

# X Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores

## Aplicação do Processamento Paralelo em Problemas de Predição de Fenômenos Meteorológicos: O Problema da Frente Fria

Rodrigo A.A. Ramos Galeano

Eugenius Kaszkurewicz

Djalma M. Falcão

NACAD-COPPE/UFRJ – Caixa Postal 68516 CEP 21945-970

Rio de Janeiro, RJ Tel.: (021) 290-7116 Fax: 290-6626

E.Mail: <eugenius, falcão, galeano@coep.ufrj.br>

### Resumo

O presente trabalho apresenta os resultados computacionais de simulações numéricas de um problema relacionado à evolução de uma frente fria, com ênfase na paralelização do método numérico empregado. Os estudos experimentais indicam o sucesso da paralelização proposta com a obtenção de tempos de processamento reduzidos.

### Abstract

This paper presents computational results obtained from the numerical simulations of weather models, in a problem related with the evolution of a cold front. Emphasis is given on the parallelization of the numerical method employed. Experimental studies indicate the success of the proposed parallelization for obtaining reduced processing times.

### 1. Introdução.

A predição de fenômenos meteorológicos constitui-se, na atualidade, em um dos campos da ciência que possuem maior influência na qualidade de vida da humanidade. No processo de elaboração dessas predições distinguem-se as seguintes etapas [1]:

- **Aquisição de dados:** as informações são obtidas a partir de estações meteorológicas e dos dispositivos de medição.
- **Pré-processamento de dados:** as informações disponíveis são analisadas e utilizadas na obtenção de um conjunto de condições iniciais necessárias para a resolução numérica dos modelos matemáticos.
- **Resolução numérica dos modelos matemáticos:** a simulação computacional do comportamento físico da atmosfera fornece as predições desejadas.

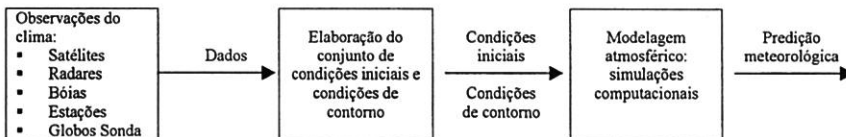


Figura 1: Etapas da elaboração de previsões meteorológicas via resolução de modelos matemáticos

No contexto do presente trabalho, a terceira das etapas citadas acima é abordada sob a perspectiva da computação paralela, buscando explorar as vantagens, da mesma, na busca de menores tempos de processamento. Na atualidade, existem em operação vários pacotes computacionais desenvolvidos para serem implementados em supercomputadores e workstations, podendo ser citados a título de exemplo o RAMS (*Regional Atmospheric Modeling System*, Universidade de Colorado, U.S.A.), o MM5 (*Mesoscale Model 5*,

## X Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores

Universidade de Pennsylvania, U.S.A) e o NORAP6 (*Navy Operational Regional Prediction System Version 6*, do Exército dos Estados Unidos)[2].

Historicamente, a predição de fenômenos meteorológicos tem constituído em uma das maiores aplicações da resolução de modelos hidrodinâmicos em computadores de grande porte; tais modelos são constituídos por equações diferenciais a derivadas parciais, para serem resolvidos usando métodos numéricos adequados [3].

A complexidade e o custo computacional da resolução desses modelos são dependentes de vários fatores, sendo um deles o grau de refinamento utilizado no domínio de resolução, fato que determina o número de equações envolvidas. É evidente que a qualidade da predição obtida é tanto melhor quanto melhores forem os refinamentos da grade. Assim, uma vez feita a discretização das PDEs e, para um grau de refinamento elevado, pode surgir a necessidade de se resolver sistemas com um elevado número de equações que podem chegar até a ordem de  $10^6$ . Nessas situações, o processamento paralelo é uma opção válida na busca de se minimizar o tempo de processamento, uma vez que o fator tempo de processamento é vital para que o prognóstico seja completado em tempo hábil.

