Sobre coloração total dos grafos r-partidos completos

Raphael Martins[1], **Diana Sasaki**[1]

[1]Instituto de Matemática e Estatística da UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

raphaelbgmartins@hotmail.com, diana.sasaki@ime.uerj.br

Abstract. *In this work, we investigate the total coloring and the equitable total coloring problems in the family of complete r-partite graphs. We prove that every complete bipartite graph $K_{n,n}$ cannot be colored with a $(\Delta + 1)$-total coloring and we prove that every complete bipartite graph $K_{n,m}$ ($n > m \geq 1$) has a $(\Delta + 1)$-equitable total coloring. Furthermore, we present a property on equitable total colorings of balanced complete r-partite graphs K^r_n.*

Resumo. *Neste trabalho, investigamos os problemas de coloração total e coloração total equilibrada na família dos grafos r-partidos completos. Provamos que todo grafo bipartido completo $K_{n,n}$ não possui uma $(\Delta+1)$-coloração total e provamos que todo grafo bipartido completo $K_{n,m}$ ($n > m \geq 1$) possui uma $(\Delta + 1)$-coloração total equilibrada. Além disso, apresentamos uma propriedade de coloração total equilibrada dos grafos r-partidos completos balanceados K^r_n.*

1. Introdução

Coloração de grafos é um problema desafiador que modela diversas situações reais onde as adjacências representam conflitos. Um grafo $G = (V, A)$ consiste em um conjunto de vértices V conectados por um conjunto de arestas A. Uma *k-coloração total* de G é uma atribuição de k cores aos elementos (vértices e arestas) de G de forma que elementos adjacentes possuam cores diferentes. O *número cromático total* χ'' de G é o menor k tal que o grafo possui uma k-coloração total. A Conjectura da Coloração Total afirma que $\Delta + 1 \leq \chi'' \leq \Delta + 2$, onde Δ é o grau máximo do grafo [Behzad 1965, Vizing 1968]. Grafos com $\chi'' = \Delta + 1$ são chamados de *Tipo 1*, caso contrário, são chamados de *Tipo 2*. Uma coloração total é *equilibrada* quando a diferença entre as quantidades de vezes em que a cor que mais aparece e a cor que menos aparece é de no máximo um. Similarmente, o *número cromático de coloração total equilibrada* χ''_e de G é o menor k tal que o grafo possui uma k-coloração total equilibrada. Assim como na coloração total, foi conjecturado que o número cromático de coloração total equilibrada é no máximo $\Delta + 2$ [Wang 2002]. Dizemos que a cor i está *representada* em um vértice v, se o vértice v ou suas arestas incidentes possuem a cor i.

Um grafo G é *bipartido* se V pode ser particionado em conjuntos Y e U tal que toda aresta de G possui um extremo em Y e outro extremo em U. Um grafo é *bipartido completo* quando todo vértice de Y é adjacente a todos os vértices de U. Denotamos um grafo bipartido completo por $K_{n,m}$, onde $|Y| = n$ e $|U| = m$; $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$ e $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$. Um grafo é dito r-partido completo quando este pode ser particionado em r partes de modo que vértices de mesma parte não sejam adjacentes e todo vértice de cada parte seja adjacente a todos os vértices das outras partes. Quando um r-partido completo possui n vértices em cada parte, denotamos estes grafos por K_n^r e dizemos que este é um grafo r-partido completo balanceado.

Neste trabalho, verificamos que todo grafo $K_{n,n}$ é Tipo 2, o que já sabíamos em [Behzad et al. 1967]; apresentamos uma outra prova de que todo grafo $K_{n,m}$, com $n \neq m$, possui uma $(\Delta + 1)$-coloração total equilibrada, resultado originalmente citado em [Fu 1994]. Além disso, apresentamos uma propriedade de coloração total equilibrada para os grafos K_n^r.

2. Grafos bipartidos completos

Teorema 1. *Todo grafo $K_{n,n}$ é Tipo 2. Além disso, todo $K_{n,n}$ admite $(\Delta + 2)$-coloração total equilibrada.*

