

Caracterizações de convexidades geométricas de grafos

Rafael Teixeira de Araújo¹, Rudini Menezes Sampaio¹

¹Departamento de Computação – Universidade Federal do Ceará (UFC)
60455760 - Fortaleza, CE - Brasil

rafaelteixeira@lia.ufc.br, rudini@lia.ufc.br

Abstract. A graph convexity is geometric if every convex set is the convex hull of its extreme vertices. Several papers have characterized classes of graphs for which a given convexity is geometric, such as the monophonic convexity in chordal graphs, the geodesic convexity in ptolemaic graphs [Farber and Jamison 1986] and the m_3 -convexity in weak-bipolarized graphs [Dragan et al. 1999]. In this paper, we obtain characterizations for the convexities P_3 , P_3^* , P_4^+ and triangle-path. We also obtain results in the opposite direction: is there a graph convexity which is geometric exactly in a given graph class?

Resumo. Uma convexidade de grafos é geométrica se todo conjunto convexo é o fecho convexo de seus vértices extremos. Vários trabalhos têm caracterizado as classes de grafos para os quais uma dada convexidade é geométrica, como a convexidade monofônica em grafos cordais, a convexidade geodésica em grafos ptolemaicos [Farber and Jamison 1986] e a convexidade m_3 em grafos bipolarizados fracos [Dragan et al. 1999]. Nesse artigo, obtemos caracterizações para as convexidades P_3 , P_3^* , P_4^+ e triangle-path. Também obtemos resultados no sentido oposto: dada uma classe de grafos, existe alguma convexidade que só é geométrica nessa classe?

1. Introdução

Uma convexidade de grafos é um par ordenado (G, \mathcal{C}) , onde G é um grafo simples e \mathcal{C} é uma coleção de subconjuntos de $V(G)$ (chamados *conjuntos convexos*) tal que $\emptyset, V(G) \in \mathcal{C}$ e a interseção de dois conjuntos convexos é convexo. Dado um grafo G e uma coleção de caminhos \mathcal{P} em G , a convexidade de caminhos \mathcal{P} é tal que um conjunto $S \subseteq V(G)$ é convexo se e só se todo caminho em \mathcal{P} com extremidades em S está contido em S .

Entre as convexidades de caminho mais conhecidas, destacam-se a convexidade P_3 (caminhos com 3 vértices) [Campos et al. 2015], convexidade *geodésica* (caminhos mínimos) [Araújo et al. 2013], convexidade *monofônica* (caminhos induzidos) [Dourado et al. 2010], convexidade m_3 (caminhos induzidos com mais de 3 vértices) [Dragan et al. 1999] e convexidade *triangle-path* (T-caminhos: caminhos cujas cordas formam triângulos no caminho) [Changat and Mathew 1999].

Dada uma convexidade (G, \mathcal{C}) , o *fecho convexo* $\mathcal{H}(S)$ de um conjunto $S \subseteq V(G)$ é o menor conjunto convexo que contém S . Dado um conjunto convexo $S \subseteq V(G)$, dizemos que $v \in S$ é um *extremo* de S se $S \setminus \{v\}$ também é convexo. Uma convexidade (G, \mathcal{C})

é *geométrica* se satisfaz a propriedade de Minkowski-Krein-Milman: todo conjunto convexo é fecho convexo de seus extremos. Sabe-se que essa propriedade é equivalente a propriedade *Antiexchange*: para todo $S \subseteq V(G)$ e quaisquer vértices distintos $x, y \notin S$, temos que $x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$ implica $y \notin \mathcal{H}(S \cup \{x\})$.

Uma questão bastante estudada é caracterizar a classe de grafos para os quais uma dada convexidade é geométrica.

2. Resultados conhecidos

O seguinte teorema obtém uma caracterização para a convexidade monofônica. Um grafo é *cordal* se não possui *holes* (ciclo induzido de tamanho maior que três).

Teorema 2.1 ([Farber and Jamison 1986]). *A convexidade monofônica de um grafo G é geométrica se e só se G é cordal.*

O seguinte teorema obtém uma caracterização para a convexidade geodésica. Um *3-fan* é um grafo com 5 vértices tal que um vértice é universal e os demais induzem um P_4 . Um grafo é *ptolemaico* se para quaisquer 4 vértices a, b, x, y de uma mesma componente conexa:

$$d(a, b) \cdot d(x, y) \leq d(a, x) \cdot d(b, y) + d(b, x) \cdot d(a, y).$$

Teorema 2.2 ([Farber and Jamison 1986]). *Seja G um grafo. Então as seguintes propriedades são equivalentes: (a) a convexidade geodésica de G é geométrica; (b) G é um grafo ptolemaico; (c) G é cordal e não tem 3-fan induzido; (d) G é cordal e todo caminho induzido é mínimo.*

O teorema abaixo obtém uma caracterização para a convexidade m_3 . Um grafo é *bipolarizado-fraco* se é livre de HHDA (livre de *hole*, *house*, *dominó* e o grafo A).

