

## Parâmetros para Análise de Topologias Estáticas

Cristian Koliver & Philippe O. A. Navaux

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Inst. Informática - Curso de Pós-Graduação em  
Ciência da Computação  
Universidade de Caxias do Sul - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Caixa Postal: 15064 - Cep. 91501-970  
Porto Alegre - RS - Fone: (051) 336-8399  
Email:cristian@ucs01.ucs.anrs.br, navaux@inf.ufrgs.br

### RESUMO

O objetivo deste trabalho é fornecer um número de aspectos relevantes que podem ser utilizados como parâmetros para ferramentas automáticas para análise de redes, uma vez que o crescimento do universo de topologias de interconexão ocasionou também um crescimento no universo de critérios para análise. Além disso, este trabalho propõe-se a demonstrar o comportamento de um conjunto de topologias frente os critérios demonstrados.

### ABSTRACT

The goal of this work is to provide a number of relevant aspects that might be used as parameters for automatic tools of networks analysis, since the interconnection topologies universe has grown a lot, the evaluation criterias have also grown. Additionally, this work purposes to show the behaviour of an interconnection topologies set related to these criterias, with conclusions.

palavras chave: análise, elemento de processamento, rede estática, topologia de interconexão

## 1 Introdução

Atualmente, a maior parte dos trabalhos encontrados na literatura referentes à análise de redes são voltados apenas para uma única topologia ou para um pequeno subconjunto do universo de estratégias existentes, o que dificulta a utilização dos aspectos discutidos nos mesmos em ferramentas automatizadas de análise pela falta de uniformidade e de uma linguagem comum.

O objetivo deste trabalho é fornecer um levantamento de aspectos relevantes para a análise das topologias ditas *estáticas* (topologias cujas ligações entre os elementos de processamento - EPs - não variam), formalizando-os para que eles possam ser utilizados como parâmetros para ferramentas automatizadas de análise de redes, uma vez que pelo fato do universo de topologias de interconexão existentes ter tornado-se muito amplo, os critérios para avaliação sofreram também um grande incremento, oferecendo uma vasta possibilidade de estudo. Além disso, esse trabalho propõe-se a demonstrar o comportamento de um conjunto de topologias de interconexão (as mais comumente utilizadas) ante esses critérios fornecendo, ainda, conclusões que auxiliem o projetista da rede na seleção da mais adequada.

Na seção 2 são definidos critérios para a análise; na seção 3 são descritas algumas topologias

estáticas e é mostrado o comportamento delas frente os critérios definidos; na seção 4 são apresentadas algumas conclusões.

## 2 Critérios para Análise

Os aspectos levantados para a análise das topologias de interconexão estáticas são os seguintes: diâmetro, distância média internodos, conectividade, carga esperada dos barramentos, grau e custo.

No projeto e seleção de uma estratégia (topologia) de interconexão, um ponto crítico a ser cuidadosamente analisado é o tempo que uma mensagem leva para, a partir de um nodo ou EP-fonte, chegar ao nodo-destino. Esse tempo é normalmente referenciado na literatura como *delay* (atraso) de propagação. Uma das metas do projeto é obviamente a redução do *delay* ao limite mínimo. O *delay* depende tanto de fatores físicos quanto lógicos. Dentre os fatores lógicos destaca-se o algoritmo de roteamento (estratégia usada para a determinação do caminho que a mensagem deverá percorrer para, a partir do nodo-fonte, alcançar o nodo-destino); dentre os fatores físicos destacam-se o tamanho do sistema (número total de EPs ou, simplesmente,  $N$ ), tempo real de transferência (que abrange, entre outros fatores, o tempo que a mensagem leva para percorrer um ligação), capacidade de processamento dos EPs (que influenciará no tempo que os mesmos levarão para, através da execução do algoritmo de roteamento, determinar o caminho correto) etc. Normalmente, a análise do *delay* limita-se a fatores mensuráveis (proporcionais a  $N$ , de preferência) inerentes à topologia e não a uma implementação específica do sistema (configuração dos EPs, ligações etc.). Em redes estáticas, o *delay* significa o número de barramentos intermediários (ou EPs intermediários) pelos quais uma mensagem terá que passar para, de um EP-fonte, chegar ao destino. O *delay* máximo da rede, ou seja, o pior caso dentre todos os pares de EPs da rede (aquele que abrange o maior número de ligações ou nodos intermediários) é chamado de diâmetro da rede ou distância máxima internodos ( $K$ ). O diâmetro de um nodo (ou  $kL(i)$ ) é o pior caso dentre todos os pares que tem aquele nodo como fonte ou destino (assumindo-se que as ligações são bidirecionais). A distância média internodos ( $Ak$ ) [MAE 81] é a média das distâncias considerando-se todos os pares de nodos da rede. A distância média de um nodo para os restantes será representada por  $Ak_l(i)$ . O conhecimento do comportamento das funções de crescimento dos valores de  $K$  e  $Ak$  (exponencial, quadrática, logarítmica, polinomial etc.) é importante porque se uma topologia apresenta um crescimento de  $K$  e/ou  $Ak$  exponencial, por exemplo, ela deve ser descartada para uma máquina paralela de propósitos gerais com um grande número de EPs.