Demonstração. Verificamos facilmente que o grafo $K_{1,1}$ é Tipo 2. Considere $n \geq 2$. Inicialmente provamos que não existe $(\Delta + 1)$-coloração total do grafo $K_{n,n}$ utilizando uma mesma cor para dois ou mais vértices de mesma parte. De fato, suponha que exista uma $(\Delta + 1)$-coloração total do grafo $K_{n,n}$ tal que os vértices y_1 e y_2 possuam mesma cor 1, sem perda de generalidade. Como o grafo é Δ-regular, todo vértice precisa ter a cor 1 representada. No vértice u_1 a única forma de se representar a cor 1, é atribuindo esta cor à aresta u_1y_3 ou u_1y_4 ou $\ldots$ ou u_1y_n. Em qualquer escolha, a cor 1 estará representada em mais um vértice de Y. Após, a cor 1 estará representada em três vértices de Y e em um vértice de U. Se continuarmos representando cor 1 nos vértices de U, assim que faltarem dois vértices de U para terem a cor 1 representada, todos os vértices de Y estarão com a cor 1 representada. Assim, o único modo de representar a cor 1 nestes dois vértices é atribuindo a cor aos próprios vértices, o que não é possível pois são adjacentes à y_1 e y_2. A Figura 1 (esquerda) apresenta uma ilustração deste caso.

Agora, note que não existe $(\Delta + 1)$-coloração total do $K_{n,n}$ utilizando n cores nos n vértices de uma mesma parte. De fato, suponha que os n vértices de Y possuam cores diferentes de 1 até n (ou seja, Δ cores). Isto implica que os vértices de U precisam possuir a cor $n + 1$, pois são adjacentes a todos os vértices de Y, o que não é possível, pois atribuindo mesma cor a todos os vértices de U, cairemos no caso anterior. A Figura 1 (direita) apresenta o grafo $K_{4,4}$ com alguns vértices coloridos. É imediato ver que a única cor disponível para os vértices ainda não coloridos é a cor 5. Ao colorir todos os vértices de uma parte com a cor 5, pelo caso anterior, temos que esta coloração não poderá ser estendida para uma $(\Delta + 1)$-coloração total do $K_{4,4}$.

Pelo conhecido Teorema de König, existe uma Δ-coloração das arestas do $K_{n,n}$. Assim, colorindo os vértices de Y com cor $\Delta + 1$ e de U com cor $\Delta + 2$, temos que todo $K_{n,n}$ é Tipo 2. Mais especificamente, todo $K_{n,n}$ possui uma $(\Delta + 2)$-coloração total equilibrada. $\square$

Teorema 2. *Todo $K_{n,m}$ $(n > m \geq 1)$ possui uma $(\Delta + 1)$-coloração total equilibrada.*

Demonstração. Começamos apresentando uma $(\Delta + 1)$-coloração total equilibrada para o grafo $K_{n,m}$. Notemos que $\Delta = n$. Atribuímos a cor 1 a todos os m vértices de U. Assim, esta cor não poderá ser mais utilizada nos outros elementos. Atribuímos as cores 2, 3, $\ldots$, n e $n + 1$, às arestas u_1y_1, u_1y_2, $\ldots$, u_1y_n, respectivamente. Em seguida, as arestas u_2y_1, u_2y_2, $\ldots$, u_2y_n, recebem as cores 3, 4, $\ldots$, $n + 1$ e 2, resp. Continuando

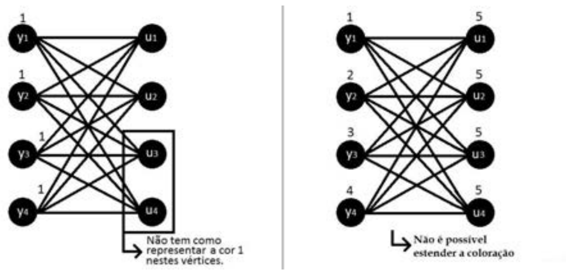

Figura 1. Ilustração da prova do Teorema 1.

a coloração de forma análoga, nas arestas incidentes ao vértice u_m a ordem de cores será $m+1, m+2, \ldots, \Delta+1, 2, 3, \ldots, m$.

Com a atribuição feita acima, vejamos que não há conflito de cores nas arestas incidentes a cada vértice de Y. De fato, às m arestas incidentes ao vértice y_i, ou seja, $u_1y_i, u_2y_i, \cdots, u_my_i$, $i = 1, \ldots, n$, atribuímos m cores seguindo a ordem seguinte: $i + 1, i+2, \ldots, n, n+1, 2, 3, \ldots, i-1$. Note que, em cada vértice de Y não haverá repetição de cores nas arestas, pois para isto ocorrer precisaríamos atribuir pelo menos $n+1$ cores às arestas, o que não é possível.

Resta atribuir cores aos vértices de Y. Observe que restam $n + 1 - m - 1 = n - m$ cores disponíveis para cada vértice de Y, pois foram utilizadas m cores para as arestas incidentes a eles e uma cor para os vértices de U. Atribuímos a cor $n + 1$ ao vértice y_1. Observe que esta cor não foi utilizada em nenhuma aresta incidente à ele, pois foram utilizadas as primeiras m cores da listagem acima para estas arestas. Para $i \geq 2$, atribuímos a cor i ao vértice y_i. De fato, esta cor não é utilizada na listagem de cores das arestas incidentes ao vértice.

