervalo P_3 entre dois vértices $u, v \in V(G)$, denotado por $I_{P_3}[u, v]$, é definido como o conjunto dos vértices que pertencem a qualquer caminho de tamanho dois. Dessa forma defini-se o intervalo de um conjunto de vértices $M \in V(G)$, como $I_{P_3}[M] = \cup I_{P_3}[u, v]$, para todo $u, v \in M$. Em [Centeno 2012] foi provado que decidir se um grafo qualquer possui um conjunto P_3 de tamanho no máximo k variando na entrada, é NP-completo. E com base nisto, verificamos a NP-completude para decidir sobre a existência de um tal conjunto P_3 em uma classe mais restrita de grafos, a saber os grafos livres de estruturas induzidas do tipo diamante e buracos ímpares.

Teorema 3.1. *O problema do número P_3 em grafos livre de diamante e buraco ímpar é NP-Completo.*

Demonstração. Para a pertinência em NP, basta observar que dado um conjunto M de vértices, é fácil verificar se este conjunto é, de fato, um conjunto P_3 apenas calculando esse intervalo P_3 e verificando se o conjunto obtido é o próprio $V(G)$.

Para a NP-dificuldade, faremos uma redução de tempo polinomial do problema do conjunto dominante em aresta, um problema já conhecido NP-completo, mesmo em grafos bipartido [Yannakakis and Gavril 1980]. Recebendo como instância geral deste problema um grafo bipartido qualquer, construindo, a partir disso, uma instância particular para o problema do número P_3. Seja G bipartido um instância geral do problema de dominação em arestas. Para cada vértice $v \in V(G)$, com $d_G(v) > 1$, adicione um vértice novo vizinho de v e, em seguida, construa o grafo linha da estrutura obtida e, para cada vértice desse grafo de linha computado, coloque um vértice vizinho novamente, que chamamos de vértice pendente. Observe que o grafo obtido é livre de diamante e de buraco ímpar, assim como todo linha de bipartido [Harari and Holzmann 1974]. E se G, instância bipartida, tem um conjunto dominante em arestas de tamanho k, então o grafo obtido tem um conjunto P_3 de tamanho $k + n$. Por outro lado, suponha que S' é um conjunto P_3 da estrutura particular construída de tamanho $n + k$. Como todo vértice de grau um, deve pertencer ao conjunto P_3, por não poder ser gerado, então os n vértices adicionados simpliciais pertencem a S'. Como ainda é necessário garantir que os vértices da estrutura construída possuam dois vizinhos no conjunto P_3, fica claro que todo vértice x, da estrutura, possui pelo menos um vizinho em $S' - V$ e neste caso este conjunto é um conjunto dominante de tamanho k na instância G. □

4. Conclusão

Objetivo deste trabalho foi resolver problemas de convexidade em grafo linha. Para isso usamos a convexidade em aresta, um conceito novo para área. Como resultados futuros pretende-se mostrar que número P_3 em grafo livre de garra, diamante e buraco ímpar é Polinomial.

Referências

Bondy, A. and Murty, U. S. R. (2011). *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer London.

Centeno, C. C. (2012). *A convexidade P_3 para grafos não direcionados*. PhD thesis, UFRJ.

Harari, F. and Holzmann, C. (1974). Line graphs of bipartiti graphs. 1:19–22.

Harary, F., Nieminen, J., et al. (1981). Convexity in graphs. *Journal of Differential Geometry*, 16(2):185–190.

Maffray, F. and Reed, B. (1999). A description of claw-free perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 75:134–156.

Moon, J. W. (1972). Embedding tournaments in simple tournaments. *Discrete Mathematics*, 2(4):389 – 395.

Pelayo, I. M. (2013). *Geodesic Convexity in Graphs*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer New York.

Santhakumaran, A. and John, J. (2007). Edge geodetic number of a graph. *Journal of Discrete Mathematical Sciences Cryptography*, 3.

Soares, P. R. (2008). Um estudo das estruturas de grafos sem garras. Master's thesis, UFRJ.

Yannakakis, M. and Gavril, F. (1980). Edge dominating sets in graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38(3):364–372.