

# Caracterizações de convexidades geométricas de grafos

Rafael Teixeira de Araújo<sup>1</sup>, Rudini Menezes Sampaio<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Computação – Universidade Federal do Ceará (UFC)  
60455760 - Fortaleza, CE - Brasil

rafaelteixeira@lia.ufc.br, rudini@lia.ufc.br

**Abstract.** A graph convexity is geometric if every convex set is the convex hull of its extreme vertices. Several papers have characterized classes of graphs for which a given convexity is geometric, such as the monophonic convexity in chordal graphs, the geodesic convexity in ptolemaic graphs [Farber and Jamison 1986] and the  $m_3$ -convexity in weak-bipolarized graphs [Dragan et al. 1999]. In this paper, we obtain characterizations for the convexities  $P_3$ ,  $P_3^*$ ,  $P_4^+$  and triangle-path. We also obtain results in the opposite direction: is there a graph convexity which is geometric exactly in a given graph class?

**Resumo.** Uma convexidade de grafos é geométrica se todo conjunto convexo é o fecho convexo de seus vértices extremos. Vários trabalhos têm caracterizado as classes de grafos para os quais uma dada convexidade é geométrica, como a convexidade monofônica em grafos cordais, a convexidade geodésica em grafos ptolemaicos [Farber and Jamison 1986] e a convexidade  $m_3$  em grafos bipolarizados fracos [Dragan et al. 1999]. Nesse artigo, obtemos caracterizações para as convexidades  $P_3$ ,  $P_3^*$ ,  $P_4^+$  e triangle-path. Também obtemos resultados no sentido oposto: dada uma classe de grafos, existe alguma convexidade que só é geométrica nessa classe?

## 1. Introdução

Uma convexidade de grafos é um par ordenado  $(G, \mathcal{C})$ , onde  $G$  é um grafo simples e  $\mathcal{C}$  é uma coleção de subconjuntos de  $V(G)$  (chamados *conjuntos convexos*) tal que  $\emptyset, V(G) \in \mathcal{C}$  e a interseção de dois conjuntos convexos é convexo. Dado um grafo  $G$  e uma coleção de caminhos  $\mathcal{P}$  em  $G$ , a convexidade de caminhos  $\mathcal{P}$  é tal que um conjunto  $S \subseteq V(G)$  é convexo se e só se todo caminho em  $\mathcal{P}$  com extremidades em  $S$  está contido em  $S$ .

Entre as convexidades de caminho mais conhecidas, destacam-se a convexidade  $P_3$  (caminhos com 3 vértices) [Campos et al. 2015], convexidade *geodésica* (caminhos mínimos) [Araújo et al. 2013], convexidade *monofônica* (caminhos induzidos) [Dourado et al. 2010], convexidade  $m_3$  (caminhos induzidos com mais de 3 vértices) [Dragan et al. 1999] e convexidade *triangle-path* (T-caminhos: caminhos cujas cordas formam triângulos no caminho) [Changat and Mathew 1999].

Dada uma convexidade  $(G, \mathcal{C})$ , o *fecho convexo*  $\mathcal{H}(S)$  de um conjunto  $S \subseteq V(G)$  é o menor conjunto convexo que contém  $S$ . Dado um conjunto convexo  $S \subseteq V(G)$ , dizemos que  $v \in S$  é um *extremo* de  $S$  se  $S \setminus \{v\}$  também é convexo. Uma convexidade  $(G, \mathcal{C})$

é *geométrica* se satisfaz a propriedade de Minkowski-Krein-Milman: todo conjunto convexo é fecho convexo de seus extremos. Sabe-se que essa propriedade é equivalente a propriedade *Antiexchange*: para todo  $S \subseteq V(G)$  e quaisquer vértices distintos  $x, y \notin S$ , temos que  $x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$  implica  $y \notin \mathcal{H}(S \cup \{x\})$ .

Uma questão bastante estudada é caracterizar a classe de grafos para os quais uma dada convexidade é geométrica.

## 2. Resultados conhecidos

O seguinte teorema obtém uma caracterização para a convexidade monofônica. Um grafo é *cordal* se não possui *holes* (ciclo induzido de tamanho maior que três).