Vamos provar que esta coloração é equilibrada. Atribuímos a cor 1 para todos os m vértices de U. Todas as outras cores 2, 3, ..., $\Delta + 1$ foram representadas uma única vez em cada vértice de U, aparecendo também m vezes cada uma. Por fim, cada vértice de Y recebe cores diferentes entre si dentre 2, 3, ..., $\Delta + 1$. Assim, todas essas cores aparecem um total de $m + 1$ vezes e a cor 1 aparece m vezes. Dessa forma, concluímos que todo grafo $K_{n,m}$ possui uma ($\Delta + 1$)-coloração total equilibrada. Uma 6-coloração total equilibrada do grafo $K_{5,4}$ é apresentada na Figura 2. $\square$

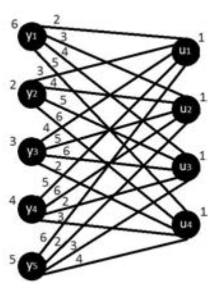

Figura 2. A 6-coloração total equilibrada obtida pelo Teorema 2 do grafo $K_{5,4}$.

3. Grafos r-partidos completos

A seguir, apresentamos uma propriedade de coloração total equilibrada nos grafos r-partidos completos balanceados que nos ajudará na determinação de colorações totais equilibradas para estes grafos.

Propriedade 1. *Em toda ($\Delta + 1$)-coloração total equilibrada do grafo K_n^r, $r \geq 3$ e n par, o número de vértices coloridos com mesma cor é exatamente 2.*

Demonstração. Como n é par, o número de vértices do grafo K_n^r também é par. Suponha que um número ímpar de vértices possuem mesma cor i em uma ($\Delta + 1$)-coloração total equilibrada. Neste caso, restará um número ímpar de vértices sem cor i representada. Como a única forma de se representar a cor i é através das arestas, sempre restará exatamente um vértice sem a cor i representada, pois atribuindo uma cor a uma aresta, estamos representando esta cor em dois vértices.

Afirmamos que sempre teremos cores que serão atribuídas apenas às arestas. De fato, suponha que foram coloridos pelo menos dois vértices de cada cor, totalizando pelo menos $\frac{rn}{2}$ cores utilizadas em vértices. Temos que $\Delta = (r-1)n = rn - n$, que é sempre maior que $\frac{rn}{2}$, para $r \geq 3$. Assim, como o número total de cores é $\Delta + 1 = (r-1)n + 1 = rn - n + 1$, este valor também será sempre maior que $\frac{rn}{2}$. Isto implica que sobram cores para serem utilizadas somente nas arestas. Cada classe de cor que aparece somente nas arestas tem um total de $\frac{rn}{2}$ elementos.

Suponha agora que temos um número par $P \geq 2$ de vértices coloridos com mesma cor i. O número de arestas coloridos com a cor i é igual a $\frac{(r-1)n}{2} + \frac{n-P}{2}$, pois precisamos ter a cor i representada (através de arestas) em todos os n vértices de cada uma das outras $r-1$ partes e nos demais $n-P$ vértices da parte que possui os P vértices coloridos com cor i. Assim, o total de elementos (vértices e arestas) coloridos com mesma cor i é igual a $P + \frac{(r-1)n}{2} + \frac{n-P}{2} = \frac{2P+(r-1)n+n-P}{2} = \frac{P}{2} + \frac{rn}{2}$.

Observe que o único caso em que teremos a diferença permitida de 1 unidade é quando $P = 2$, já que temos classes de cores utilizando $\frac{rn}{2}$ elementos (apresentado acima). Para todos os valores de P maiores do que 2, a coloração não é equilibrada. $\square$

4. Conclusões

Neste trabalho, investigamos a coloração total dos grafos bipartidos e r-partidos completos balanceados. Como trabalhos futuros, continuaremos a coloração total na classe dos grafos r-partidos completos balanceados.

Referências

Behzad, M. (1965). *Graphs and their chromatic numbers*. PhD thesis, Michigan State University.

Behzad, M., Chartrand, G., and Cooper Jr, J. K. (1967). The colour numbers of complete graphs. *J. Lond. Math. Soc.*, 42:226–228.

Fu, H. L. (1994). Some results on equalized total coloring. *Congr. Numer.*, 102:111–119.

Vizing, V. G. (1968). Some unsolved problems in graph theory. *Russian Math. Surveys*, 23(6):125–141.

Wang, W. F. (2002). Equitable total coloring of graphs with maximum degree 3. *Graphs Combin.*, 18:677–685.