No presente trabalho, é realizada uma análise e a implementação da resolução paralela de um problema na área da predição meteorológica: o chamado problema da "Frente Fria". Na Seção 2 é apresentado o problema, com a descrição do modelo matemático e as considerações básicas sobre o mesmo. O método de resolução computacional do modelo apresenta-se na Seção 3, tanto num ambiente sequencial como em um ambiente paralelo, enquanto que na Seção 4 são mostrados os resultados experimentais considerando um problema exemplo. Finalmente, as conclusões são apresentadas na Seção 5.

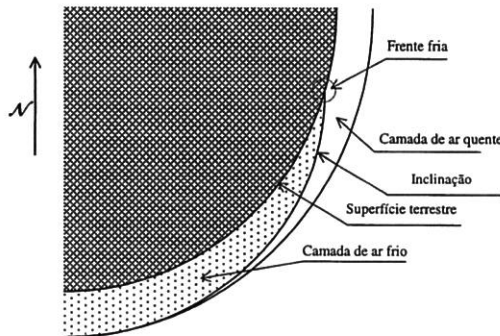


Figura 2: Esquema da Frente Fria

### 2. O problema da Frente Fria.

O problema a ser tratado no contexto de presente trabalho consiste na análise do deslocamento de uma camada de ar frio polar sobre a superfície do globo terrestre [4]. A camada de ar frio está separada da camada de ar superior (mais quente) por uma dada interface chamada de frente. A interseção da frente com a superfície terrestre é usualmente uma linha ondulada chamada *frente fria*, ou também, *frente quente*, em função do sentido do deslocamento da mesma. A frente possui uma pequena inclinação, no sentido sul, de

## X Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores

usualmente uma pequena fração de grau, de modo que no polo a altura da camada de ar frio corresponde a vários quilômetros. A Figura 2 apresenta um gráfico ilustrativo.

Na aproximação mais simples, a camada polar está em equilíbrio, e são assumidas as seguintes hipóteses [5]:

- Os cálculos são feitos considerando uma pequena porção da superfície do globo terrestre, de modo que a curvatura da mesma e as conseqüentes variações das forças de Coriolis podem ser desprezadas. Assim, o parâmetro de Coriolis é considerado igual a  $f = 2\omega \sin \varphi$ , onde  $\varphi$  é a latitude.
- O ar quente na parte superior possui uma velocidade constante na direção oeste  $\rightarrow$  leste relativa à camada inferior de ar frio, de modo que a frente constitui uma discontinuidade da componente oeste  $\rightarrow$  leste do vento, assim como da temperatura, como exposto mais acima.
- Cada camada possui densidade constante.
- As acelerações verticais são desprezadas, de modo que a pressão em cada ponto é dada pela fórmula hidrostática elementar.
- A compressibilidade é desprezada, uma vez que a velocidade do vento é muito menor que a velocidade do som.
- A camada de ar quente não é influenciada pelas modificações na camada de ar frio.
- O fluxo é considerado periódico em longitude com um período tal que as magnitudes são idênticas em pontos correspondentes aos limites leste e oeste. No limite sul é assumido um *rigid wall*, ou seja, a camada de ar frio possui velocidade zero e altura constante.

Com a utilização destas hipóteses na elaboração do modelo matemático da frente fria, chega-se ao seguinte sistema de equações diferenciais parciais [4]:

$$\frac{Du}{Dt} + g \left( 1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \frac{\partial h}{\partial X} = fv \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + g \left( 1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \frac{\partial h}{\partial Y} = f \left( \frac{\rho'}{\rho} \bar{u} - u \right) \quad (2)$$

$$\frac{Dh}{Dt} = 0 \quad (3)$$

onde o operador  $D/Dt$  é dado por

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial X} + v \frac{\partial}{\partial Y}$$

X e Y são as coordenadas Cartesianas na direção oeste-leste e sul-norte respectivamente;  $u = u(X, Y, t)$  e  $v = v(X, Y, t)$  são as componentes, nas direções X e Y, da velocidade do vento e  $h = h(X, Y, t)$  é a altura da camada de ar frio. As outras quantidades são constantes:  $\rho / \rho'$  é a relação de densidades das camadas do ar quente e do ar frio,  $\bar{u}$  é a velocidade (constante) no sentido leste  $\rightarrow$  oeste da camada de ar quente, e  $g$  é a aceleração da gravidade.