**Teorema 2.1** ([Farber and Jamison 1986]). *A convexidade monofônica de um grafo  $G$  é geométrica se e só se  $G$  é cordal.*

O seguinte teorema obtém uma caracterização para a convexidade geodésica. Um *3-fan* é um grafo com 5 vértices tal que um vértice é universal e os demais induzem um  $P_4$ . Um grafo é *ptolemaico* se para quaisquer 4 vértices  $a, b, x, y$  de uma mesma componente conexa:

$$d(a, b) \cdot d(x, y) \leq d(a, x) \cdot d(b, y) + d(b, x) \cdot d(a, y).$$

**Teorema 2.2** ([Farber and Jamison 1986]). *Seja  $G$  um grafo. Então as seguintes propriedades são equivalentes: (a) a convexidade geodésica de  $G$  é geométrica; (b)  $G$  é um grafo ptolemaico; (c)  $G$  é cordal e não tem 3-fan induzido; (d)  $G$  é cordal e todo caminho induzido é mínimo.*

O teorema abaixo obtém uma caracterização para a convexidade  $m_3$ . Um grafo é *bipolarizado-fraco* se é livre de HHDA (livre de *hole*, *house*, *dominó* e o grafo  $A$ ).

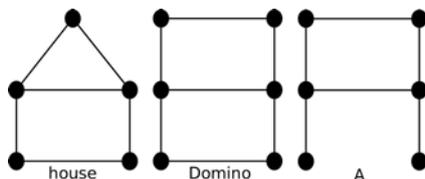


Figura 1. Grafos *house*, *dominó*,  $A$

**Teorema 2.3.** [Dragan et al. 1999] *A convexidade  $m_3$  de um grafo  $G$  é geométrica se e só se  $G$  é um grafo bipolarizado fraco.*

## 3. Resultados novos

Seguindo a sequência desses resultados, nós obtivemos em [Araújo and Sampaio 2013] alguns resultados novos: uma caracterização para as convexidades *triangle-path*,  $P_3$ ,  $P_3^*$  e  $P_4^+$ .

Dado um grafo  $G$ , um conjunto  $S$  é  $P_3^*$ -convexo, se para todo  $P_3$  induzido  $abc$  com  $a, c \in S$ , então  $b \in S$ . Similarmente, definimos um conjunto  $S$  como sendo  $P_4^+$ -convexo, se para todo  $P_4$  induzido  $abcd$  com  $a, c, d \in S$ , então  $b \in S$ .

**Teorema 3.1.** *Seja  $G$  um grafo. A convexidade triangle-path de  $G$  é geométrica se e só se  $G$  é uma floresta. A convexidade  $P_3$  de  $G$  é geométrica se e só se  $G$  é uma floresta de estrelas. A convexidade  $P_3^*$  de  $G$  é geométrica se e só se  $G$  é um cografo cordal. A convexidade  $P_4^+$  de  $G$  é geométrica se e só se  $G$  é um cografo.*

Devido a restrição de espaço, faremos apenas as provas para as convexidades  $P_3$  e *triangle-path*.

*Prova para Convexidade  $P_3$ .* Suponha que a convexidade  $P_3$  é geométrica em  $G$ . Se  $G$  possui um  $K_3 \{x, y, z\}$ , temos que  $S = \{z\}$  é um conjunto convexo,  $x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$  e  $y \in \mathcal{H}(S \cup \{x\})$ , o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo  $G$  é livre de triângulos. Se  $G$  possui um  $C_4$  induzido  $\{a, b, c, d\}$  com arestas  $ab, bc, cd, da$ , temos que  $S = \{c, d\}$  é um conjunto convexo pois  $G$  é livre de triângulos e portanto não existe vértice adjacente a  $c$  e  $d$ . Portanto,  $a \in \mathcal{H}(S \cup \{b\})$  e  $b \in \mathcal{H}(S \cup \{a\})$ , o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo  $G$  é livre de  $C_4$ . Se  $G$  possui um  $C_5$  induzido  $\{a, b, c, d, e\}$  com arestas  $ab, bc, cd, de, ea$ , temos que  $S = \{c, d, e\}$  é um conjunto convexo (pois  $G$  não possui  $K_3$  nem  $C_4$  induzido). Portanto,  $a \in \mathcal{H}(S \cup \{b\})$  e  $b \in \mathcal{H}(S \cup \{a\})$ , o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo  $G$  é livre de  $C_5$  induzido.

