

Comunicação em hipergrades e hipertoros usando barramentos

A. Ferreira*

CNRS - Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme
 École Normale Supérieure de Lyon
 46, Allée d'Italie
 69364 Lyon Cédex 07 - France
 e-mail: ferreira@lip.ens-lyon.fr

A. Goldman vel Lejbman[†] and S. W. Song[‡]

Departamento de Ciência da Computação
 Instituto de Matemática e Estatística
 Universidade de São Paulo
 C.P. 20570 - São Paulo, SP 01498-970 - Brasil
 e-mail: gold@ime.usp.br, song@ime.usp.br

Sumário

Em sistemas multiprocessadores MIMD de memória distribuída, processadores são ligados por uma rede de interconexão ponto-a-ponto, usualmente modelada por um grafo onde processadores são vértices do grafo e canais de comunicação são as arestas. Como comunicação inter-processador constitui-se frequentemente em sérios gargalos, diversas arquiteturas foram propostas que adicionam à topologia ponto-a-ponto um sistema de barramentos múltiplos. Neste artigo mostramos o interesse de arquiteturas paralelas onde comunicações se realizam somente por barramentos. Vamos introduzir o hiperanel e hipertoro, que são as versões baseadas em barramentos das correspondentes redes ponto-a-ponto. Mostramos como usar conceitos de hipergrafos para modelar a comunicação entre processadores em tais redes de interconexão e damos algoritmos eficientes para as operações de difusão (*broadcast*) e troca completa (*gossiping*). Desenvolvemos uma nova ferramenta chamada *simplificação*. A idéia é construir um grafo, chamada *grafo simplificado*, da topologia original de hipergrafo, de tal modo que ficará fácil descrever e realizar esquemas de comunicação, uma vez que o conceito de simplificação nos permitirá utilizar algoritmos conhecidos para redes usuais, sem barramentos.

Abstract

In most distributed memory MIMD multiprocessors, processors are connected by a point-to-point interconnection network, usually modeled by a graph where processors are nodes and communication links are edges. Since interprocessor communication frequently constitutes serious bottlenecks, several architectures were proposed that enhance point-to-point topologies with the help of multiple bus systems. In this paper we demonstrate the interest of parallel architectures where the communication means are constituted *solely* by busses. We introduce the *hyperpath* and the *hypergrid* architectures, which are the bus-based versions of the well used point-to-point linear and grid interconnection networks. We show how to use hypergraph concepts in order to model inter-processor communication in such networks and we give efficient algorithms for broadcast and gossiping. We developed a new tool called *simplification*. The idea is to construct a graph, to be called *representative graph*, from the original hyper-topology, so that it will become easy to describe and perform communication schemes, because the simplification concept also allows us to partially use some already known communication algorithms for usual networks.

*Parcialmente apoiado por PRC C³ e ANM do CNRS francês.[†]Apoiado por FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) - Proc. No. 92/3991-0[‡]Apoiado por FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) - Proc. No. 93/0603-1 e CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) - Proc. No. 306063/88-3 e Projeto ProTem-CC.

1 Introdução

Em muitos sistemas de multiprocessadores MIMD de memória distribuída, processadores são ligados por uma rede de interconexão ponto-a-ponto, modelado usualmente por um grafo onde processadores são vértices e canais de comunicação são arestas. Em tais arquiteturas, a comunicação interprocessador constitui-se frequentemente em um sério gargalo. A fim de contornar este problema, diversas arquiteturas fazem uso de um sistema de barramentos múltiplos [14, 15, 16]. Tais arquiteturas podem ser modeladas por um hipergrafo [3], em que uma hiperaresta é um conjunto de vértices. Cada barramento da rede é portanto representado por uma hiperaresta.

Em [12, 17], uma rede de interconexão com barramentos múltiplos é considerada onde cada processador é ligado a um grupo de seus vizinhos próximos com alguns processadores pertencendo ao mesmo tempo a mais de um barramento. Redes desse tipo com conectividade sobreposta são particularmente interessantes por várias razões. Primeiro um sistema multiprocessador com um grande número de processadores não pode ser provido de conectividade completa. Além disso, a arquitetura de barramento múltiplo tem a desejável característica de poder expandir facilmente. Enquanto que uma arquitetura do tipo “crossbar” necessita de um número quadrático de chaves, um sistema de barramentos múltiplos de P processadores e B barramentos precisam de apenas BP chaves, embora com conectividade reduzida. Em [17] é apresentado um projeto englobando um processador, sua memória local e as chaves do barramento.

Neste artigo generalizamos as redes de interconexão como anel e toro, com o acréscimo de barramentos. Chamaremos tais redes incrementadas de hiperanel e hipertoro. Mostraremos como usar conceitos de hipergrafos para modelar a comunicação entre processadores em tais redes de interconexão e damos algoritmos eficientes para as operações de difusão (*broadcast*) e troca completa (*gossiping*).

2 Trabalhos anteriores

Como já mencionado antes, Wilkinson [17], Jiang e Smith [12] consideram redes de interconexão com barramentos múltiplos com conectividade sobreposta. Muitos outros trabalhos concentram em grades de dimensão d com acréscimo de barramentos. Bokhari [8] e Aggarwal [1] consideram o uso de um barramento global, ao qual todos os processadores são ligados. O primeiro usa um só barramento global e o segundo autor estende o trabalho para k barramentos globais. Bar-Noy e Peleg [2] e Stout [16] consideram grades com barramentos nas linhas e colunas. Meyer auf der Heide e Pham [14] investigam grades com o uso de uma árvore de barramentos para a computação de operações associativas. Olariu, Schwing e Zhang [15] consideram grades bi-dimensionais com um barramento reconfigurável. Bhuyan e Agrawal [7] apresentam uma generalização da rede de interconexão do hiper cubo.

3 Modelos

3.1 Topologias

Definimos um grafo por $G(V, E)$, onde V é um conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ e E é um conjunto de arestas $\{e_1, \dots, e_m\}$, onde cada aresta $e_i \in V \times V$. Definimos um hipergrafo por $\mathcal{G}(V, E)$, onde V é um conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ e E é um conjunto de hiperarestas $\{e_1, \dots, e_m\}$ onde cada hiperaresta $e_i \subseteq V \mid \bigcup_{e \in E} e = V$. Note que um hipergrafo $\mathcal{G}(V, E)$ onde cada aresta $e \in E$ tem cardinalidade 2 é um grafo. Todo grafo $G(V, E)$ onde $\bigcup_{e \in E} e = V$ é um hipergrafo.