O domínio de resolução do sistema de equações é mostrado na Figura 3. Seja C a curva onde a frente intercepta a superfície (no caso, o plano X-Y) no instante de tempo  $t$ , ou seja,  $h(X, Y, t) = 0$ . Os pontos sobre a curva C são identificados usando coordenadas  $(\xi_i, \eta_i) = \xi_i = \xi_i(t)$ , com a velocidade do vento correspondente  $(u_i, v_i) = v_i = v_i(t)$ . As condições efetivas de contorno para a curva C são obtidas a partir das equações (1) e (2), e são as seguintes:

## X Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores

$$\frac{d}{dt} \xi_i = v_i \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} v_i = -g \left( 1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \nabla h + \gamma v_i + K \quad (5)$$

onde

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{bmatrix}, \quad K = f \frac{\rho'}{\rho} \bar{u} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e onde } \nabla h \text{ tem que ser calculado em } \xi_i.$$

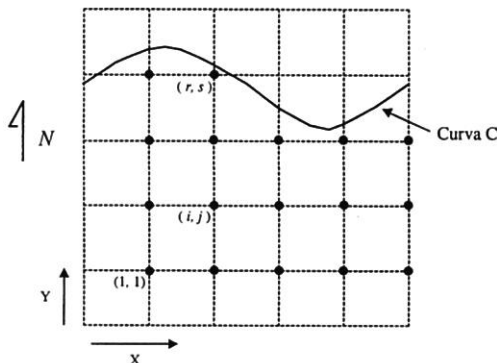


Figura 3: domínio de resolução

A curva C pode ser ajustada por algum tipo de curva conhecida, em função das características da frente. Nos estudos experimentais do presente trabalho foi feita uma aproximação da curva C por uma curva senoidal, com um período igual à dimensão (leste – oeste) da grade.

### 3. Resolução numérica do problema.

O sistema de equações (1) a (3), assim como as condições de contorno na curva C foram discretizados convenientemente por aproximações a diferenças finitas de modo a obter um sistema de equações algébricas não lineares, o qual por sua vez foi resolvido usando o método Newton desacoplado por blocos [6].

#### 3.1. Discretização das equações.

Aplicando o esquema de aproximações da classe *forward difference* nas equações (4) e (5), obtém-se as seguintes expressões discretizadas:

$$\xi_i^{n+1} - \xi_i^n = \frac{1}{2} (v_i^{n+1} + v_i^n) \Delta t \quad (6)$$

$$v_i^{n+1} - v_i^n = \frac{1}{2} (\psi_i^{n+1} + \psi_i^n) \Delta t \quad (7)$$

onde  $\psi$  denota o lado direito da equação (5). Assim, o sistema linear obtido é resolvido e a solução obtida fornece as velocidades em cada ponto da curva C.

No processo de discretização das equações (1) a (3), é aplicado um esquema de aproximações do tipo *centered difference* na direção de X e na direção de Y, e um esquema de

# X Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores

*backward difference* na direção de  $t$ . Assim, a molécula computacional aplicada é a ilustrada na Figura 4:

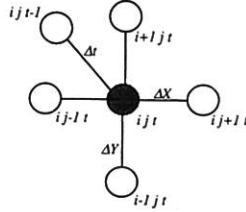


Figura 4: Molécula Computacional

As equações discretizadas, para cada ponto da grade, ficam com a seguinte forma:

Da equação (1):

$$\phi_{ij}^I(\cdot) = \frac{u_{ij}^k - u_{ij}^{k-1}}{\Delta t} + u_{ij}^k \frac{u_{ij+1}^k - u_{ij-1}^{k-1}}{2\Delta x} + v_{ij}^k \frac{u_{i+1j}^k - u_{i-1j}^{k-1}}{2\Delta y} + g \left( 1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \frac{(h_{ij+1}^k - h_{ij-1}^k)}{2\Delta x} - f v_{ij}^k = 0 \quad (8)$$

Da equação (2):

$$\phi_{ij}^{II}(\cdot) = \frac{v_{ij}^k - v_{ij}^{k-1}}{\Delta t} + u_{ij}^k \frac{v_{ij+1}^k - v_{ij-1}^{k-1}}{2\Delta x} + v_{ij}^k \frac{v_{i+1j}^k - v_{i-1j}^{k-1}}{2\Delta y} + g \left( 1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \frac{(h_{ij+1}^k - h_{ij-1}^k)}{2\Delta y} - f \frac{\rho'}{\rho} \bar{u} + f u_{ij}^k = 0 \quad (9)$$