A conectividade ( $C$ ) da rede é o número mínimo de nodos, que, inoperantes, comprometem (cancelam) a comunicação entre dois ou mais pares de nodos da rede. Assim, quanto mais alto o valor de  $C$ , mais confiável é a rede (a vulnerabilidade da rede está intimamente ligada à conectividade da mesma). Deve ser observado que a conectividade pode dizer respeito não somente aos nodos mas também às ligações (a conectividade dos nodos representa sempre o pior caso; a rede da figura 1 (a), por exemplo, tem conectividade 1 em relação aos nodos e 3 em relação às ligações) e que a conectividade, como parâmetro de vulnerabilidade da rede, não é uma medida absoluta. Uma rede com conectividade igual a um (um nodo inoperante desconecta a rede), por exemplo, pode ser mais confiável do que outra com conectividade igual a dois (um mínimo de dois nodos inoperantes são necessários para desconectar a rede) dependendo da topologia de ambas. As redes da figura 1 exemplificam essa situação. Na rede *a*), uma falha no nodo 3 desconecta a rede; na rede *b*), a desconexão da rede exige a falha de, no mínimo, dois nodos quaisquer não-adjacentes. Entretanto, em média, a primeira rede tem uma conectividade maior que a segunda (a desconexão de qualquer par à direita ou à esquerda do nodo 3 só ocorre com a inoperância de três nodos). Assim, uma medida mais efetiva de vulnerabilidade seria o número médio de caminhos disjuntos. Os caminhos disjuntos de um par de nodos qualquer de uma rede são os caminhos que conectam esses nodos sem a utilização de nodos intermediários comuns. Também deve ser salientado que podem existir dois caminhos disjuntos entre dois nodos em termos de ligações ou arestas sem que os mesmos sejam disjuntos em termos de vértices. Na rede *a*) da figura 1, por exemplo, existem três caminhos *aresta-disjuntos* entre os nodos 0 e 4 porém apenas um caminho *vértice-disjunto* unindo tal par. A recíproca não é verdadeira. Em [FRA 71], são descritos algoritmos que determinam todos os caminhos disjuntos entre qualquer par de nodos de uma rede.

A carga esperada dos barramentos ( $L$ ) é a probabilidade que uma mensagem aleatória utilize

qualquer uma das ligações supondo que todas as comunicações entre os  $(N^2 - N)$  pares são equiprováveis (em casos concretos, é claro, existirão ligações com cargas maiores e menores, decorrentes de taxas de comunicação diferenciadas entre determinados pares de nodos por causa do algoritmo que está sendo executado e pela forma pela qual o sistema operacional distribui as tarefas entre os EPs). O valor de  $L$  é obtido dividindo-se a distância média internodos pelo número de ligações por nodo.

Os fatores mencionados anteriormente dizem respeito ao desempenho do sistema. Contudo, no projeto de uma máquina paralela, o custo do sistema também deve ser analisado. Dois fatores que influenciam no custo são o grau dos nodos e o número total de ligações ( $B$ ). O grau de um nodo ( $g(i)$ ) é dado pelo número de ligações conectadas a ele. A variação ou não de tal valor em função de  $N$  é estritamente ligado à topologia. O maior grau dentre todos os graus é o grau da rede ( $G$ ). O grau determina quantas portas cada EP deverá ter para o estabelecimento de conexões. Redes cujo número total de ligações apresenta um crescimento demasiado em função do número de EPs podem ter um custo proibitivo para um  $N$  muito grande. Assim, um grau muito pequeno pode tornar a rede muito vulnerável; um grau muito grande pode tornar a rede muito cara. Certas topologias apresentam um grau fixo enquanto outras apresentam um grau variável. A importância da variação ou não do grau está no fato de que, quando do projeto do sistema, deverá ser considerado o número máximo de EPs que a rede poderá ter para que cada EP tenha um número de portas em função desse  $N$  máximo (devem ser previstas as futuras novas conexões). Se o grau é fixo, o crescimento da rede é teoricamente ilimitado.