Dado um hipergrafo \mathcal{G} , denotaremos por $D(\mathcal{G})$ o seu diâmetro. Usaremos as seguintes definições. *Transmissão*: envio de uma mensagem de um vértice a um ou mais dos seus vértices adjacentes. *Ciclo* ou *Passo*: conjunto qualquer de transmissões simultâneas.

Em todo o trabalho, por uma questão de uniformidade trabalharemos apenas com grafos e hipergrafos, utilizando as analogias processador-vértice, canal-aresta e barramento-hiperaresta. É interessante notar que com as definições de ciclo e transmissão dadas, este texto se adapta a modelagem de uma rede de interconexão de processadores no modelo constante [11].

3.1.1 Hiper caminhos e Hiperanéis

Topologia: Um caminho de tamanho n é definido por $P_n(V, E)$ onde:

$$\begin{aligned} V &= \{0, \dots, n-1\} \\ e \in E &\leftrightarrow e = \{v_1, v_2\} \mid v_1 = (v_2 - 1) \end{aligned}$$

Generalização: Definimos o hiper caminho $\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$ de tamanho n e ordem m , por:

$$\begin{aligned} V &= \{0, \dots, nm-1\} \\ e \in E &\leftrightarrow e = \{v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_m\} \\ &\text{onde } \begin{cases} v_i = v_j \bmod n \\ v'_i = v'_j \bmod n \\ v_i = (v'_i - 1) \end{cases} \end{aligned}$$

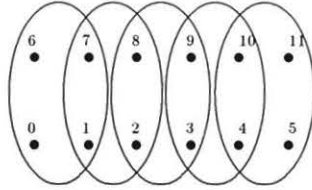


Figura 1: Hiper caminho de tamanho 6 e ordem 2 ($\mathcal{P}_{6,2}$).

Topologia: Um anel de tamanho n é definido por $R_n(V, E)$ onde:

$$\begin{aligned} V &= \{0, \dots, n-1\} \\ e \in E &\leftrightarrow e = \{v_1, v_2\} \mid v_1 = (v_2 - 1) \bmod n \end{aligned}$$

Definimos o hiperanel $\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$, de tamanho n e ordem m , por:

$$\begin{aligned} V &= \{0, \dots, nm-1\} \\ e \in E &\leftrightarrow e = \{v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_m\} \\ &\text{onde } \begin{cases} v_i = v_j \bmod n \\ v'_i = v'_j \bmod n \\ v_i = (v'_i - 1) \bmod n \end{cases} \end{aligned}$$

3.1.2 d -hipergrades e d -hipertoros

Vamos propor duas alternativas para a generalização da grade e do toro. Uma seguindo a idéia das generalizações do caminho e anel, isto é, definindo uma noção de “altura” (ordem) no hipergrafo generalizado. Usando esta idéia, definimos uma p -hipergrade de ordem d por $\mathcal{G}_{n_1 \times \dots \times n_p}^d(V, E)$ onde:

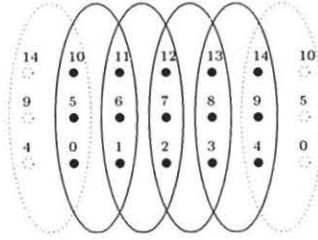


Figura 2: Hiperanel de tamanho 5 e ordem 3 ($\mathcal{R}_{5,3}$).

$$\begin{aligned}
 V &= \{(l_1, \dots, l_p, l_{p+1}) \mid 0 \leq l_j < n_j, 1 \leq j \leq p, 0 \leq l_{p+1} < d\} \\
 e \in E &\Leftrightarrow e = \{v_1, \dots, v_d, v'_1, \dots, v'_d\} \\
 \text{onde } &\begin{cases} (v_i - v_j)_k = (v'_i - v'_j)_k = 0, 1 \leq k \leq p \\ (v_i)_{p+1} = (v'_i)_{p+1} = i - 1 \quad \text{onde } (\dots)_i = \langle \dots, \epsilon_i \rangle \text{ (produto cartesiano)} \\ \exists! k \text{ tal que } (v_1)_h = (v'_1)_h, h \neq k \text{ e } |(v_1 - v'_1)_k| = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

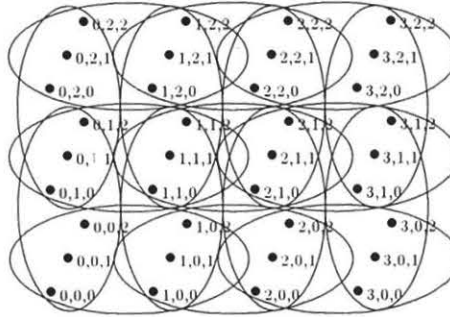


Figura 3: 2-Hipergrade $\mathcal{G}_{4 \times 3}^2$.

Uma outra forma, seguindo a definição da grade, é definir a hipergrade como o produto de hipergrafos. Para isso definimos o produto de dois hipergrafos.

Definição 1 Sejam $\mathcal{G}_1(V_1, E_1), \mathcal{G}_2(V_2, E_2)$ dois hipergrafos. Definimos $\mathcal{G}(V, E) = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ abaixo:

$$V = \{u_k\}, 0 \leq k < |V_1| \cdot |V_2|, \text{ tal que } u_k = (v_1, v_2) \text{ onde } v_1 \in V_1 \text{ e } v_2 \in V_2.$$

dois vértices (a, b) e (c, d) são adjacentes em \mathcal{G} se e só se:

1. $a = c$ e b, d são adjacentes em \mathcal{G}_2 , ou
2. $b = d$ e a, c são adjacentes em \mathcal{G}_1

Esta definição pode ser estendida facilmente para o produto de d hipergrafos. Desta forma definimos um d -hipergrade por $\mathcal{G}^d = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$ onde \mathcal{P}_{n_i, m_i}^i são hipercaminhos. (Ver Figura 4.)

Para a definição do d -hipertoro também temos duas possibilidades. No texto optamos por produto de hiperanáis. Definimos um d -hipertoro por $\mathcal{T}^d = \mathcal{R}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{R}_{n_d, m_d}^d$ onde \mathcal{R}_{n_i, m_i}^i são hiperanáis.