Da equação (3):

$$\phi_{ij}^{III}(\cdot) = \frac{h_{ij}^k - h_{ij}^{k-1}}{\Delta t} + u_{ij}^k \frac{h_{ij+1}^k - h_{ij-1}^{k-1}}{2\Delta x} + v_{ij}^k \frac{h_{i+1j}^k - h_{i-1j}^{k-1}}{2\Delta y} = 0 \quad (10)$$

Usando uma notação compacta, o sistema discretizado pode ser expresso na forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{F}: \mathfrak{R}^{3n} \mapsto \mathfrak{R}^{3n} \quad (11)$$

onde  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [\phi_{11}^I(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_{rs}^I(\mathbf{x}) \quad \phi_{11}^{II}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_{rs}^{II}(\mathbf{x}) \quad \phi_{11}^{III}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_{rs}^{III}(\mathbf{x})]^T$

e onde  $\mathbf{x} = [u_{11}^k \quad \dots \quad u_{rs}^k \quad v_{11}^k \quad \dots \quad v_{rs}^k \quad h_{11}^k \quad \dots \quad h_{rs}^k]^T$ ,  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{3n}$

sendo  $n$  é o número de pontos da grade a serem resolvidos.

### 3.2. Resolução do sistema de diferenças finitas.

Existe na literatura uma grande variedade de métodos de resolução de sistemas de equações não lineares, tanto sequencialmente como em forma paralela. Os métodos paralelos enfocam o problema sob os mais variados pontos de vista, como, por exemplo:

- Atribuição de distintos grupos de pontos da grade a cada processador para sua resolução local [7].
- Execução em cada processador de alguma etapa ou etapas do método numérico empregado[8].
- Decomposição do algoritmo de resolução em blocos [6].

## X Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores

Um dos métodos mais efetivos e populares na resolução de sistemas de equações não lineares é o método de Newton - Raphson, o qual pode ser implementado com sucesso aplicando as filosofias citadas acima, como pode ser visto nas referências correspondentes. O método se caracteriza pela seguinte expressão:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{J}(\mathbf{x}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^k),$$

onde  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)$  é o Jacobiano da função  $\mathbf{F}$ , calculado no ponto  $\mathbf{x}^k$ . Evidentemente, o maior esforço computacional será feito na "inversão" do Jacobiano (que corresponde à resolução de um sistema algébrico linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ), lembrando que a dimensão do Jacobiano será, tomando como exemplo do caso da frente fria, igual a  $3n$ , onde  $n$  é o número de pontos da grade. Na figura 5 é mostrada a configuração do Jacobiano de dimensão  $99 \times 99$  para um problema da Frente Fria típico, com uma dimensão da grade de  $7 \times 7$ , com 33 pontos a serem calculados. Observa-se que, fazendo uma decomposição em 9 blocos, a maioria dos elementos ficam confinados nos blocos diagonais, e experimentalmente pode-se verificar que os mesmos são fracamente acoplados, ou seja, a matriz Jacobiano é geralmente bloco-diagonal dominante.