Se, ao projetar-se uma máquina paralela, já são previstos possíveis aumentos em sua capacidade de processamento pelo aumento do número total de EPs, então é interessante saber-se quantos EPs podem ser acrescentados à máquina. Normalmente, o valor dos incrementos é uma função de  $N$  (tal função será chamada de fator de incremento, ou simplesmente,  $f(N)$ ). Poucas topologias permitem que apenas um EP seja adicionado ao sistema ( $f(N) = 1$ ) sem que a rede perca suas características topológicas; normalmente o incremento mínimo é uma função de  $N$ .

Topologias cujos valores de  $g(i) = G$ ,  $AKL(i) = Ak$  e  $kL(i) = K$  serão chamadas de uniformes. Assim, em uma rede uniforme, todos os nodos tem uma mesma "visão" da rede. A uniformidade da rede é importante em relação a problemas de "congestionamentos" e roteamento. Se a rede é uniforme, a carga teoricamente será distribuída de forma equilibrada entre todos os nodos da rede (não existirão nodos "gargalo", ou seja, nodos que recebem ou pelo qual passa um maior número de mensagens). Do ponto de vista prático, entretanto, essa uniformidade de distribuição dependerá da política do sistema operacional. Em redes uniformes, o algoritmo de roteamento deverá ser mais simples, uma vez que trabalha de modo idêntico sobre todos os nodos da rede. Obviamente, em tais redes a análise de um único nodo é suficiente para a determinação de fatores como diâmetro, distância média, carga esperada das ligações, conectividade e conectividade média. Além disso, em redes uniformes a conectividade é igual ao menor grau dentre todos os graus.

### 3 TOPOLOGIAS ESTÁTICAS

Algumas topologias estáticas são mais utilizadas do que outras ou apresentam certas propriedades que as tornam mais adequadas do que outras para uma gama maior de aplicações. Dentre essas topologias destacam-se as topologias em anel, completamente conectada, malha, anel cordal,  $n$ -cúbica, árvore, cúbica conectada por ciclos e De Bruijn (figura 2, nessa ordem, da esquerda para a direita, de cima para baixo). Nesta seção, os critérios para análise de topologias de interconexão serão formalizados em função de  $N$  para essas estratégias. A prova das propriedades descritas a seguir é trivial aplicando-se o princípio da indução matemática, a partir dos dados levantados pela aplicação dos algoritmos descritos em [KOL 92] e demonstrados nas tabelas a seguir. Os métodos para a obtenção das funções também podem ser encontrados em [KOL 92]. A seguir, será fornecida uma breve descrição das topologias analisadas.

$N$	$K$	$G$	$Ak$	$C$	$B$	$f(N)$	$L$
3	1	2	1.00000	2	3	1	1.00000
4	2	2	1.33333	2	4	1	1.33333
5	2	2	1.50000	2	5	1	1.50000
6	3	2	1.79999	2	6	1	1.79999
7	3	2	2.00000	2	7	1	2.00000
8	4	2	2.28571	2	8	1	2.28571
9	4	2	2.50000	2	9	1	2.50000
...	...	...	...	...	...	...	...
80	40	2	20.25316	2	80	1	20.25316
81	40	2	20.50000	2	81	1	20.50000
82	41	2	20.75308	2	82	1	20.75308
...	...	...	...	...	...	...	...
126	63	2	31.75200	2	126	1	31.75200
127	63	2	32.00000	2	127	1	32.00000
128	64	2	32.50000	2	128	1	32.50000

Table 1: Resultados para topologia em anel

### 3.1 Anel ou Laço Bidirecional

Uma rede com topologia em anel é uma rede onde um EP  $i$  está ligado a exatamente dois outros:  $i+1$  e  $i-1$ .

A tabela 1 demonstra os dados obtidos para a topologia em anel. Esses resultados e os das tabelas seguintes serão comentados na seção 4.

### 3.2 Completamente Conectada

Em uma topologia completamente conectada (CC) um nodo  $i$  qualquer está conectado a todos os outros da rede. Assim, cada nodo deverá ter, no mínimo,  $N-1$  portas (o número total de barramentos é  $(N-1).N/2$ ). Tanto a distância média internodos quanto o diâmetro são fixos e de valor 1 (um); a tolerância a falhas da rede é excelente, em decorrência do alto valor do grau (existem  $N-1$  caminhos disjuntos conectando todos os pares de nodos da rede).

