Uma Aproximação para o Problema de Alocação de Terminais

Lehilton L.C. Pedrosa[1], Vinícius F. dos Santos[2], Rafael C.S. Schouery[1†]

[1]Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas
Campinas, São Paulo

[2]Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte, Minas Gerais

{lehilton,schouery}@ic.unicamp.br, viniciussantos@dcc.ufmg.br

Abstract. *In the* center p-hub problem*, we are given a metric space (V, d) and a set $D \subseteq V^2$, that represents flow demands. The objective is to select a subset of V of size p, which are called hubs, and assign each demand uv to a terminal w, minimizing the maximum distance of traveling from origin u, hub w, and destination v. Although hub location problems comprise a very active area, there are few works on approximation. For the center p-hub problem, we notice that there is a lower bound of* 2*, and obtain the first approximation, that achieves factor* 3.

Resumo. *No* problema de centros dos p-terminais *são dados um espaço métrico (V, d) e um conjunto $D \subseteq V^2$ que representa demandas de fluxo. O objetivo é selecionar um subconjunto de V de tamanho p, denominado terminais, e associar cada demanda $uv \in D$ a um terminal w, de forma a minimizar o maior custo de percurso entre uma origem u, o terminal associado w e o destino v. Embora os problemas de alocação de terminais componham uma área bastante ativa nos últimos anos, ainda há poucos trabalhos de aproximação. Para o problema de centros dos p-terminais, nós verificamos um limitante inferior de* 2 *para o fator e obtemos um primeiro algoritmo de aproximação, com fator* 3.

1. Introdução

Problemas de alocação de terminais aparecem em diversas aplicações, quando há a necessidade de satisfazer demandas de fluxo entre pares dos mais variados objetos, como no deslocamento de pessoas, de transporte de *commodities*, ou de transmissão de informação. Nessas situações, ao invés de conectar os objetos (os chamados clientes) diretamente, muitas vezes é desejável a criação de terminais (os chamados *hubs*), com os quais a conexão é mais barata e eficiente. O exemplo clássico é o das malhas aeroportuárias, quando um voo entre entre duas cidades contém uma parada em algum aeroporto de transferência: o problema é como escolher e alocar uma quantidade limitada de terminais, minimizando os custos de conexão. Em outro exemplo, o objetivo é alocar um conjunto de *hubs* em uma rede de computadores, de forma a minimizar a maior latência entre dois nós.

Diversas variantes são consideradas, dependendo se o objetivo é minimizar o custo total de conexão, ou o maior custo de conexão; se instalar um terminal tem um custo, ou há uma quantidade limitada de terminais; se a demanda por uma unidade de fluxo passa

†Pesquisa parcialmente apoiada pelo processo nº 2013/21744-8, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

por um ou mais terminais, etc. Neste trabalho, estamos interessados em uma variante, que denominamos de *problema de centros dos p-terminais*, em que há p terminais disponíveis, cada demanda por fluxo passa por apenas um terminal e o objetivo é minimizar a maior distância entre um nó de origem, o terminal associado e o nó destino de uma demanda.

Embora estes problemas sejam estudados na teoria clássica de localização desde o início do século 20, os problemas de localização e alocação de terminais são estudados mais formalmente apenas a partir da década de oitenta, particularmente com o trabalho de [O'Kelly 1986]. Ao contrário dos problemas clássicos de localização, para os quais há diversos algoritmos de aproximação, os problemas de alocação de terminais foram estudados principalmente por meio de heurísticas e métodos exatos [Farahani et al. 2013].

Poucos algoritmos de aproximação foram propostos para problemas de alocação de terminais. Para uma variante chamada problema de centros dos p-terminais em estrela (*star p-hub center problem*) [Yaman and Elloumi 2012], quando o subgrafo induzido pelos terminais é uma estrela e cada cliente só pode se conectar a um único terminal folha, [Liang 2013] mostrou que o problema é inaproximável por um fator melhor que $1{,}25$ e obteve uma $3{,}5$-aproximação. Quando o objetivo é minimizar a soma dos custos de conexão, uma variante comumente considerada é o problema de terminais e raios de alocação simples (*single allocation hub-and-spoke problem*), quando o fluxo de uma demanda pode percorrer dois ou mais hubs, os p terminais são completamente interconectados e há um fator de desconto α, com $0 \leq \alpha \leq 1$, para conexão entre terminais. [Sohn and Park 1997] mostraram que o problema é NP-difícil mesmo para $p = 3$. [Iwasa et al. 2009] obtiveram uma aproximação com fator 3 e uma aproximação aleatorizada com fator 2.