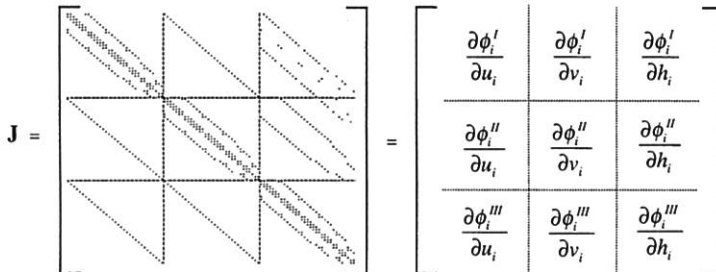


Figura 5: matriz Jacobiano

Uma vez que o Jacobiano possui estas características, é possível desprezar os blocos não diagonais sem comprometer significativamente a precisão do resultado [9]. Sendo assim a aplicação do método de Newton - Raphson desacoplado por blocos torna-se uma opção adequada para se aproveitar as vantagens do processamento paralelo [6]. Este método iterativo está descrito pela seguinte expressão:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1^{k+1} = \mathbf{x}_1^k - \mathbf{J}_1^{-1}(\mathbf{x}^k) \mathbf{F}_1(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{x}_2^{k+1} = \mathbf{x}_2^k - \mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{x}^k) \mathbf{F}_2(\mathbf{x}^k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_p^{k+1} = \mathbf{x}_p^k - \mathbf{J}_p^{-1}(\mathbf{x}^k) \mathbf{F}_p(\mathbf{x}^k) \end{cases}, \quad \mathbf{x}^{k+1} = [\mathbf{x}_1^{k+1} \quad \mathbf{x}_2^{k+1} \quad \dots \quad \mathbf{x}_p^{k+1}]^T \quad (12)$$

$\mathbf{x}_i^{k+1} \in \mathfrak{R}^{n_i}, \quad \sum_1^p n_i = n$

onde  $p$  corresponde ao número de blocos em que o sistema será decomposto e  $k+1$  é a nova iteração a ser calculada. Os vetores  $\mathbf{x}_i^{k+1}$  são calculados separadamente, eliminando assim uma

# X Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores

grande quantidade de esforço computacional, já que somente é necessário realizar a resolução dos sistemas bloco diagonais.

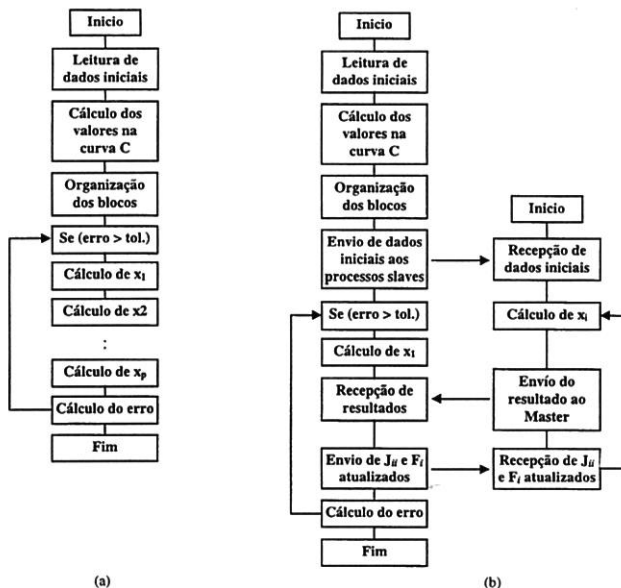


Figura 6: Resolução do sistema (11). (a) Implementação seqüencial e (b) implementação paralela síncrona

A forma de se realizar a partição, ou seja, a atribuição de quais as incógnitas a serem resolvidas nos diferentes processadores, é uma etapa muito importante na implementação do método, já que se existem incógnitas muito dependentes (acopladas) sendo calculadas por processadores diferentes a convergência do método será comprometida. No caso particular da frente fria, surge uma partição natural já percebida na Figura 5, na qual cada um dos 3 grupos de magnitudes semelhantes ( $u$ ,  $v$  e  $h$ ) é calculado em um processador diferente.

O esquema da resolução seqüencial do método de Newton - Raphson desacoplado por blocos é ilustrado na Figura 6. Note que o cálculo dos valores na curva C é realizado previamente, antes da resolução das equações (1) a (3), uma vez que os valores nos pontos da curva, vizinhos a pontos da grade são necessários.

Na Figura 5 (b) observa-se o esquema da implementação paralela do método, com os vetores  $x_i^{k+1}$ , distintos, calculados em processadores diferentes. A configuração da implementação é do tipo *Master - Slave*, com comunicação de resultados realizada de forma síncrona. O cálculo dos pontos da curva C é feita seqüencialmente no processador *Master*. Os processos *slaves* são inicializados pelo *Master* em cada um dos processadores que fazem parte da máquina paralela ou sistema distribuído.