Assim como a topologia em anel, a CC também permite acréscimos unitários à rede (a um custo bastante alto -  $N-1$  barramentos adicionais).

### 3.3 Malha

Em uma rede com topologia em malha (*near neighbor mesh*), um nodo  $i$  está ligado diretamente a exatamente quatro nodos ( $i-1, i+1, i+\sqrt{N}$  e  $i-\sqrt{N}$ ).

Os dados da tabela 2 referem-se à topologia em malha de grau quatro<sup>1</sup> (*four near neighbor mesh*) descrita acima.

### 3.4 Árvore Binária Completa

Em uma topologia em árvore binária, um nodo  $i$  situado em um nível  $n$  está ligado diretamente a três nodos ( $\lfloor i/2 \rfloor - 1, 2.i+1, 2.i+2$ ), com exceção dos nodos raiz (zero) e folhas, localizados nos níveis 1 e  $\log_2(N+1)$ , respectivamente. Na árvore binária completa, o último nível terá sempre  $(N+1)/2$  nodos.

Na tabela 3 encontram-se os dados obtidos para a topologia em árvore binária.

<sup>1</sup>A topologia pode ter seu grau aumentado para outros valores - usualmente potências de dois

$N$	$K$	$G$	$Ak$	$C$	$B$	$f(N)$	$L$
4	1	4	1.00000	4	8	5	0.50000
9	2	4	1.50000	4	18	7	0.75000
16	3	4	2.00000	4	32	9	1.00000
25	4	4	2.50000	4	50	11	1.25000
36	5	4	3.00000	4	72	13	1.50000
49	6	4	3.50000	4	98	15	1.75000
64	7	4	4.00000	4	128	17	2.00000
81	8	4	4.50000	4	162	19	2.25000
100	9	4	5.00000	4	200	21	2.50000
121	10	4	5.50000	4	242	23	2.75000

Table 2: Resultados para topologia em malha

$N$	$K$	$G$	$Ak$	$C$	$B$	$f(N)$	$L$
3	2	3	1.33333	1	2	4	2.00000
7	4	3	2.28571	1	6	8	2.66666
15	6	3	3.50476	1	14	16	3.75510
31	8	3	4.95483	1	30	32	5.12000
63	10	3	6.58678	1	62	64	6.69302
127	12	3	8.35095	1	26	128	0.16124

Table 3: Resultados para topologia em árvore binária

### 3.5 n-Cúbica

Em uma rede com topologia n-cúbica, um nodo  $i$  com um endereço de  $n$  bits está conectado a  $n$  outros nodos cujos endereços diferem do endereço de  $i$  em apenas uma posição *bit*.

A tabela 4 mostra os resultados obtidos para a topologia  $n$ -cúbica.

### 3.6 Cúbica Conectada por Ciclos

A rede cúbica conectada por ciclos (CCC), descrita em [PRE 81], é uma rede formada por idênticos EPs chamados módulos. Um módulo tem três portas e número total de módulos é uma potência de dois.

Em [PRE 81] e [BAN 88], é descrita uma topologia baseada na CCC onde os módulos podem ter duas ou três portas, dependendo de sua localização, de modo que o número total de módulos é igual a  $h \cdot 2^s$  ( $h \geq s$ ), onde  $h$  é o número de módulos de um ciclo e  $2^s$  é o número de ciclos. Neste trabalho, a análise será feita sobre a rede CCC mais comum, onde o número de ciclos é igual a oito

$N$	$K$	$G$	$Ak$	$C$	$B$	$f(N)$	$L$
8	3	3	1.71428	3	12	8	1.71428
16	4	4	2.13333	4	32	8	2.13333
32	5	5	2.58064	5	80	8	2.58064
64	6	6	3.04761	6	192	8	3.04761
128	7	7	3.52755	7	448	8	3.52755

Table 4: Resultados para topologia  $n$ -cúbica

$N$	$K$	$G$	$Ak$	$C$	$B$	$f(N)$	$L$
24	6	3	3.21739	2	36	8	2.14492
32	7	3	3.93548	2	44	8	2.86217
40	8	3	4.28717	2	52	8	3.29783
48	9	3	4.81560	2	60	8	3.85248
56	10	3	5.21038	2	68	8	4.29090
64	11	3	5.73015	2	76	8	4.82539
72	12	3	6.14397	2	84	8	5.26626
80	13	3	6.65569	2	92	8	5.78756
88	14	3	7.08045	2	100	8	6.23080
96	15	3	7.58596	2	108	8	6.74307
104	16	3	8.01792	2	116	8	7.18848
112	17	3	8.51866	2	124	8	7.69427
120	18	3	8.95574	2	132	8	8.14158
128	19	3	9.	2	140	8	8.