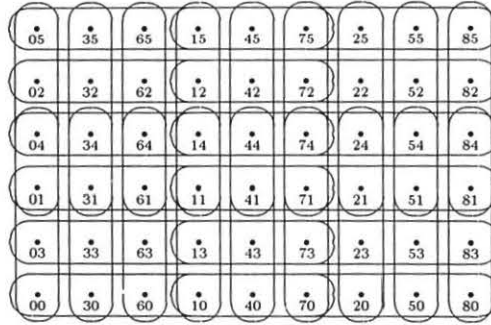


Figura 4: 2-Hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{2,3}^1 \times \mathcal{P}_{2,2}^2$.

3.2 Comparação com topologias em grafos

Nesta seção faremos uma comparação entre os vários aspectos das topologias aqui definidas com as topologias usuais. Os aspectos abordados são: número de vértices, grau dos vértices, grau das hiperarestas e diâmetro. Na tabela a seguir, $gr(v)$ e $gr(e)$ são respectivamente o maior grau de vértices do grafo, e a maior cardinalidade de arestas do grafo. Temos também que $\mathcal{G}^d(V, E) = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$, e $\mathcal{T}^d(V, E) = \mathcal{R}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{R}_{n_d, m_d}^d$.

Topologia	número de vértices	$gr(v)$	$gr(e)$	diâmetro
$\mathcal{P}_n(V, E)$	n	2	2	$n - 1$
$\mathcal{R}_n(V, E)$	n	2	2	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
$\mathcal{G}_{n_1, \dots, n_d}$	$n_1 \dots n_d$	$2d$	2	$\sum_{i=1}^d (n_i - 1)$
$\mathcal{T}_{n_1, \dots, n_d}$	$n_1 \dots n_d$	$2d$	2	$\sum_{i=1}^d (\lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor)$
$\mathcal{P}_{n, m}(V, E)$	nm	2	$2m$	$n - 1$
$\mathcal{R}_{n, m}(V, E)$	nm	2	$2m$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
$\mathcal{G}^d(V, E)$	$\prod_{i=1}^d (m_i n_i)$	$2d$	$\max_{i=1}^d (m_i)$	$\sum_{i=1}^d (n_i - 1)$
$\mathcal{T}^d(V, E)$	$\prod_{i=1}^d (m_i n_i)$	$2d$	$\max_{i=1}^d (m_i)$	$\sum_{i=1}^d (\lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor)$

Desta forma vemos que, por exemplo, uma topologia com n vértices na forma de anel tem diâmetro $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Enquanto que uma topologia com n vértices na forma de hiperanel (com hiperarestas de tamanho m , supondo $(n \bmod m) = 0$) tem diâmetro m vezes menor ($\lfloor \frac{n}{2m} \rfloor$).

3.3 Modelos de Comunicação

Dado um grafo $G(V, E)$, seguindo uma notação semelhante a [11], existe um modelo de comunicação para as arestas, e outro para os vértices. Em relação as arestas, quando dados podem ser transmi-

tidos em apenas um sentido em cada ciclo, temos o modelo unidirecional (*half-duplex*, H). No caso em que as informações podem trafegar nos dois sentidos simultaneamente temos o modelo bidirecional (*full-duplex*, F). Se um vértice pode utilizar (enviar/receber) apenas uma das suas arestas simultaneamente temos o modelo 1-porta, caso possa usar k arestas temos o modelo k -portas. Se um vértice pode utilizar todas as suas arestas em um mesmo ciclo temos o modelo $*$ -porta. Usaremos a notação E_k onde E é o modelo da aresta e k é o modelo do vértice (e.g. F_k bidirecional k -portas, H_1 unidirecional, 1-porta).

Definiremos agora o nosso modelo de comunicação para hipergrafos. Usaremos o mesmo modelo usado no grafo para os vértices, se um vértice pode utilizar simultaneamente (enviar/receber) apenas uma de suas hiperarestas temos o modelo 1-porta, caso possa usar k hiperarestas, ao mesmo tempo, temos o modelo k -portas. Se apenas uma informação pode trafegar na hiperaresta em um ciclo denotaremos por 1-porta, se k informações podem trafegar ao mesmo tempo estaremos no modelo k -portas. Note que para o modelo suposto não faz sentido $k > |e|$. Analogamente ao modelo para grafos temos o modelo $*$ -porta. Usaremos a notação $M_{e,v}$ onde e é o modelo da hiperaresta e v é o modelo do vértice.

Dado um grafo G , novamente de uma forma semelhante a [11], denotaremos por $b_{E_k}(G)$ o número máximo de ciclos para efetuar a difusão (*broadcast*) no modelo E_k . Dado um hipergrafo \mathcal{G} , denotaremos por $b_{M_{e,v}}(\mathcal{G})$, o número máximo de ciclos para efetuar a difusão no modelo $M_{e,v}$. Analogamente usaremos $g_{E_k}(G)$ e $g_{M_{e,v}}(\mathcal{G})$ para a troca completa (*gossiping*).

Neste trabalho abordaremos apenas os casos em que os vértices podem usar uma ou todas as suas arestas em um ciclo, e em que as hiperarestas são 1-porta ou 2-portas. Segue que as hiperarestas podem transmitir no máximo duas informações em um ciclo, e os vértices podem utilizar uma, ou todas as suas hiperarestas em um mesmo ciclo.

3.3.1 Notações

Dado um grafo $G(V, E)$, $u, v \in V$, adjacentes, usaremos a notação $u - v$ para denotar uma transmissão do vértice v para o vértice u . Dado um hipergrafo $\mathcal{G}(V, E)$, $v \in V$, $\alpha \in E$, com $v \in \alpha$ e dado $N \subseteq \alpha$, denotamos por $N \Leftarrow v$ uma transmissão do vértice v ao conjunto de vértices N .

4 Simplificação

Para realizar as comunicações (difusão e troca completa) nos hipergrafos definidos, usaremos um novo conceito que será denominado *simplificação*. A idéia é construir um grafo, que será denominado *grafo simplificado*, a partir do hipergrafo, de tal forma que seja fácil descrever e realizar comunicações no hipergrafo. Além disso, também queremos aproveitar os algoritmos já desenvolvidos para grafos em hipergrafos que são as suas generalizações.

A operação de simplificação é efetuada basicamente escolhendo-se vértices no hipergrafo, denominados *vértices representantes*, os quais serão os vértices do grafo simplificado. Vértices representantes adjacentes no hipergrafo serão adjacentes no grafo simplificado. Cada vértice representante u corresponderá a um conjunto bem definido N_u de vértices por ele representados. Os detalhes serão vistos a seguir.