## 4. Experimentos Computacionais

A plataforma computacional utilizada nos estudos experimentais consiste em uma máquina IBM RS/6000 SP-2, com 4 processadores com tecnologia POWER2, funcionando

## X Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores

nas instalações do Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho (NACAD - UFRJ). A codificação dos programas foi realizada em ANSI C, com rotinas de paralelização PVM; a migração dos códigos a outras plataformas paralelas como por exemplo, o MPI, está sendo implementada atualmente.

A resolução seqüencial assim como a resolução paralela em 3 processadores foi implementada para um problema exemplo típico, com sucessivos refinamentos da grade de modo a avaliar as vantagens alcançadas na decomposição do problema.

No caso exemplo, foi considerada uma grade com a dimensão leste – oeste igual a 700 km; a curva C foi considerada como uma curva senoidal com período  $T=700$  km e amplitude igual a 150 km, sendo a ordenada Y inicial no limite oeste igual a 550 km. Os valores iniciais considerados foram os seguintes:

- Componente da velocidade do vento na direção oeste – leste ( $u$ ): igual a 0 para todos os pontos.
- Componente da velocidade do vento na direção sul – norte ( $v$ ): igual a 0 para todos os pontos.
- Altura da camada de ar frio: no limite sul é considerado uma *rigid wall* com uma altura uniforme de 10 km.

Para os valores iniciais da altura nos pontos da grade, foi realizada uma interpolação a partir de um conjunto de 30 pontos com dados conhecidos, simulando um conjunto de estações meteorológicas. O tempo de predição  $\Delta t$  tomado foi igual a 3 h.

Processador	Tarefa
Master	Cálculo da curva C e do vetor <b>u</b>
Slave 1	Cálculo do vetor <b>v</b>
Slave 2	Cálculo do vetor <b>h</b>

Tabela 1: Atribuição de tarefas

Como foi indicado mais acima, a partição utilizada foi realizada de forma que cada processador resolve um dos 3 grupos de incógnitas ( vetores **u**, **v** ou **h** ) a serem calculados para cada ponto na grade. Assim, como detalhado na Tabela 1, cada processador trabalha num problema de dimensão  $n$ , onde  $n$  é o número de pontos na grade.

Grade	Nº de pontos	Tempo Seqüencial	Tempo Paralelo	Speed - up.
5x5	16	0.15 s	0.42 s	0.40
6x6	24	0.36 s	0.38 s	0.95
7x7	33	0.92	0.72	1.28
8x8	43	1.83	1.21	1.51
9x9	56	3.69	1.96	1.88
10x10	70	7.74	3.74	2.07
11x11	84	13.90	6.14	2.26
12x12	101	22.67	9.8	2.31
13x13	118	35.84	15.34	2.34
14x14	140	59.22	25.33	2.34
15x15	150	84.48	35.55	2.38
16x16	183	154.44	64.84	2.38
17x17	207	214.04	89.32	2.40
18x18	232	334.35	138.86	2.41
19x19	261	457.75	185.71	2.45

Tabela 2: tempos de processamento e speed-up

Na Tabela 2 e na Figuras 7 e 8 é ilustrado o comportamento da implementação em função dos sucessivos refinamentos da grade, com os valores correspondentes de tempo de



# X Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores

computação seqüencial e paralela, assim como os valores de speed-up obtidos, sendo o speed-up definido como a relação entre o tempo de processamento seqüencial e o tempo de processamento paralelo.

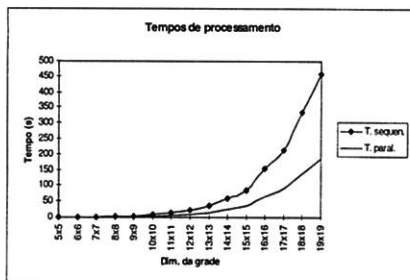


Figura 7: tempos de processamento.

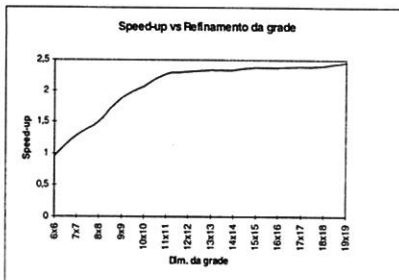


Figura 8: evolução do Speed - up.