Table 5: Resultados para topologia CCC

( $s = 3$ ).

Cada módulo tem um endereço expressado na forma do par  $(l, p)$  onde  $l$  é o endereço (número) do ciclo ( $l = 0, 1, \dots, N-1$ ) e  $p$  é o endereço do módulo dentro do ciclo ( $p = 0, 1, \dots, h-1$ ). As portas dos módulos recebem um dos seguintes rótulos:  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{B}$  ou  $\mathcal{L}$  (mnemônicos para *forward*, *backward* e *lateral*), sendo que os módulos com  $p = 3, \dots, h-4$  tem apenas duas portas (na verdade, os módulos com  $p = s, \dots, h-s-1$ ). As conexões respeitam o seguinte padrão:

$\mathcal{F}(l, p)$  está conectado a  $B(l, (p+1) \bmod h)$ ;

$\mathcal{B}(l, p)$  está conectado a  $F(l, (p-1) \bmod h)$ ;

$\mathcal{L}(l, p)$  está conectado a  $L(l + \varepsilon 2^p, p)$  onde  $\varepsilon = 1 - 2\text{bit}_i(l)$  e  $\text{bit}_i(l)$  é o  $i$ -ésimo *bit* de  $l$ .

A tabela 5 mostra os resultados obtidos para a topologia CCC.

### 3.7 De Bruijn

Uma rede De Bruijn( $d, K$ ) [SAM 89] é um grafo com  $N = G$  nodos, onde  $G = 2.d$  e  $K$  é o diâmetro da rede. A mais usual rede De Bruijn é a rede De Bruijn binária multiprocessadora (*binary De Bruijn multiprocessor* - BDM) onde  $d = 2$ .

Em uma rede BDM, um nodo  $i$  de endereço  $A = a_{K-1}a_{K-2}\dots a_0$  está diretamente conectado a, no máximo, quatro outros nodos cujos endereços são:

$$A_1 = a_{K-2}a_{K-3}\dots a_1a_0a_{K-1};$$

$$A_2 = a_0a_2a_{K-1}a_{K-2}\dots a_2a_1;$$

$$A_3 = a_{K-2}a_{K-3}\dots a_0a_1a_{K-1};$$
 e

$$A_4 = a_0a_{K-1}a_{K-2}\dots a_2a_1.$$

Os vizinhos  $A_1$  e  $A_2$  são obtidos através de um deslocamento cíclico dos *bits* de  $A$  (operação *shift-end-around*), sendo, por isso, chamados de vizinhos SEA; os vizinhos  $A_3$  e  $A_4$  são obtidos através de um deslocamento cíclico com complemento dos *bits* de  $A$  (operação *shift-end-around-complement*), sendo, por isso, chamados de vizinhos SEAC.

### 3.8 Anel Cordal

Em uma rede com topologia em anel cordal ([ARD 81], [RAG 86], [DOT 84]) um nodo  $i$  está conectado diretamente aos nodos  $(i+1)$ ,  $(i-1)$ ,  $(i+w) \bmod N$  se  $i$  for ímpar ou  $(i-w) \bmod N$  se  $i$  for par, onde  $w$  é o *tamanho do cordal* ou *período* ( $w \leq N/2$ , positivo e ímpar). O grau da rede não varia com o número de EPs (o valor é sempre 3).

$N$	$K$	$G$	$Ak$	$C$	$B$	$f(N)$	$L$
4	2	3	1.16666	3	5	2	0.93333
8	3	4	1.64285	3	13	4	1.01098
16	4	4	2.14166	3	29	8	1.18160
32	5	4	2.75403	3	61	16	1.44473
64	6	4	3.45337	3	125	32	1.76812
128	7	4	4.21481	3	253	64	2.13239

Table 6: Resultados para topologia BDM

$N$	$K$	$G$	$Ak$	$C$	$B$	$f(N)$	$L$	$w$
6	2	3	1.39999	3	9	2	0.93333	3
14	3	3	2.07692	3	21	2	1.38461	5
20	4	3	2.52631	3	30	2	1.68421	5
34	5	3	3.24242	3	51	2	2.16161	7
44	6	3	3.67441	3	66	2	2.44961	9
64	7	3	4.41269	3	96	2	2.94179	11
76	8	3	4.82666	3	114	2	2.1777	11
102	9	3	5.57425	3	153	2	3.71617	13
118	10	3	6.00854	3	177	2	4.00569	15

Table 7: Resultados para topologia anel cordal

Conforme [ARD 81], para um dado diâmetro  $K$ , o anel cordal com o máximo número de nodos ( $N_{Max}$ ) será chamado de Anel Cordal Máximo. O período correspondente é chamado de *tamanho de cordal ótimo* ( $w_{Opt}$ ).