Se  $G$  possui um  $P_4$  induzido  $wxyz$ , então  $S = \{w, z\}$  é  $P_3$ -convexo. Isso porque se existisse um vértice  $u$  adjacente a  $w$  e  $z$ , teríamos que  $ux$  e  $uy$  não seriam arestas (pois  $G$  é livre de triângulos) e portanto teríamos o  $C_5$  induzido  $\{w, x, y, z, u\}$ , uma contradição. Portanto,  $x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$  e  $y \in \mathcal{H}(S \cup \{x\})$ , o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo  $G$  é livre de  $P_4$  induzido. Ou seja,  $G$  é um cografo livre de  $K_3$  e  $C_4$ .

Sabe-se que todo cografo conexo  $G$  é a junção de dois cografos  $G_1$  e  $G_2$  (incluindo todas as arestas entre  $G_1$  e  $G_2$ ). Se  $G_1$  possui uma aresta  $ab$  então teríamos um  $K_3 \{abz\}$  com qualquer vértice  $z$  de  $G_2$ , uma contradição. Logo,  $G_1$  e  $G_2$  não possuem arestas. Se  $G_1$  e  $G_2$  possuem mais de 2 vértices cada, então teríamos um  $C_4$  induzido  $\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$  com quaisquer vértices  $u_1, v_1 \in V(G_1)$  e  $u_2, v_2 \in V(G_2)$ , uma contradição. Portanto,  $G_1$  ou  $G_2$  possui apenas um vértice. Portanto  $G$  é uma estrela  $K_{1,p}$ . Se  $G$  é desconexo, então  $G$  é uma floresta de estrelas.

Se  $G$  é uma estrela com pelo menos 3 vértices e centro  $c$ , então  $c$  é o único vértice com grau maior que um e portanto todos os  $P_3$  induzidos contêm  $c$ . Isso implica que a propriedade *Antiexchange* é satisfeita e portanto a convexidade  $P_3$  é geométrica.  $\square$

*Prova para convexidade triangle-path.* Suponha que a convexidade *triangle-path* é geométrica em  $G$ . Se  $G$  possui um  $K_3$  induzido  $\{x, y, z\}$ , temos que  $S = \{z\}$  é um conjunto convexo,  $x \in \mathcal{H}(S \cup \{y\})$  (pois há o T-caminho  $yxz$  entre  $y$  e  $z$  passando por  $x$  com uma única corda  $yz$  que forma um triângulo) e  $y \in \mathcal{H}(S \cup \{x\})$  (pelo mesmo motivo anterior), o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo  $G$  é livre de triângulos.

Se  $G$  possui um ciclo induzido  $v_1, v_2, \dots, v_k$  para  $k \geq 4$ , temos que  $S = \{v_2, v_3\}$  é um conjunto T-convexo, pois não existem T-caminhos entre  $v_2$  e  $v_3$  visto que  $G$  é livre de triângulos. Note que  $v_1 \in \mathcal{H}(S \cup \{v_4\})$  e  $v_4 \in \mathcal{H}(S \cup \{v_1\})$ , o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo  $G$  é livre de ciclos induzidos. Como todo ciclo contém um ciclo induzido, temos que  $G$  é livre de ciclos. Ou seja  $G$  é uma floresta.