Na Figura 7 verifica-se que a inclinação da curva correspondente à implementação paralela é bem menor do que a inclinação da curva do processamento seqüencial, e na medida em que a grade é refinada o valor dessas inclinações tende a ficar constante.

Assim, na Figura 8 pode-se verificar que o valor do speed-up tende para um valor máximo de aproximadamente 2,5, o qual é considerado um valor aceitável.

Finalmente, a Figura 9 representa a situação final da camada de ar frio do problema exemplo para uma grade de 7x7 divisões.

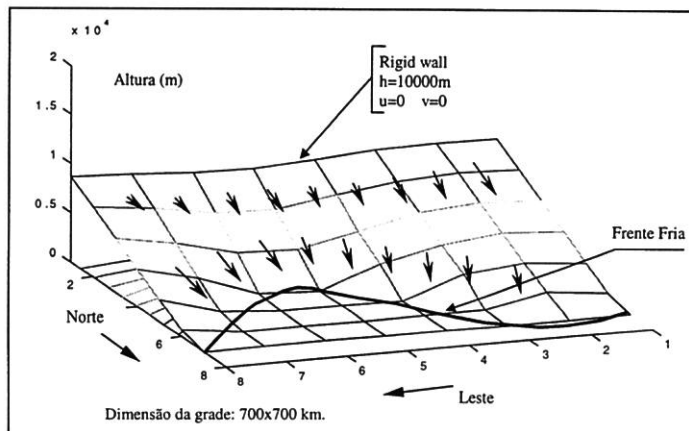


Figura 9: Situação final para um problema exemplo com uma grade 7x7.

## 5. Conclusões.

Na resolução de problemas de predição de fenômenos meteorológicos, o tempo empregado no cálculo é um fator essencial. Portanto é muito importante que se disponha de ferramentas matemáticas e computacionais que trabalhem com a grande dimensão dos

## X Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores

sistemas de equações, dos modelos, em forma eficiente. O processamento paralelo é uma opção já tradicional neste aspecto, e a sua aplicação neste campo cresce em forma constante.

No contexto do presente trabalho foi escolhido o método Newton-Raphson desacoplado por blocos na resolução paralela do problema da frente fria. As características particulares do problema evidenciam uma adequação natural ao paralelismo, com o Jacobiano composto por blocos fracamente acoplados. Os resultados experimentais mostram que a paralelização empregada é eficiente, fornecendo valores de speed-up bastante razoáveis para problemas de grandes dimensões.

### 6. Referencias.

- [1] Christidis Z., Edwards J. and Snook J. (1996). Regional Weather Forecasting in the 1996 Summer Olympic Games Using an IBM SP". IBM Corporation Research, [http://www.research.ibm.com/OlympicsWeather/SP\\_AMS/SP\\_systems.html](http://www.research.ibm.com/OlympicsWeather/SP_AMS/SP_systems.html).
- [2] Ortega J. and Voigt R. (1985). *Solution of Partial Differential Equations on Vector and Parallel Computers*, SIAM, Philadelphia.
- [3] Richtmyer R.D. e Morton K.W. (1995), *Difference Methods for Initial Value Problems*, 2da. Edição. Krieger Publishing Company.
- [4] Stoker J.J. (1953). Dynamical theory for treating the motion of cold and warm fronts in the atmosphere. Report IMM 200, Courant Inst. Math. Sc., New York University.
- [5] Zecevic A.I. e Šiljak D.D. (1992). A Block - Parallel Newton Method via Overlapping Epsilon Decompositions. American Control Conference. Chicago, Illinois.
- [6] Rodriguez B. et al.(1996). Parallelizing Operational Weather Prediction Models for Portable and Fast Execution. Journal of Parallel and Distributed Computing.
- [7] Conforti D. e Musmanno R. (1995). Convergence an Numerical Results for a Parallel Asynchronous Quasi-Newton Method. Journal of Optimization Theory and Applications. Vol 84, No. 2, pp. 293-310.
- [8] Stott B. e Alsaç O. (1974). Fast Decoupled Load Flow. IEEE trans. On Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-93, pp. 859-869.
- [9] Mass. C. F. e Ying-Hwa K. (1998). A Mesoscale Model Intercomparison. Bulletin of the American Meteorological Society, 79, No. 2, pp. 265 – 283.