Neste trabalho, nós damos mais um passo na direção de algoritmos de aproximação para problemas de terminais e apresentamos uma 3-aproximação para o problema de centros dos p-terminais. A principal técnica é um preprocessamento da instância utilizada no chamados *problemas de gargalo*, como o clássico problema dos k-centros [Hochbaum and Shmoys 1986]. Nós observamos que o problema não tem uma aproximação melhor que 2, a não ser que P = NP.

2. Preliminares

Definição No *problema de centros dos p-terminais*, uma instância é dada por um conjunto V, de clientes, uma função de custo de conexão associada $d : V \times V \to \mathbb{R}^+$, um conjunto de pares $D \subseteq V \times V$, que representam demandas por fluxo entre pares de clientes, e um inteiro positivo p. Uma solução é um subconjunto H de V com tamanho p, que representa terminais a serem instalados, e uma atribuição $\phi : D \to H$, que associa cada demanda a um terminal. O objetivo é encontrar uma solução que minimize

$$\max_{uv \in D}\ d(u, \phi(uv)) + d(\phi(uv), v).$$

Nós assumimos que a função d é métrica, isso é, é simétrica e satisfaz a desigualdade triangular $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ para todos $u, v, w \in V$. Observe que para descrever uma solução para o problema, basta obter um conjunto de terminais a serem instalados, já que uma demanda uv sempre será atribuída a um terminal instalado w cujo valor $d(u, w) + d(w, v)$ é mínimo.

Podemos reduzir o k-centros, que não admite fator de aproximação melhor que 2 [Hochbaum and Shmoys 1986]. Dada uma instância (V, k) do k-centros, criamos uma instância do nosso problema com demanda uu para cada $u \in V$ e $p = k$. Obtemos:

Teorema 1. *Suponha que exista uma ρ-aproximação para o Problema de Centros dos p-Terminais com $\rho < 2$, então* $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

3. Uma 3-aproximação

3.1. Algoritmo

Nós podemos interpretar o problema dos p-terminais como um problema de gargalo. Nesses problemas, o valor da solução ótima é dado pelo peso de uma aresta do grafo subjacente, então podemos enumerar todos os valores possíveis e utilizar um preprocessamento para reduzir o problema para o caso particular em que métrica é dada por um grafo com pesos unitários. Embora o valor ótimo no problema dos p-terminais não seja necessariamente a distância entre dois clientes de V, ainda podemos utilizar essa estratégia. Nosso algoritmo é dividido em duas partes: *preprocessamento*, que reduz uma instância para uma instância de um problema auxiliar; e *clustering*, que obtém uma partição dos clientes de tal forma que cada parte tenha um centro e exista um terminal instalado "próximo" ao centro. Cada parte está descrita a seguir. O processo está resumido no Algoritmo 1.

Preprocessamento Dado $\tau \geq 0$, construa o grafo bipartido G_τ entre demandas D e candidatos a terminais V, tal que existe aresta entre $uv \in D$ e $w \in V$ se, e somente se, $d(u, w) + d(w, v) \leq \tau$. O objetivo do subproblema é: ou obter um certificado de que não há um conjunto de p terminais em G_τ cuja vizinhança cubra todas as demandas, ou obter uma solução para o problema original cujo valor é no máximo 3τ. Para $\tau = \mathrm{OPT}$, onde OPT é o valor ótimo, o conjunto dos p terminais em uma solução ótima cobre todas as demandas, assim podemos testar todos os possíveis valores de $\tau \leq \mathrm{OPT}$ e obter uma solução de custo no máximo $3\tau \leq 3\mathrm{OPT}$. Seja $\tau_0 = \max_{uv \in D} d(u, v)$. Trivialmente temos $\mathrm{OPT} \geq \tau_0$, já que o fluxo de cada demanda uv em uma solução ótima é pelo menos $d(u, v)$. Portanto, precisamos testar apenas valores $\tau \geq \tau_0$. Note que para $\tau \geq \tau_0$, cada demanda uv tem pelo menos um vizinho em G_τ.