Por outro lado, suponha que  $G$  é uma floresta. Logo  $G$  não contém triângulos. Com isso, todo T-caminho de  $G$  é um caminho induzido, e vice-versa. Ou seja, todo conjunto T-convexo de  $G$  é monofonicamente convexo, e vice-versa. Isso quer dizer que a convexidade *triangle-path* e a convexidade monofônica são idênticas em  $G$ . Como  $G$  é uma floresta, então  $G$  é cordal, o que implica que a convexidade monofônica é geométrica em  $G$  e portanto a convexidade *triangle-path* também é geométrica em  $G$ .  $\square$

Também obtivemos resultados no sentido inverso: dada uma classe de grafos, existe uma convexidade que é geométrica apenas nos grafos dessa classe?

Seja  $H$  um grafo com pelo menos dois vértices. Dado um grafo  $G$ , dizemos que um conjunto  $S \subseteq V(G)$  é  $H$ -free convexo se para todo  $S' \subseteq S$ ,  $|S'| = |V(H)| - 1$  temos que, se  $S' \cup \{x\}$  induz um grafo  $H$ , então  $x \in S$ . Dada uma família  $\mathcal{F}$  de grafos com pelo menos dois vértices, dizemos que um conjunto  $S \subseteq V(G)$  é  $\mathcal{F}$ -free convexo se é  $H$ -free convexo para todo  $H \in \mathcal{F}$ .

**Teorema 3.2.** *A convexidade  $\mathcal{F}$ -free é geométrica em  $G$  se e só se  $G$  é livre de  $\mathcal{F}$ .*

*Demonstração.* Se  $G$  não possui nenhum subgrafo induzido  $H \in \mathcal{F}$ , então por definição todo subconjunto  $S \subseteq V(G)$  é  $H$ -free convexo. Portanto, a propriedade *Antiexchange* é sempre satisfeita e a convexidade é geométrica.

Suponha que  $G$  possui um subgrafo induzido em  $\mathcal{F}$ . Seja  $H \in \mathcal{F}$  um subgrafo induzido de  $G$  com número mínimo de vértices. Sejam  $S$  um conjunto de vértices de  $G$  que induz  $H$ ,  $x, y$  dois vértices distintos de  $S$  e  $S' = S \setminus \{x, y\}$ . Note que  $S'$  é  $\mathcal{F}$ -free convexo, pela minimalidade de  $H$ . Note ainda que  $y \in \mathcal{H}(S' \cup \{x\})$  e que  $x \in \mathcal{H}(S' \cup \{y\})$ , o que contradiz a propriedade *Antiexchange*. Logo, a convexidade não é geométrica.  $\square$

**Corolário 3.1.** *Seja  $\mathcal{F} = \{C_{2k+1} : k = 1, 2, 3, \dots\}$  a família infinita dos ciclos ímpares. A convexidade  $\mathcal{F}$ -free é geométrica em  $G$  se e só se  $G$  é bipartido.*

**Corolário 3.2.** *Seja  $\mathcal{F} = \{TK_5, TK_{3,3}\}$ , onde  $T$  representa topological minor, a família infinita dos grafos que podem ser obtidos a partir do  $K_5$  ou do  $K_{3,3}$  através de subdivisão de arestas. A convexidade  $\mathcal{F}$ -free é geométrica em  $G$  se e só se  $G$  é planar.*

## Referências

- Araújo, R. T., Sampaio, R., and Szwarcfiter, J. (2013). The convexity of induced paths of order three. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 44(0):109 – 114.
- Araújo, R. T. and Sampaio, R. (2013). Convexidades de caminhos e convexidades geométricas. *Dissertação de Mestrado (MDCC-UFC), Fortaleza, Brazil*.
- Campos, V., Sampaio, R. M., Silva, A., and Szwarcfiter, J. L. (2015). Graphs with few  $P_4$ 's under the convexity of paths of order three. *Discrete Applied Mathematics*, 192:28 – 39. 11th Cologne/Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW 2012).
- Changat, M. and Mathew, J. (1999). On triangle path convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, 206(1–3):91 – 95.
- Dourado, M. C., Protti, F., and Szwarcfiter, J. L. (2010). Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, 158(12):1268 – 1274.
- Dragan, F. F., Nicolai, F., and Brandstädt, A. (1999). Convexity and HHD-free graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 12(1):119–135 (electronic).
- Farber, M. and Jamison, R. (1986). Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 7(3):433–444.