Obstruções Minimais de Cografos-(2,1) com restrição externa

Raquel S. F. Bravo[1], **Loana T. Nogueira**[1], **Fábio Protti**[1], **Clautenis Vianna**[2]

[1]Instituto de Computação – Universidade Federal Fluminense (UFF)

[2]Instituto Federal do Piauí (IFPI) – Teresina, PI – Brazil

{raquel,fabio,loana}@ic.uff.br, clau.nivica@gmail.com

Abstract. *We characterize cographs whose set of vertices can be partitioned into k independent sets and ℓ clique, named (k, ℓ)-graphs and consider all possible restrictions between the parts (external restrictions), that is, for any two distinct parts i and j can be completely adjacent, completely non-adjacent, or with no restrictions. We determine all the possible minimal obstruction cographs-$(2, 1)$ with external restrictions.*
Palavras Chave: Cografos, Partição em grafos, M-partição, M-obstrução, Cografos-(k, ℓ).

Resumo. *Caracterizamos os cografos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques, denominados grafos-(k, ℓ) e consideramos todas as possíveis restrições entre as partes (restrições externas), isto é, quaisquer duas partes distintas i e j podem ser completamente adjacentes, completamente não adjacentes ou sem restrições. Determinamos todas as possíveis obstruções minimais dos cografos-$(2, 1)$ com restrições externas.*
Keywords: Cographs, Graph Partition, M-partition, M-obstruction, Cographs-(k, ℓ).

1. Introdução

Os problemas de partição de grafos consistem em particionar o conjunto V dos vértices de um grafo em subconjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$ onde $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = V$ e $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$, $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq k$, exigindo-se, porém, algumas propriedades sobre estes subconjuntos de vértices. Estas propriedades podem ser *internas*, como por exemplo exigir que os vértices de cada subconjunto V_i sejam completamente adjacentes (isto é, V_i é uma clique) ou completamente não-adjacentes (isto é, V_i é um conjunto independente), ou *externas*, onde as exigências são feitas sobre os pares (V_i, V_j), isto é, todos os vértices de V_i e os vértices de V_j podem ser completamente adjacentes entre si ou completamente não-adjacentes entre si. Brandstädt propôs uma generalização dos grafos split, que definiu uma nova classe de grafos, a classe dos *grafos*-(k, ℓ), como sendo aquela formada pelos grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques. Reconhecer grafos-(k, ℓ) para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$ é NP-Completo [Bransdstädt (1996)]. Como o reconhecimento desta classe é NP-completo, para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$, alguns autores estudaram o problema quando restrito à subclasses de grafos. Hell, Klein, Nogueira e Protti (2004) apresentaram uma caracterização e um algoritmo de reconhecimento com complexidade $O(n(n + m))$ para os grafos cordais-(k, ℓ). Outra forma conveniente de representar o particionamento em grafos é através da *M-partição*. O problema da M-partição foi definido por Feder $et.$ al (1999), que generaliza o problema de grafos-(k, ℓ), consistindo em particionar o conjunto de vértices de um dado grafo em m partes $A_1, A_2, ..., A_m$, com certas restrições para cada A_i, $i = 1, \ldots, m$. Os vértices em A_i devem ser completamente adjacentes ou completamente não-adjacentes (restrições internas) ou para cada par A_i, A_j, os vértices em A_i e A_j são completamente adjacentes ou não-adjacentes entre si (restrições externas).

Com a finalidade de expressar essas restrições de forma mais detalhada, Feder $et.\ al.$ (1999) definiram uma matriz simétrica M de ordem $m \times m$ em que cada elemento $M_{i,i}$ representa a restrição interna no conjunto A_i, e cada elemento fora da diagonal principal $M_{i,j}$, $i \neq j$, representa uma restrição externa entre os subconjuntos A_i e A_j. Mais especificamente, seja uma matriz simétrica, onde as entradas $M_{i,j}$ podem ser igual a 0, 1 ou $*$. Assim, temos que A_i é um conjunto independente, se $M_{i,i} = 0$, uma clique, se $M_{i,i} = 1$, ou sem nenhuma restrição interna, se $M_{i,i} = *$. Por outro lado, as entradas fora da diagonal principal, A_i e A_j são completamente não-adjacentes, se $M_{i,j} = 0$, completamente adjacentes, se $M_{i,j} = 1$, ou sem restrição externa, se $M_{i,j} = *$. Uma M-obstrução H é minimal quando para qualquer vértice v de H, $H - v$ é M-particionável.