Na tabela 7 encontram-se os dados para a topologia anel cordal com  $N_{Max}$  (i. é,  $N \wedge w = f(K)$ ).

## 4 Resultados e Interpretação

A tabela 8 resume os resultados obtidos para os critérios de análise em função de  $N$ . Devido à dificuldade na determinação das funções exatas de  $Ak$  para as topologias CCC, anel cordal e De Bruijn, foram obtidas apenas aproximações (com resíduos razoavelmente pequenos) através do método dos mínimos quadrados ([CLA 89]).

O gráfico superior esquerdo da figura 3 ilustra as curvas de  $Ak$  em função de  $N$  para as topologias estáticas analisadas. Por esse gráfico e pelos resultados mostrados nas tabelas anteriores, observa-se que a rede que apresenta o menor crescimento da distância média internodos e do diâmetro é a  $n$ -cúbica, o que a torna adequada para a execução de aplicações onde existe uma taxa de comunicação alta entre processos e que tal comunicação seja completamente aleatória. As topologias em árvore, CCC e principalmente anel, ao contrário, são inadequadas para taxas de comunicações altas quando a troca de mensagens não é efetuada entre nodos adjacentes. Conforme os gráficos  $NXAk$  e  $NXK$  da figura 3, com exceção da topologia em anel, todas as outras analisadas apresentam uma curva semelhante da distância média internodos e do diâmetro em função do número de elementos de processamento.

Se por um lado a topologia  $n$ -cúbica apresenta um "bom" comportamento em relação ao diâmetro e à distância média internodos, a variação do grau em função de  $N$  faz com que tal estratégia deva ser descartada quando do projeto da rede se o valor de  $N$  for maior do que 16 ou pretende-se incrementar o número total de EPs no decorrer da vida da máquina paralela, já que tal variação implica em um grande crescimento do número de barramentos da rede, além do próprio custo de EPs com mais de 4 portas.

Pelo gráfico  $NXB$  da figura 3, as topologias DeBruijn e malha apresentam um comportamento quase idêntico em relação ao crescimento do número de ligações em função do crescimento de  $N$ . O grau de ambas é fixo e igual a quatro, o que faz com que, em termos de custo, uma não apresente vantagem sobre a outra. Elas situam-se em uma faixa intermediária de custo. Em uma faixa inferior, encontram-se as topologias em árvore e anel. A topologia em árvore binária é, de todas as topologias conhecidas de grau três, a com o menor custo.

Em termos de vulnerabilidade da rede, a rede em anel possui um dos menores valores (dois) para conectividade em relação aos vértices (o que significa que a falha de dois nodos não-adjacentes é suficiente para desconectar a rede). A grande vulnerabilidade da topologia em anel e em árvore binária (onde existe apenas um caminho vértice-disjunto entre qualquer par de nodos) torna essas topologias, em sua configuração original, inadequadas quando é exigida da rede uma grande tolerância a falhas. A topologia em anel cordal apresenta-se como uma boa alternativa para a topologia em anel, pois ela possui uma tolerância a falhas superior com um baixo custo (o anel cordal ótimo exige sempre 50% de ligações a mais que o anel).

A variação da conectividade é normalmente igual ao grau das topologias. Isso deve-se à uniformidade da maioria das topologias analisadas. A uniformidade das topologias implica na conectividade da rede ser igual ao número médio de caminhos disjuntos ("conectividade média"). Mesmo nas topologias não-uniformes, como DeBruijn e CCC, a conectividade e a conectividade média não apresentam valores significativamente diferentes<sup>2</sup> pois o número de nodos com grau diferente do grau da rede é pequeno e fixo. A medida de conectividade média é interessante em redes não-uniformes em que todos os nodos apresentam variação do grau em função de  $N$  e em redes irregulares.

Finalmente, em relação à carga esperada dos barramentos, nota-se novamente, conforme o gráfico  $NXL$  da figura 3, a pouca diferença entre as topologias analisadas, com exceção novamente da rede em anel. Nas topologias uniformes ( $n$ -cúbica, anel, anel cordal, completamente conectada e malha), a carga esperada dos barramentos é igual se as comunicações são uniformes.