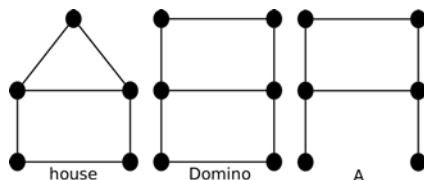


Figura 1. Grafos *house*, *dominó*, A

Teorema 2.3. [Dragan et al. 1999] *A convexidade m_3 de um grafo G é geométrica se e só se G é um grafo bipolarizado fraco.*

3. Resultados novos

Seguindo a sequência desses resultados, nós obtivemos em [Araújo and Sampaio 2013] alguns resultados novos: uma caracterização para as convexidades *triangle-path*, P_3 , P_3^* e P_4^+ .

Dado um grafo G , um conjunto S é P_3^* -convexo, se para todo P_3 induzido abc com $a, c \in S$, então $b \in S$. Similarmente, definimos um conjunto S como sendo P_4^+ -convexo, se para todo P_4 induzido $abcd$ com $a, c, d \in S$, então $b \in S$.

Teorema 3.1. *Seja G um grafo. A convexidade triangle-path de G é geométrica se e só se G é uma floresta. A convexidade P_3 de G é geométrica se e só se G é uma floresta de estrelas. A convexidade P_3^* de G é geométrica se e só se G é um cografo cordal. A convexidade P_4^+ de G é geométrica se e só se G é um cografo.*

Devido a restrição de espaço, faremos apenas as provas para as convexidades P_3 e *triangle-path*.

Prova para Convexidade P_3 . Suponha que a convexidade P_3 é geométrica em G . Se G possui um $K_3 \{x, y, z\}$, temos que $S = \{z\}$ é um conjunto convexo, $x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$ e $y \in \mathcal{H}(S \cup \{x\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de triângulos. Se G possui um C_4 induzido $\{a, b, c, d\}$ com arestas ab, bc, cd, da , temos que $S = \{c, d\}$ é um conjunto convexo pois G é livre de triângulos e portanto não existe vértice adjacente a c e d . Portanto, $a \in \mathcal{H}(S \cup \{b\})$ e $b \in \mathcal{H}(S \cup \{a\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de C_4 . Se G possui um C_5 induzido $\{a, b, c, d, e\}$ com arestas ab, bc, cd, de, ea , temos que $S = \{c, d, e\}$ é um conjunto convexo (pois G não possui K_3 nem C_4 induzido). Portanto, $a \in \mathcal{H}(S \cup \{b\})$ e $b \in \mathcal{H}(S \cup \{a\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de C_5 induzido.

Se G possui um P_4 induzido $wxyz$, então $S = \{w, z\}$ é P_3 -convexo. Isso porque se existisse um vértice u adjacente a w e z , teríamos que ux e uy não seriam arestas (pois G é livre de triângulos) e portanto teríamos o C_5 induzido $\{w, x, y, z, u\}$, uma contradição. Portanto, $x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$ e $y \in \mathcal{H}(S \cup \{x\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de P_4 induzido. Ou seja, G é um cografo livre de K_3 e C_4 .

Sabe-se que todo cografo conexo G é a junção de dois cografos G_1 e G_2 (incluindo todas as arestas entre G_1 e G_2). Se G_1 possui uma aresta ab então teríamos um $K_3 \{abz\}$ com qualquer vértice z de G_2 , uma contradição. Logo, G_1 e G_2 não possuem arestas. Se G_1 e G_2 possuem mais de 2 vértices cada, então teríamos um C_4 induzido $\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$ com quaisquer vértices $u_1, v_1 \in V(G_1)$ e $u_2, v_2 \in V(G_2)$, uma contradição. Portanto, G_1 ou G_2 possui apenas um vértice. Portanto G é uma estrela $K_{1,p}$. Se G é desconexo, então G é uma floresta de estrelas.

Se G é uma estrela com pelo menos 3 vértices e centro c , então c é o único vértice com grau maior que um e portanto todos os P_3 induzidos contêm c . Isso implica que a propriedade *Antiexchange* é satisfeita e portanto a convexidade P_3 é geométrica. \square

Prova para convexidade triangle-path. Suponha que a convexidade *triangle-path* é geométrica em G . Se G possui um K_3 induzido $\{x, y, z\}$, temos que $S = \{z\}$ é um conjunto convexo, $x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$ (pois há o T-caminho yxz entre y e z passando por x com uma única corda yz que forma um triângulo) e $y \in \mathcal{H}(S \cup \{x\})$ (pelo mesmo motivo anterior), o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de triângulos.