Trataremos a comunicação no grafo da seguinte forma. A transmissão de um vértice v_1 a um vértice adjacente v_2 , em um grafo simplificado G , equivale a uma transmissão do vértice correspondente a v_1 no hipergrafo, a todos os vértices da hiperaresta que contém os vértices correspondentes a v_1 e a v_2 . Uma transmissão para um vértice representante no grafo simplificado, significa transmissões também para os seus vértices representados. Isto é, $u - v$ no grafo simplificado também acarreta $N_u \Leftarrow v$ e $N_v \Leftarrow v$ no hipergrafo.

É importante ressaltar que a operação de simplificação depende não só do hipergrafo, mas também do modelo de comunicação adotado. Veremos agora duas das principais formas de simplificação para

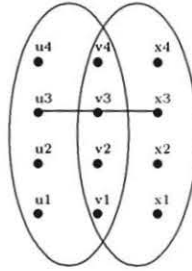


Figura 5: Os vértices u_3, v_3, x_3 são representantes, os conjuntos de vértices representados são: $N_{u_3} = \{u_1, u_2, u_4\}, N_{v_3} = \{v_1, v_2, v_4\}, N_{x_3} = \{x_1, x_2, x_4\}$. A transmissão $x_3 - v_3$ no grafo simplificado implica $\{v_1, v_2, v_4, x_1, x_2, x_3, x_4\} \leftarrow v_3$ no hipergrafo.

os hipergrafos definidos na seção anterior.

4.1 Simplificação para o modelo $M_{j,i}, (j \leq i)$

Usaremos esta simplificação nos hipergrafos de tal forma que seja fácil modelar a comunicação do hipergrafo no modelo $M_{j,i}, (j \leq i)$ através do grafo simplificado no modelo H_i , se $j = 1$, ou no modelo F_i se $j=2$. Os enunciados desta seção serão utilizados para os seguintes modelos $M_{1,1}, M_{1,*}$ e $M_{2,*}$. A idéia principal é a de escolher um vértice representante nas intersecções de hiperarestas que serão especificadas. Vejamos os casos particulares:

- **Grafo simplificado $G(V', E')$ de um hiper caminho $\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$.** Elegemos $n - 1$ representantes $V' = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$, com $u_i \in V$ tais que:

$$\begin{cases} u_1 \bmod n = 0, \text{ ou } u_1 \bmod n = 1 \\ u_{i+1} = u_i + 1, \text{ para } 1 \leq i \leq n - 2 \end{cases}$$

Os vértices de G são adjacentes se e só se os mesmos são adjacentes em $\mathcal{P}_{n,m}$. Desta forma em cada intersecção de hiperarestas teremos um vértice representante, além destes teremos um representante em um dos extremos de $\mathcal{P}_{n,m}$.

Como o hiper caminho é um hipergrafo simétrico, no decorrer do texto suporemos, sem perda de generalidade, que o representante no extremo onde está o vértice de índice 0 é sempre escolhido. Logo $V' = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$, com $u_i \in V$ tais que:

$$\begin{cases} u_1 \bmod n = 0 \\ u_{i+1} = u_i + 1, \text{ para } 1 \leq i \leq m - 1 \end{cases}$$

Faremos esta mesma suposição para a simplificação da hipergrade.

Para cada vértice $u \in V'$ definimos o conjunto de vértices representados por u , $N_u = \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$, tais que:

$$\begin{cases} (y_i - u) \bmod n = 0 \\ y_i \neq u, 1 \leq i \leq m - 1 \end{cases}$$

Cada $y_i \in N_u$ é chamado vértice representado por u . Seja $N = \bigcup_{u \in V'} N_u$, definimos $W = V \setminus (N \cup V')$, o conjunto de vértices sem representante.

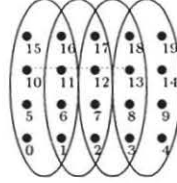


Figura 6: O grafo simplificado do hiper caminho $\mathcal{P}_{5,4}$ tem os vértices $\{10, 11, 12, 13\}$, suas arestas estão representadas por linhas pontilhadas. Temos também que $N_{10} = \{0, 5, 15\}$, $N_{11} = \{1, 6, 16\}$, $N_{12} = \{2, 7, 17\}$, $N_{13} = \{3, 8, 18\}$ e $W = \{4, 9, 14, 19\}$.

- **Grafo simplificado $G(V', E')$ de um hiperanel $\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$.** Elegemos n vértices representantes, $V' = \{u_1, \dots, u_n\}$. Tais que:

$$\begin{cases} u_1 \bmod n = 0 \\ u_{i+1} = u_i + 1, \text{ onde } 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Os vértices de G são adjacentes se e só se os mesmos são adjacentes em $\mathcal{R}_{n,m}$. Teremos um representante por intersecção de hiperarestas de $\mathcal{R}_{n,m}$. Para cada $u \in V'$ definimos o conjunto dos vértices representados N_u , como para o grafo simplificado do hiper caminho.

Exemplo:

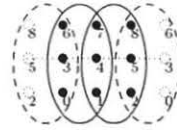


Figura 7: Grafo simplificado (linhas pontilhadas) do hiperanel $\mathcal{R}_{3,3}$.

- **Grafo simplificado de uma d -hipergrade $\mathcal{G}^d = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$.** Faremos uma simplificação por dimensões. Escolhemos primeiro os vértices representantes para o hiper caminho \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 . Seja G_1 o seu grafo simplificado, com os seus vértices representantes $V^{(1)} = \{u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1-1}^{(1)}\}$. Seja $\mathcal{G}^{(1)} = G_1 \times \mathcal{P}_{n_2, m_2}^2 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$. Denominaremos os vértices de $\mathcal{G}^{(1)}$ por vértices representantes de primeira ordem. Escolhemos os vértices representantes para o hiper caminho \mathcal{P}_{n_2, m_2}^2 , teremos o grafo simplificado G_2 , com os seus vértices representantes $V^{(2)} = \{u_1^{(2)}, \dots, u_{n_2-1}^{(2)}\}$. Os vértices de $\mathcal{G}^{(2)} = G_1 \times G_2 \times \mathcal{P}_{n_3, m_3}^3 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$ serão denominados vértices representantes de segunda ordem. Fazendo o mesmo para os caminhos restantes, teremos $\mathcal{G}^{(d)} = G_1 \times \dots \times G_d$. Observe que cada $G_i, 1 \leq i \leq d$, é um grafo, e portanto $\mathcal{G}^{(d)}$ é um grafo, mais especificamente uma d -grade. Para uniformidade de notação definimos também $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}^d$.