Pelos resultados obtidos conclui-se que as topologias mais "baratas" são as redes em árvore e anel. Em contrapartida, elas são as mais ineficientes em termos de  $K$ ,  $Ak$ ,  $L$  e conectividade (conforme será visto a seguir, isto não as torna, de forma alguma, topologias que devam ser, já de início, descartadas como estratégia de interconexão dos EPs de uma máquina paralela). A comparação das topologias em árvore binária, DeBruijn e  $n$ -cúbica é interessante por elas apresentarem uma mesma curva para o fator de incremento, fazendo-as "concorrentes" em relação aos aspectos físicos. Em relação aos diâmetros, a BDM e  $n$ -cúbica apresentam os mesmos valores, bem inferiores aos valores da árvore binária; os graus das topologias em árvore e BDM são constantes (3 e 4, respectivamente) contra o grau variável da  $n$ -cúbica; em relação ao número total de barramentos, a rede BDM situa-se em um estágio intermediário entre as outras duas topologias (o mesmo valendo para a vulnerabilidade). Assim, se a análise restringir-se apenas aos fatores vistos e a essas três topologias, a escolha deve recair sobre a BDM.

Conforme dito anteriormente, algumas topologias são mais adequadas do que outras para a execução de determinadas aplicações. Assim, quando do projeto da rede, já deve-se ter em mente quais algoritmos e que sistema operacional será executado na máquina paralela. O agrupamento de problemas de tempo real em classes é bastante conveniente e útil para auxiliar o projetista na seleção da estratégia de interconexão mais adequada. [SAM 89] descreve classes de problemas que abrangem uma gama de algoritmos. Destacam-se as seguintes classes:

- *Multiplex*: essa classe cobre um intervalo de problemas caracterizados por 1) operações com  $N$  dados de entrada que produzem um único resultado e 2) avaliações que podem ser descritas através de árvores. Avaliações de expressões aritméticas e polinomiais e problemas ligados à área de inteligência artificial, pesquisa e banco de dados são incluídas nessa categoria;
- *Pipeline*: tal classe abrange problemas cujos dados "fluem" em uma ou duas direções simultaneamente (multiplicação de vetores e matrizes, ordenação de elementos, transformada rápida de Fourier etc.);
- *Ascende e Descende*: o paradigma desses algoritmos é a execução iterativa da estratégia "divide-e-conquista". Tanto a entrada quanto a saída são vetores com  $N$  ( $N = 2^n$ ) itens de dados. Um problema é dividido em dois subproblemas de igual tamanho; os pares de itens de dados gerados

<sup>2</sup>Em topologias não-uniformes, a conectividade da rede é igual ao menor grau dentre todos os graus da rede

são combinados através da execução de uma única operação (*marry step*). Assume-se que os dados de entrada  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$  são armazenados nas memórias  $m_0, m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$  respectivamente. Um algoritmo pertencente à classe DESCENDE realiza uma seqüência de operações básicas sobre os pares de dados que estão inicialmente em  $2^{n-1}$  memórias, depois em  $2^{n-2}, 2^{n-3}$  e assim por diante até que os dados estejam em apenas uma memória; no caso de algoritmos do tipo ASCENDE, os dados estão inicialmente em uma memória, depois duas etc. até que eles estejam em  $2^{n-1}$  memórias. [PRE 81] inclui a multiplicação de matrizes nesta classe (e não na pipeline), além de transformada rápida de Fourier, rearranjo de dados, combinação biotônica (*biotonic merge*) e resolução de funções simétricas.

Pelos resultados obtidos, ainda, pode-se afirmar que a topologia em árvore binária adapta-se bem à resolução de problemas da classe multiplex, onde os nodos correspondem às operações e as arestas correspondem ao fluxo de dados entre as operações. O diâmetro grande da rede não implica em *overhead* pois a comunicação ocorre apenas entre nodos "pais" e "filhos". O problema da grande vulnerabilidade persiste utilizando-se a topologia na sua forma mais simples mas pode ser minimizado pela adição de ligações "extras". [DES 78] mostra uma topologia em árvore com ligações adicionais que aumentam a tolerância a falhas e tornam o tráfego das mensagens mais uniforme. Outra variação da topologia em árvore chamada de rede diamante é proposta em [WOO 85] objetivando minimizar outro problema da topologia, o do "gargalo" da rede (o nodo raiz, no caso).