Neste trabalho, consideramos a classe dos cografos, classe esta livre de P_4 induzido. Essa classe está contida na classe dos grafos perfeitos, o que a torna uma classe interessante para estudo. Mais especificamente, caracterizamos os cografos M-particionáveis em termos de obstruções e determinamos todas as M-obstruções minimais dos cografos quando M é uma matriz de ordem igual a três.

2. Preliminares

Dado um grafo simples $G = (V, E)$, denotamos por $\overline{G}$ o complemento de G. Para $V' \subseteq V$, denotamos por $G[V']$ o subgrafo de G induzido por V'. Uma *clique* (*conjunto independente*) é um subconjunto de vértices que induz um subgrafo completo (sem arestas), não necessariamente maximal e denotada por K_p (I_p) uma clique (conjunto independente) de p vértices. G é um *grafo*-(k, ℓ) se V pode ser partiticionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques. Dados dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, o grafo $G_1 \cup G_2$ (chamado de *união* de G_1 e G_2) é um grafo com o conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ e conjunto de arestas $E_1 \cup E_2$, e o grafo $G_1 + G_2$ (chamado de *junção* de G_1 e G_2) é o grafo com o conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ e o conjunto de arestas $E_1 \cup E_2 \cup \{(x, y) \mid x \in V_1,$ $y \in V_2\}$. Um *caminho* num grafo G é uma sequência de vértices $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$, onde os $v_i's$ são vértices (dois a dois distintos), e $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $1 \leq i \leq k - 1$. Uma *corda* em P é uma aresta que liga dois vértices não-consecutivos de P. Um *caminho induzido* é um caminho sem cordas, e denotado por P_k o caminho induzido com k vértices. Dizemos que um grafo é *livre de* P_k quando não contém P_k como subgrafo induzido. Um *cografo* G é um grafo livre de P_4, isto é, G não contém P_4 como subgrafo induzido.

3. Resultado Principal

Nesta seção consideramos o problema da M-partição para matrizes quadradas M de ordem $m = 3$ e apresentamos uma caracterização dos cografos M-particionáveis em termos de M-obstruções, quando $k = 2$ e $\ell = 1$. Usaremos a notação $(k, \ell)^{\{a_1^2, a_1^3, \ldots, a_1^{k+\ell}, \ldots, a_i^{i+1}, \ldots, a_i^{k+\ell}\}}$, $i = 1, \ldots, k + \ell - 1$ para representar uma partição em k conjuntos independentes $X_1, X_2, \ldots, X_k$ e ℓ cliques $X_{k+1}, \ldots, X_{k+\ell}$, onde cada a_i^j representa a restrição externa entre os conjuntos X_i e X_j. Observe que um grafo-$(k, \ell)^{\{a_1^2, a_1^3, \ldots, a_1^{k+\ell}, \ldots, a_i^{i+1}, \ldots, a_i^{k+\ell}\}}$ representa um grafo que admite uma M-partição onde M é uma matriz com k elementos nulos na diagonal principal, ℓ $1'$s na diagonal principal, com qualquer elemento fora da diagonal principal podendo pertencer ao conjunto $\{0, 1, *\}$.