Para cada vértice u de $\mathcal{G}^{(j)}$ definimos o conjunto $N_u^{(j)} = \{y_1^{(j)}, \dots, y_{m_j-1}^{(j)}\}$, que são os vértices em $\mathcal{G}^{(j-1)}$ tais que:

$$\begin{cases} (u - y_i^{(j)})_l = 0, l \neq j \\ ((u - y_i^{(j)}) \bmod n_j)_j = 0 \\ u \neq y_i^{(j)}, 1 \leq i \leq m_j - 1 \end{cases} \quad \text{onde } (\dots)_j = \langle \dots, \epsilon_j \rangle$$

Em cada hipergrafo $\mathcal{G}^{(j)}$, $1 \leq j \leq d$ definimos o conjunto $W^{(j)}$ dos vértices, em $\mathcal{G}^{(j-1)}$, sem representante, isto é, $v \in W^{(j)} \Leftrightarrow v \in \mathcal{G}^{(j-1)}, v \notin \mathcal{G}^{(j)}$, e v não é representado por nenhum vértice em $\mathcal{G}^{(j)}$.

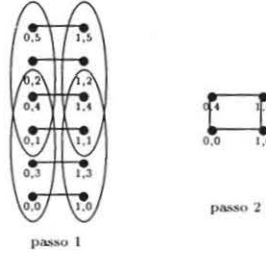


Figura 8: Simplificação (dois passos) da 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{2,3}^1 \times \mathcal{P}_{2,2}^2$.

- **d -hipertoro** $\mathcal{T}^d = \mathcal{R}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{R}_{n_d, m_d}^d$. Repetiremos a idéia anterior. Na primeira dimensão escolhemos os vértices representantes para o hiperanel \mathcal{R}_{n_1, m_1}^1 , e seja G_1 seu grafo simplificado. Denominamos os vértices de $\mathcal{G}^{(1)} = G_1 \times \mathcal{R}_{n_2, m_2}^2 \times \dots \times \mathcal{R}_{n_d, m_d}^d$ por vértices representantes de primeira ordem. Seguindo a idéia anterior teremos o grafo $\mathcal{G}^{(d)} = G^{(d)} = G_1 \times \dots \times G_d$, note que $G^{(d)}$ é um d -toro. Também definimos os conjuntos de vértices representados $N_v^{(j)}$ de uma forma análoga.

Note que a simplificação dos hipergrafos dados resultou em um grafo simplificado, do qual o hipergrafo foi generalizado.

4.1.1 Simplificação para o modelo $M_{2,1}$

Neste caso queremos modelar a comunicação no hipergrafo através de um grafo simplificado no modelo F_1 , ou F_* . Escolheremos dois vértices representantes em cada intersecção de hiperarestas para o hipercaminho e hiperanel. Na hipergrade e no hipertoro temos duas simplificações possíveis, uma escolhendo dois vértices representantes por intersecção, e outra escolhendo $2d$ vértices representantes nas intersecções das arestas que forem convenientes, onde d é a dimensão do hipergrafo em questão. As duas simplificações serão denominadas tipo F_1 e tipo F_* . Para as próximas definições de grafos simplificados vamos supor que existem tantos vértices nas intersecções quanto forem necessários.

- **Grafo simplificado $G(V', E')$ de um hipercaminho $\mathcal{P}_{n, m}(V, E)$.** Elegemos $2(n-1)$ vértices representantes, $V' = \{u_1, \dots, u_{n-1}, u_n, \dots, u_{2(n-1)}\}$, tais que:

$$\begin{cases} (u_1 \bmod n) = (u_n \bmod n) = 0 \\ u_{i+1} = u_i + 1, 1 \leq i \leq n-2, n \leq i \leq 2n-3 \\ u_1 \neq u_n \end{cases}$$

Vértices de G são adjacentes se e só se os mesmos são adjacentes em $\mathcal{P}_{n,m}$. Definimos o conjunto dos vértices representados por N_z , para cada $z \in V'$, $N_z = \{y_1, \dots, y_m\}$, tais que:

$$(y_i - z) \bmod n = 0, 1 \leq i \leq m$$

Note que z agora pertence a N_z e dado i , $N_{u_i+(n-1)} = N_{u_i}$. Neste caso dizemos que u_i e $u_{i+(n-1)}$ são equivalentes. Seja $N = \bigcup_{u \in V'} N_u$, definimos o conjunto de vértices não representados $W = V \setminus U$.

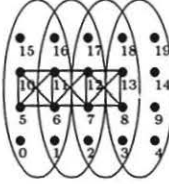


Figura 9: Grafo simplificado no modelo $M_{2,1}$ para o hipercaminho $\mathcal{P}_{5,4}$.

- **Grafo simplificado $G(V', E')$ de um hiperanel $\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$.** Escolhemos $2n$ vértices representantes, $V' = \{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n}\}$, tais que:

$$\begin{cases} u_1 \bmod n = u_n \bmod n = 0 \\ u_{i+1} = u_i + 1, 1 \leq i \leq n-1, n \leq i \leq 2n-1 \\ u_1 \neq u_n \end{cases}$$

Definimos analogamente os conjuntos $N_u, u \in M$, dos vértices representados, como para o hipercaminho.

- **Grafo simplificado tipo F_1 de uma d -hipergrade $\mathcal{G}^d = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$.** Escolhemos primeiro os vértices representantes para o hipercaminho \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 no modelo $M_{2,1}$. Seja G_1 o seu grafo simplificado, com seus vértices representantes $V^{(1)} = \{u_1^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(1)}, u_n^{(1)}, \dots, u_{2(n-1)}^{(1)}\}$. Seja $\mathcal{G}^{(1)} = G_1 \times \mathcal{P}_{n_2, m_2}^2 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$, denominamos seus vértices por vértices representantes de primeira ordem. Repetindo o procedimento acima para as outras dimensões chegaremos ao grafo $\mathcal{G}^{(d)}$.

Podemos definir analogamente às simplificações anteriores os conjuntos de vértices representados, e os conjuntos de vértices sem representante.

Redução: Observe que em cada dimensão i de $\mathcal{G}^{(d)} = G_1 \times \dots \times G_d$ para todo vértice $v \in G_i$ existe um único vértice $u \in G_i, u \neq v$, tais que u e v são equivalentes, isto é tem os mesmos conjuntos de vértices representados ($N_u = N_v$). Se os vértices u e v são equivalentes então u e v pertencem às mesmas hiperarestas de \mathcal{P}_{n_i, m_i}^i .