Se G possui um ciclo induzido v_1, v_2, \dots, v_k para $k \geq 4$, temos que $S = \{v_2, v_3\}$ é um conjunto T-convexo, pois não existem T-caminhos entre v_2 e v_3 visto que G é livre de triângulos. Note que $v_1 \in \mathcal{H}(S \cup \{v_4\})$ e $v_4 \in \mathcal{H}(S \cup \{v_1\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo G é livre de ciclos induzidos. Como todo ciclo contém um ciclo induzido, temos que G é livre de ciclos. Ou seja G é uma floresta.

Por outro lado, suponha que G é uma floresta. Logo G não contém triângulos. Com isso, todo T-caminho de G é um caminho induzido, e vice-versa. Ou seja, todo conjunto T-convexo de G é monofonicamente convexo, e vice-versa. Isso quer dizer que a convexidade *triangle-path* e a convexidade monofônica são idênticas em G . Como G é uma floresta, então G é cordal, o que implica que a convexidade monofônica é geométrica em G e portanto a convexidade *triangle-path* também é geométrica em G . \square

Também obtivemos resultados no sentido inverso: dada uma classe de grafos, existe uma convexidade que é geométrica apenas nos grafos dessa classe?

Seja H um grafo com pelo menos dois vértices. Dado um grafo G , dizemos que um conjunto $S \subseteq V(G)$ é H -free convexo se para todo $S' \subseteq S$, $|S'| = |V(H)| - 1$ temos que, se $S' \cup \{x\}$ induz um grafo H , então $x \in S$. Dada uma família \mathcal{F} de grafos com pelo menos dois vértices, dizemos que um conjunto $S \subseteq V(G)$ é \mathcal{F} -free convexo se é H -free convexo para todo $H \in \mathcal{F}$.

Teorema 3.2. *A convexidade \mathcal{F} -free é geométrica em G se e só se G é livre de \mathcal{F} .*

Demonstração. Se G não possui nenhum subgrafo induzido $H \in \mathcal{F}$, então por definição todo subconjunto $S \subseteq V(G)$ é H -free convexo. Portanto, a propriedade *Antiexchange* é sempre satisfeita e a convexidade é geométrica.

Suponha que G possui um subgrafo induzido em \mathcal{F} . Seja $H \in \mathcal{F}$ um subgrafo induzido de G com número mínimo de vértices. Sejam S um conjunto de vértices de G que induz H , x, y dois vértices distintos de S e $S' = S \setminus \{x, y\}$. Note que S' é \mathcal{F} -free convexo, pela minimalidade de H . Note ainda que $y \in \mathcal{H}(S' \cup \{x\})$ e que $x \in \mathcal{H}(S' \cup \{y\})$, o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo, a convexidade não é geométrica. \square

Corolário 3.1. *Seja $\mathcal{F} = \{C_{2k+1} : k = 1, 2, 3, \dots\}$ a família infinita dos ciclos ímpares. A convexidade \mathcal{F} -free é geométrica em G se e só se G é bipartido.*

Corolário 3.2. *Seja $\mathcal{F} = \{TK_5, TK_{3,3}\}$, onde T representa topological minor, a família infinita dos grafos que podem ser obtidos a partir do K_5 ou do $K_{3,3}$ através de subdivisão de arestas. A convexidade \mathcal{F} -free é geométrica em G se e só se G é planar.*

Referências

- Araújo, R. T., Sampaio, R., and Szwarcfiter, J. (2013). The convexity of induced paths of order three. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 44(0):109 – 114.
- Araújo, R. T. and Sampaio, R. (2013). Convexidades de caminhos e convexidades geométricas. *Dissertação de Mestrado (MDCC-UFC), Fortaleza, Brazil*.
- Campos, V., Sampaio, R. M., Silva, A., and Szwarcfiter, J. L. (2015). Graphs with few P_4 's under the convexity of paths of order three. *Discrete Applied Mathematics*, 192:28 – 39. 11th Cologne/Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW 2012).
- Changat, M. and Mathew, J. (1999). On triangle path convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, 206(1–3):91 – 95.
- Dourado, M. C., Protti, F., and Szwarcfiter, J. L. (2010). Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, 158(12):1268 – 1274.
- Dragan, F. F., Nicolai, F., and Brandstädt, A. (1999). Convexity and HHD-free graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 12(1):119–135 (electronic).
- Farber, M. and Jamison, R. (1986). Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 7(3):433–444.