Clustering Seja $N_{G_\tau}(v)$ o conjunto de vizinhos de v em G_τ. Dizemos que duas demandas uv e $u'v'$ são vizinhas se elas compartilharem um vizinho em G_τ, isto é, se $N_{G_\tau}(uv) \cap N_{G_\tau}(u'v') \neq \emptyset$. O conjunto de clientes é particionado de maneira gulosa, considerando as vizinhanças. Em cada iteração, uma demanda ainda não particionada é selecionada como "centro" e uma nova parte é criada com o centro e todas as demandas vizinhas do centro. O algoritmo termina quando todas as demandas estiverem particionadas. Em seguida, para cada parte com centro uv, um terminal é escolhido entre as adjacências de uv em G_τ. Em particular, note que $u \in N_{G_\tau}(uv)$.

3.2. Análise

Primeiro, obtemos o seguinte lema auxiliar, cuja demonstração segue diretamente da construção do algoritmo.

Lema 2. *Para cada τ, existe um conjunto $F_\tau \subseteq D$ tal que:*

1. *para todo $uv, u'v' \in F_\tau$, com $uv \neq u'v'$, $N_{G_\tau}(uv) \cap N_{G_\tau}(u'v') = \emptyset$;*
2. *para todo $u'v' \in D$, existe $uv \in F_\tau$ tal que $N_{G_\tau}(uv) \cap N_{G_\tau}(u'v') \neq \emptyset$ e $u \in H_\tau$.*

Agora podemos demonstrar a aproximação.

Teorema 3. *O Algoritmo 1 é uma 3-aproximação para o problema de centros dos p-terminais.*

Algoritmo 1: Aproximação para o problema de centros dos p-terminais

Entrada: V, D, p, d

$\tau_0 \leftarrow \max_{uv \in D} d(u,v)$
$A \leftarrow \{d(u,w) + d(w,v) : uv \in D, w \in V,\ d(u,w) + d(w,v) \geq \tau_0\}$
para $\tau \in A$ em ordem crescente **faça**
  Crie o grafo bipartido G_τ
  $D' \leftarrow D$
  $H_\tau \leftarrow \emptyset$
  enquanto $D' \neq \emptyset$ **faça**
    Seja $uv \in D'$
    $H_\tau \leftarrow H_\tau \cup \{u\}$
    $D' \leftarrow D' \setminus \{u'v' \in D' : N_{G_\tau}(uv) \cap N_{G_\tau}(u'v') \neq \emptyset\}$
  se $|H_\tau| \leq p$ **então**
    devolva H_τ

4. Extensões e trabalhos futuros

Ao contrário dos k-centros, para o qual o fator de aproximação corresponde ao limitante de aproximação de 2, para o problema dos p-terminais o fator é 3 e o limitante inferior é 2; uma questão natural é, portanto, se ambos problemas podem ser aproximados pelo mesmo fator, ou se o problema dos p-terminais é mais difícil de aproximar. Em trabalhos futuros pretendemos considerar generalizações do problema, como a variante em que mais de um terminal pode ser percorrido, quando há incentivo no percurso entre terminais.

Referências

[Farahani et al. 2013] Farahani, R. Z., Hekmatfar, M., Arabani, A. B., and Nikbakhsh, E. (2013). Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications. *Computers & Industrial Engineering*, 64(4):1096–1109.

[Hochbaum and Shmoys 1986] Hochbaum, D. S. and Shmoys, D. B. (1986). A Unified Approach to Approximation Algorithms for Bottleneck Problems. *Journal of the ACM*, 33(3):533–550.

[Iwasa et al. 2009] Iwasa, M., Saito, H., and Matsui, T. (2009). Approximation algorithms for the single allocation problem in hub-and-spoke networks and related metric labeling problems. *Discrete Applied Mathematics*, 157(9):2078–2088.

[Liang 2013] Liang, H. (2013). The hardness and approximation of the star-hub center problem. *Operations Research Letters*, 41(2):138–141.

[O'Kelly 1986] O'Kelly, M. E. (1986). The Location of Interacting Hub Facilities. *Transportation Science*, 20(2):92–106.

[Sohn and Park 1997] Sohn, J. and Park, S. (1997). A linear program for the two-hub location problem. *European Journal of Operational Research*, 100(3):617–622.

[Yaman and Elloumi 2012] Yaman, H. and Elloumi, S. (2012). Star p-hub center problem and star p-hub median problem with bounded path lengths. *Computers & Operations Research*, 39(11):2725–2732.