A partir do grafo simplificado $\mathcal{G}^{(d)}$ definimos o grafo simplificado reduzido, ou *grafo reduzido*, G^* . Em cada uma das dimensões de $\mathcal{G}^{(d)}$ os pares de vértices equivalentes correspondem a um único vértice na mesma dimensão de G^* . As relações de adjacência entre os vértices são mantidas.

Lema 1 *Um algoritmo de comunicação em G^* , no modelo F_1 , pode ser executado em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 .*

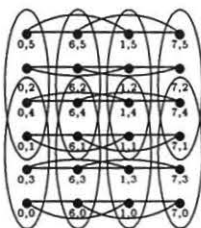


Figura 10: Passo 1 da simplificação no modelo $M_{2,1}$ para a 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{2,3}^1 \times \mathcal{P}_{2,2}^2$.

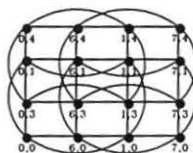


Figura 11: Passo 2 da simplificação no modelo $M_{2,1}$ para a 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{2,3}^1 \times \mathcal{P}_{2,2}^2$.

Prova: sejam $u, v \in G^*$ vértices adjacentes. Sejam u_1, u_2 os vértices equivalentes que deram origem a u , na dimensão onde ocorre a transmissão. Respectivamente v_1, v_2 em relação a v .

Uma transmissão simultânea $u \leftarrow v, v \leftarrow u$, é equivalente a transmissão $u_1 \leftarrow v_1, v_2 \leftarrow u_2$. Pois como v_1, v_2, u_1, u_2 estão na mesma hiperaresta $u_1 \leftarrow v_1$ implica $\{v_2, u_1, u_2\} \Leftarrow v_1$ e $v_2 \leftarrow u_2$ implica $\{v_1, v_2, u_1\} \Leftarrow v_2$.

Lema 2 Um algoritmo de comunicação em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 , pode ser executado em \mathcal{G}^d no modelo $M_{2,1}$.

Prova: Dados dois vértices adjacentes u, v em \mathcal{G}^d é fácil verificar que a transmissão isolada $u \leftarrow v$ pode ser realizada em \mathcal{G}^d . Suponha que exista um ciclo T realizável em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 , que não pode ser executado em \mathcal{G}^d no modelo $M_{2,1}$. Podemos decompor T em T_1, \dots, T_d , onde T_i contém as transmissões na dimensão i .

Segue que existe um $j, 1 \leq j \leq d$ tal que T_j não pode ser realizado em \mathcal{G}^d no modelo $M_{2,1}$. Observando que na dimensão j , temos dois vértices de $\mathcal{G}^{(d)}$ por hiperaresta de \mathcal{G}^d , e que cada aresta comporta duas transmissões chegamos a um absurdo.

A definição de grafo reduzido pode ser estendida para o caso de mais de dois vértices equivalentes por dimensão no grafo $\mathcal{G}^{(d)}$. Se existem x vértices equivalentes em cada dimensão de $\mathcal{G}^{(d)}$ definimos o grafo G^* de uma forma semelhante. Em cada uma das dimensões de $\mathcal{G}^{(d)}$ os x vértices equivalentes correspondem a um único vértice na mesma dimensão de G^* . As relações de adjacência entre os vértices são mantidas.

Corolário 1 Se $x = 2d$ um algoritmo de comunicação em G^* , no modelo F_* , ou F_d , pode ser executado em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 .

Corolário 2 Se $x = 2d$ um algoritmo de comunicação em $\mathcal{G}^{(d)}$, pode ser executado em \mathcal{G}^d no modelo $M_{2,1}$.

Corolário 3 Se $x = 2d$ um algoritmo de comunicação em G^* , no modelo H_* , ou H_d , pode ser executado em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 .

Corolário 4 Se $x = 2d$ um algoritmo de comunicação em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 , pode ser executado em \mathcal{G}^d no modelo $M_{1,1}$.

Logo a partir de um hipergrafo (hipercaminho, hiperanel, hipergrade ou hipertoro) no modelo $M_{1,1}$ podemos criar uma simplificação que resultará em um grafo reduzido onde as comunicações funcionarão no modelo H_* . Para isto basta que sejam eleitos $2d$ representantes por intersecção ($d = 1$ para o hipercaminho e hiperanel).



Figura 12: Grafo reduzido G^* da 2-hipergrade $\mathcal{G}^2 = \mathcal{P}_{2,3}^1 \times \mathcal{P}_{2,2}^2$.

Na definição do grafo simplificado tipo $F_*(F_d)$ de uma d -hipergrade $\mathcal{G}^d = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$, seja $G_1(V'_1, E'_1)$ o grafo simplificado de \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 . Da seguinte forma, sejam os vértices representantes $V' = \{u_1^{(1)}, \dots, u_{\lfloor n_1/2d \rfloor}^{(1)}\}$, tais que:

$$\begin{cases} u_{1+j(n_1-1)} \bmod n_1 = 0 \\ u_{i+1+j(n_1-1)} = u_{i+j(n_1-1)} + 1 & 1 \leq i \leq n-1 \text{ e } 0 \leq j \leq 2d-1 \\ u_{1+l(n_1-1)} \neq u_{1+k(n_1-1)}, \text{ se } k \neq l \end{cases}$$

Onde os vértices de G_1 são adjacentes, se e só se os mesmos são adjacentes em \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 . Da mesma forma definimos os grafos simplificados $G_i(V'_i, E'_i)$ correspondentes aos hipercaminhos \mathcal{P}_{n_i, m_i}^i , $2 \leq i \leq d$.

Seja $\mathcal{G}^{(1)} = G_1 \times \mathcal{P}_{n_2, m_2}^2 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$, denominamos os vértices de $\mathcal{G}^{(1)}$ por vértices representantes de primeira ordem. Os vértices de $\mathcal{G}^{(2)} = G_1 \times G_2 \times \mathcal{P}_{n_3, m_3}^3 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$ serão denominados vértices representantes de segunda ordem. Continuando teremos $\mathcal{G}^{(d)} = G_1 \times \dots \times G_d$, que será um grafo, cujos vértices serão os vértices representantes de d -ésima ordem.