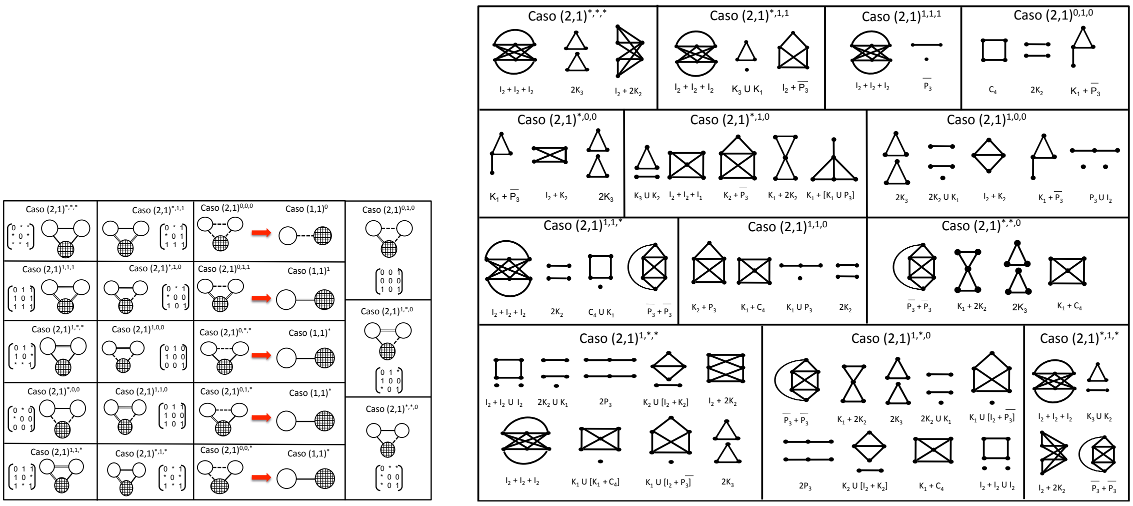

Figure 1. Obstruções minimais de todos os Casos $(2,1)$ que não são redutíveis

3.1. Casos (2,1)

Na Figura 1 são listadas todas as matrizes de ordem 3×3 referentes aos Casos $(2,1)$ que serão considerados nesta subseção. Observe que o caso de se verificar se um grafo G é $(2,1)^{0,0,0}$ equivale a verificar se o grafo é $(1,1)^0$. Da mesma forma, o caso de se verificar se um grafo é $(2,1)^{0,1,1}$ equivale a se verificar se o grafo é $(1,1)^1$. Note também, que os casos de se verificar se um grafo é $(2,1)^{0,*,*}$ ou $(2,1)^{0,1,*}$ ou $(2,1)^{0,0,*}$ são equivalentes a verificar se o grafo é $(1,1)^*$. As obstruções minimais de cada caso (2,1) se encontra explícito na Figura 1.

Teorema 1 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2,1)^{*,1,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 2 como subgrafo induzido.*

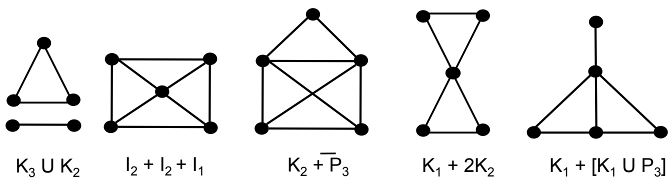

Figure 2. Obstruções minimais do caso $(2,1)^{*,1,0}$

Prova: $(\Rightarrow)$ É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(2,1)^{*,1,0}$. $(\Leftarrow)$ Seja G um cografo minimal que não é $(2,1)^{*,1,0}$, ou seja, para todo vértice $v \in V(G)$, $G - v$ é um grafo $(2,1)^{*,1,0}$. Suponha, por contradição que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 2 como subgrafo induzido. Assim, consideraremos dois casos: (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se G_i for trivial, para algum $i = 1, 2, \ldots, k$, então G é $(2,1)^{*,1,0}$, pois por minimalidade, $G - G_i$ é $(2,1)^{*,1,0}$. Contradição. Dessa forma, $|G_i| \geq 2$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Temos que G não é $(2,0)^*$, caso contrário G seria $(2,1)^{*,1,0}$, uma contradição. Logo, G contém K_3, e desta forma, G_i contém K_3. Como cada G_i, $|G_i| \geq 2$ e $k \geq 2$, então G contém $K_3 \cup K_2$. Absurdo. (ii) $\overline{G}$ é desconexo.

Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, então G é $(2,1)^{*,1,0}$, uma contradição. Desta forma, existe pelo menos um G_i que possui pelo menos um par de vértices não adjacentes, $i = 1, 2, \ldots, k$. Assim, analisaremos os dois subcasos ($k \geq 3, k = 2$): (ii.1) $k \geq 3$: se existem G_i e G_j, ambos contendo I_2, então G contém $I_2 + I_2 + I_1$. Absurdo. Se apenas G_i contém I_2, isto quer dizer que $G - G_i$ não contém I_2 e por sua vez é uma clique. Logo, se G_i for $(1,1)^1$, então G é $(2,1)^{*,1,0}$, uma contradição. Temos que G_i contém C_4 ou $\overline{P}_3$, e desta forma, se G_i contém C_4, então G contém $C_4 + K_1$, absurdo. E se G_i contém $\overline{P}_3$, então G contém $\overline{P}_3 + K_2$, absurdo. (ii.2) $k = 2$: consideraremos mais dois subcasos (ii.2.1) G_1 contém I_2 e G_2 é trivial. Se G_1 for $(1,1)^1$, então G é $(2,1)^{*,1,0}$. Absurdo! Logo, G_1 contém C_4 ou $\overline{P}_3$. Considerando que G_1 contenha C_4, então G contém $I_2 + I_2 + I_1$. E, se G_1 contém $\overline{P}_3$, então, analisaremos as seguintes situações: se G_1 é $(1,1)^0$, então G é $(2,1)^{*,1,0}$. Contradição. Logo, G_1 contém P_3 ou $2K_2$. Se G_1 contém P_3, então como G_1 é desconexo temos que G_1 contém $P_3 \cup K_1$, logo G contém $K_1 + (K_1 \cup P_3)$. (ii.2.2) Ambos G_1 e G_2 contém I_2. Se G é $(2,0)^*$ então G é $(2,1)^{*,1,0}$. Contradição. Logo, G contém K_3. Já que G contém K_3, então pelo menos um G_i, digamos G_1, contém uma aresta. Se G_2 também contiver K_2, então G contém $\overline{P}_3 + K_2$, já que G_1 contém $\overline{P_3}$, pois é desconexo, absurdo. No entanto, se apenas G_1 contém K_2 e G_2 é tal que $V(G_2)$ é um conjunto independente, então: se G_1 for $(1,1)^0$ então G é $(2,1)^{*,1,0}$. Contradição. Se G_1 não for $(1,1)^0$ então G_1 contém $2K_2$ ou P_3. Dessa forma, considerando que G_1 contenha $2K_2$, então G contém $K_1 + 2K_2$, absurdo! E, se G_1 contém P_3, então G contém $K_1 + (P_3 \cup K_1)$, já que G_1 é desconexo, absurdo. Concluímos que o cografo G é $(2,1)^{*,1,0}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $K_3 \cup K_2$, $I_2 + I_2 + I_1$, $K_2 + \overline{P}_3$, $K_1 + 2K_2$ e $K_1 + [K_1 \cup P_3]$ como subgrafo induzido.

Por falta de espaço, omitiremos as provas dos outros casos.

4. Conclusão

Neste trabalho, usamos fortemente a estrutura dos cografos para caracterizarmos por obstruções minimais todos os cografos -$(2,1)$ com e sem restrição externa.

References

[1] **Bransdstädt, A.** Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics* 152 (1996) 47 – 54.

[2] **Bransdstädt, A.** The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics* 89 (1998) 59 – 73.

[3] **Bravo, R. S. F., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, Fábio** Characterization and recognition of P_4-sparse graphs partitionable into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics* 159 (2011) 165 – 173.

[4] **Corneil, D. G., Lerchs, H., and Burlingham, L. S.** Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics* 3 (1981) 163 – 174.

[5] **Feder, T., Hell, P., Klein, S., and Motwani, R.** List partitions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 16 (2003) 449 – 478.

[6] **Feder, T., and Hell, P.** Matrix partitions of perfect graphs. Special Issue of *Discete Mathematics*, 306 (2006) 2450 – 2460

[7] **Feder, T., Hell, P., and Hochstättler, W.** Generalized Colouring (Matrix Partitions) of Cographs. *Trends in Mathematics* 2006 149 – 167

[8] **Hell, P., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, F.** Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics* 141 (2004) 185 – 194.