Para cada $u \in \mathcal{G}^{(j)}$ definimos o conjunto $N_u = \{y_1^{(j)}, \dots, y_{m_j}^{(j)}\}$ pertencente a $\mathcal{G}^{(j-1)}$ tais que:

$$\begin{cases} (u - y_l^{(j)})_l = 0, l \neq j \\ ((u - y_l^{(j)}) \bmod n_j)_j = 0 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m_j$$

Definimos também os conjuntos $W^{(j)}$, $1 \leq j \leq d$ dos vértices sem representante analogamente à definição dos conjuntos de vértices sem representante para a d -hipergrade no modelo $M_{1,1}$.

A partir do grafo $\mathcal{G}^{(d)}$ definimos o grafo reduzido G^* . Conforme foi visto, um algoritmo em G^* no modelo F^* pode ser executado em $\mathcal{G}^{(d)}$ no modelo H_1 .

- Seguiremos a idéia de simplificação da seção anterior, para o hipertoro, mas ao invés de escolhermos um vértice por intersecção, ou extremo, escolheremos dois para o grafo simplificado no modelo F_1 , ou escolheremos $2d$ para o grafo simplificado no modelo F_* .

5 Padrões de Comunicação

Dados um hipergrafo $\mathcal{G}(V, E)$ e seu grafo simplificado $G(V', E')$, denotamos a operação de difusão por $\text{broadcast}_M(G)$, no modelo M , no grafo G . Cada transmissão $v - u$ no grafo G representa uma transmissão de u a todos os vértices da hiperaresta que contém u e v em \mathcal{G} . Analogamente denotamos por $\text{gossiping}_M(G)$ a troca completa no grafo G , no modelo M .

No decorrer do texto, quando definimos um grafo simplificado, estamos definindo implicitamente os conjuntos de vértices principais V' , de vértices representantos $N_u, u \in V'$ e, se for o caso, os conjuntos de vértices sem representante.

Para as descrições dos algoritmos utilizaremos a notação:

```

instrução
  comando1
  ⋮
  comandon

```

onde os $n(n \geq 0)$ comandos serão executados conforme a instrução. Usaremos nos algoritmos os seguintes tipos de intruções:

```

for all  $v \in V$ 
for  $i = 0$  to  $n - 1$ 
for each  $v \in V$ 
for two  $v \in V$ 

```

5.1 Limites superiores obtidos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados obtidos para a difusão e troca completa nas topologias definidas. Também apresentaremos dois dos algoritmos destes resultados, um para difusão, e outro para troca completa.

É importante ressaltar que para a difusão só interessa a análise dos modelo $M_{1,i}$ em qualquer hipergrafo. Pois a cada passo da difusão existe uma bipartição de vértices, os que contém a informação, e os que não a contém. A informação deve ser transmitida de uma partição a outra. Além de que no modelo de transmissão suposto (tempo de transmissão independe do tamanho da mensagem), não importa o grau das hiperarestas que ligam os mesmos dois vértices entre as partições. Segue que o estudo dos modelos em que as hiperarestas são k -porta recai no estudo dos modelos com as hiperarestas 1-port.

Se o vértice que contém a mensagem inicialmente é candidato a vértice representante, é fácil ver que podemos sem perda de generalidade supor que ele será eleito vértice representante.

Difusão	$M_{1,1}$	$M_{1,*}$	diâmetro
$\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$	$n - 1$	$n - 1$	$n - 1$
$\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
$\mathcal{G}^d(V, E) = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$	$\sum_{i=1}^d (n_i - 1)$	$\sum_{i=1}^d (n_i - 1)$	$\sum_{i=1}^d (n_i - 1)$
$\mathcal{T}^d(V, E) = \mathcal{R}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{R}_{n_d, m_d}^d$	$\sum_{i=1}^d (\lceil \frac{n_i}{2} \rceil)$	$\sum_{i=1}^d (\lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor)$	$\sum_{i=1}^d (\lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor)$

Troca Completa	$M_{1,1}$	$M_{1,*}$
$\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$	$2(m - 1) + g_{H_1}(P_{n-1}) + 1$	$2(m - 1) + g_{H_2}(P_{n-1}) + 1$
$\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$	$m + g_{H_1}(R_n)$	$m + g_{H_2}(R_n)$
$\mathcal{G}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d (2m_i - 1) + g_{H_1}(G) + 2d$	$\sum_{i=1}^d (2m_i - 1) + g_{H_2}(G) + 2d$
$\mathcal{T}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d (m_i) + g_{H_1}(T) + d$	$\sum_{i=1}^d (m_i) + g_{H_2}(T) + d$

Troca Completa	$M_{2,1}$	$M_{2,k}$
$\mathcal{P}_{n,m}(V, E)$	$2(\lceil \frac{m-1}{2} \rceil n - 2 + 1)$	$2(\lceil \frac{m-1}{2} \rceil n - 2 + 1)$
$\mathcal{R}_{n,m}(V, E)$	$\lceil \frac{m}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lceil \frac{m}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
$\mathcal{G}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d 2\lceil \frac{m_i}{2} \rceil + g_{F.}(G) + 2d$	$\sum_{i=1}^d 2\lceil \frac{m_i}{2} \rceil + g_{F.}(G) + 2d$
$\mathcal{T}^d(V, E)$	$\sum_{i=1}^d \lceil \frac{m_i}{2} \rceil + g_{F.}(T) + d$	$\sum_{i=1}^d \lceil \frac{m_i}{2} \rceil + g_{F.}(T) + d$

Veremos agora como realizar a operação de difusão no hiperanel, e a operação de troca completa na d -hipergrade.

Hiperanel No caso do hiperanel $\mathcal{R}_{n,m}$, seja G o seu grafo simplificado. Temos duas possibilidades distintas. O modelo de comunicação pode ser $M_{1,1}$, e neste caso a comunicação se dará como para o hipercaminho, com a difusão ocorrendo no modelo *half-duplex*.

Algoritmo:

1. $broadcast_{H_1}(G)$

No modelo $M_{1,2}$, o vértice que contém a mensagem a propaga no grafo G no modelo $H_2(= H_k)$. Desta forma efetuaremos a difusão em $D(\mathcal{R}_{n,m})$ passos.

Algoritmo:

1. $broadcast_{H_2}(G)$

Para o hiperanel $\mathcal{R}_{n,m}$ temos os tempos $b_{M_{1,1}} = D + 1$ e $b_{M_{2,1}} = D$, onde $D = D(\mathcal{R}_{n,m})$.

Hipergrade Troca completa na d -hipergrade, $\mathcal{G}^d = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$, em qualquer modelo, depende quase que só dos passos de inicialização e finalização, pois para d -grades suficientemente grandes a troca completa, no modelo H_1 , pode ser efetuado em D passos [9].

Seja G o seu grafo simplificado no modelo $M_{1,i}$. Temos o seguinte algoritmo para a troca completa.

1. for $j = 1$ to d
 - for all $u_i^{(j)} \in V^{(j)}$
 - for each $v \in N_u^{(j)}, u^{(j)} - v$
 - for each $v \in W^{(j)}, u_{n-1}^{(j)} - v$
2. $gossiping_{H_1}(G)$
3. for $j = d$ to 1
 - for all $u \in V^{(j)}, N_u \Leftarrow u$
 - $W^{(j)} \Leftarrow u_{n-1}^{(j)}$

Seja $G(V', E')$ o grafo simplificado da d -hipergrade $\mathcal{G}^d = \mathcal{P}_{n_1, m_1}^1 \times \dots \times \mathcal{P}_{n_d, m_d}^d$ no modelo $M_{2,1}$, tipo F_k (onde $k = 1$, ou $k = d$). Seja G^* o grafo reduzido. Algoritmo:

1. for $j = 1$ to d
 - for all $u_i^{(j)} \in V^{(j)}$
 - for two $v \in N_{u_i^{(j)}}, \{u_i^{(j)}, u_{i+(n-1)}^j, u_{i+(n-1)2}^j, \dots, u_{i+(n-1)(2(k-1))}^j\} - v$
 - for two $v \in W^{(j)}, \{u_{(n-1)}^{(j)}, u_{2(n-1)}^{(j)}, \dots, u_{2k(n-1)}^{(j)}\} - v$

2. $gossiping_{F_k}(G^*)$
3. for $j = d$ to 1
 - for all $u \in V^{(j)}, N_u \Leftarrow v$
 - $W^{(j)} \Leftarrow u_{n-1}^{(j)}$

Finalmente para o modelo $M_{2,*}$, ou seja $M_{2,d}$, temos:

1. for $j = 1$ to d
 - for all $u_i^{(j)} \in V^{(j)}$
 - for two $v \in N_{u_i^{(j)}}, u_i^{(j)} - v$
 - for two $v \in W^{(j)}, \{u_{n-1}^{(j)}, u_i^{(j)} - v$
2. $gossiping_{F_k}(G^{(d)})$
3. for $j = d$ to 1
 - for all $u \in V^{(j)}, N_u \Leftarrow v$
 - $W^{(j)} \Leftarrow u_{n-1}^{(j)}$

6 Conclusão

A necessidade por sistemas maciçamente paralelos a fim de lidar com certas aplicações está revelando as fraquezas de redes de interconexão ponto-a-ponto. Redes de interconexão com o acréscimo de barramentos podem constituir um modo efetivo de interligar um grande número de processadores, ao mesmo tempo garantindo que a distância máxima entre processadores seja pequena.

Apresentamos algoritmos de comunicação para difusão e troca completa em redes do tipo hiperca-minho, hiperanel, hipergrade e hipertoro. Embora eles sejam todos subprodutos da nova ferramenta chamada simplificação, os esquemas são simples e muito eficientes, mostrando que os procedimentos de comunicação são viáveis, como comprovam as tabelas contidas no trabalho.

Referências

- [1] A. Aggarwal, Optimal bounds for finding maximum on array of processors with k global buses, *IEEE Transactions on Computers* **35** (1986) 62-64.
- [2] A. Bar-Noy and D. Peleg, Square meshes are not always optimal, *ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures*, (ACM, 1989) 138-147.
- [3] C. Berge, *Hypergraphs*, (North Holland, 1989).
- [4] J-C. Bermond, J. Bond and C. Peyrat, Interconnection networks with each node on two buses, in *Parallel Algorithms and Architectures*, eds. M. Cosnard, Y. Robert, P. Quinton and M. Tchunte, (North Holland, 1984) 155-167.
- [5] J-C. Bermond, J. Bond, M. Paoli and C. Peyrat, Graphs and interconnection networks: diameter and vulnerability, in *Surveys in Combinatorics*, ed. E.K. Lloyd, (Cambridge University Press, 1983) 1-29.
- [6] J-C. Bermond, Le problème des "ouvroirs" (Hypergraph gossip problem), in *Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, No. 260, Orsay, 1976, 31-34.

- [7] L.N. Bhuyan and D.P. Agrawal, Generalized hypercube and hyperbus structures for a computer network, *IEEE Transactions on Computers* **33** (1984) 323–333.
- [8] S.H. Bokhari, Finding maximum on an array processor with a global bus, *IEEE Transactions on Computers* **33** (1984) 133–139.
- [9] G. Cybenko, D.W. Krumme, and K.N. Venkataraman, *Gossiping in minimum time*, SIAM Journal on Computing, Vol.21, no.1, pp. 111-139, Feb 1992.
- [10] A.M. Farley and S.T. Hedetniemi, *Broadcasting in grid graphs*, In *Congressus Numerantium XXI*, editor, Proc. 9th S-E conf. combinatorics, graph theory, and computing, pages 275-288, 1978.
- [11] P. Fraigniaud and E. Lazard, Methods and problems of communication in usual networks, Rapport de Recherche LIP 91-33, Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme, École Normale Supérieure de Lyon. October, 1991.
- [12] H. Jiang and K.C. Smith, PPMB: a partial-multiple-bus multiprocessor architecture with improved cost-effectiveness. *IEEE Transactions on Computers* **41** (1992) 361–366.
- [13] D.W. Krumme, G. Cybenko and K.N. Venkataraman, Gossiping in minimal time, *SIAM J. Computing* **21** (1992) 111–139.
- [14] F. Meyer auf der Heide and H.T. Pham, On the performance of networks with multiple busses, in *STACS'92 9th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, eds. A. Finkel and M. Jantzen. *Lecture Notes in Computer Science*, (Springer-Verlay, 1992) 97–108.
- [15] S. Olariu, J.L. Schwing and J.Y. Zhang, On the power of two-dimensional processor arrays with reconfigurable bus systems. *Parallel Processing Letters* **1** (1991) 29–34.
- [16] Q.F. Stout, Meshes with multiple buses, *Proc. 27th IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science* (1986) 264–273.
- [17] B. Wilkinson, On crossbar switch and multiple bus interconnection networks with overlapping connectivity, *IEEE Transactions on Computers* **41** (1992) 738–746.