A natureza do fluxo de dados dos problemas da classe *pipeline* permite que bons (rápidos) resultados sejam obtidos com o uso das topologias  $n$ -cúbica, malha e anel (e sua variação, o anel cordal). Neste caso, os valores excessivos de  $Ak$  e  $K$  da topologia em anel não causam um *overhead* significativo pois a comunicação é efetuada somente entre nodos adjacentes.

A topologia CCC foi projetada especificamente para tratar problemas das classes ASCENDE/DESCENDE. Entretanto, [SAM 89] mostra que a topologia DeBruijn pode resolver certos problemas dessa classe até duas vezes mais rápido do que a CCC. Ele também mostra a eficiência da rede De Bruijn quando da execução de métodos de ordenação.

## 5 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi o de fornecer parâmetros para análise de máquinas paralelas dentro do nível de interconexão, mais especificamente, a nível de topologia. Os critérios mostrados foram: atraso (influenciado basicamente pela distância média e máxima internodos), limites de simulação (a capacidade de uma rede realizar as mesmas funções de interconexão de outra), carga esperada dos barramentos (probabilidade de uso de uma ligação qualquer), permutabilidade (número de permutações diferentes permitidas pela rede), particionabilidade (capacidade da rede ser dividida em sub-redes), custo (representado basicamente pelo número total de ligações e grau dos nodos) e conectividade (número mínimo de nodos que, inoperantes, cancelam as comunicações entre dois ou mais pares de nodos da rede).

As funções de aspectos de análise de topologias obtidas neste trabalho para diversas estratégias torna mais fácil a comparação destas entre si e também a construção de ferramentas automáticas para análise de desempenho.

Deve ser salientado que a maior parte dos critérios levantados servem apenas para auxiliar na escolha da estratégia de interconexão e não para determinar a escolha, pois isso exige uma análise mais profunda que envolva os outros níveis de influência (Sistema Operacional, Tecnologia etc. [NAV 88]). Se quando do projeto de uma máquina paralela a análise restringir-se apenas ao nível de interconexão, então uma topologia em árvore, por exemplo, jamais seria selecionada pois ela apresenta alguns aspectos negativos que, à primeira vista, podem parecer determinantes na rejeição de tal estratégia de interconexão (altos valores para diâmetro, distância média internodos e carga esperada dos barramentos, grande vulnerabilidade etc.) mesmo considerando-se seus aspectos positivos (grau constante, pequeno número de barramentos). Porém, se a análise for estendida a nível do *software* de aplicação e sistema operacional, ela pode ser bastante vantajosa. Se a comunicação dos processos restringe-se a processos pais e filhos e a distribuição dos processos nos EPs obedece à hierarquia dos mesmos, então os valores das distância máxima e média internodos é irrelevante (não implicarão em *overhead* significativo).

## BIBLIOGRAFIA

- [ARD 81] ARDEN, B. W. et al. Analysis of chordal ring Network. IEEE Transactions on Computers, New York, v.30, n.4, p.291-295, Apr. 1981.
- [BAN 88] BANERJEE, P. The cubical ring connected cycles: a fault-tolerant parallel computation network. IEEE Transactions on Computers, New York, v.37, n.5, p. 632-636, May 1988.
- [CLA 89] CLÁUDIO, D. M. et al. Cálculo numérico computacional: teoria e prática. São Paulo: Atlas, 1989. 464p.
- [DES 78] DESPAIN, A. M. et al. X-TREE: a tree structured multiprocessor computer architecture. In: **ANNUAL COMPUTER ARCHITECTURE CONFERENCE**, 5., Apr. 1978, New York. Proceedings... New York: IEEE, 1978. p. 144-151.
- [DOT 84] DOTY, K. W. New design for dense processor interconnection networks. IEEE Transactions on Computers, New York, v.33, n.5, p. 447-450, May 1984.
- [FRA 71] FRANK, H. et al. **Communication, transmission and transportation networks**. Reading: Addison-Wesley Company, 1971.
- [KOL 92] KOLIVER, C. Topologias de Interconexão de Processadores: Critérios para Análise. CPGCC-UFRGS. Porto Alegre, 1992.
- [MAE 81] MAEKAWA, M. Optimal processor interconnection topologies In: **ANNUAL COMPUTER ARCHITECTURE CONFERENCE**, 13., June 2-5, 1986, Tokyo. Proceedings... New York: IEEE, 1986. p. 171-185.
- [NAV 88] NAVAUX, P. O. A. et al. Avaliação do desempenho de máquinas paralelas. In: **SIMPÓSIO BRASILEIRO DE ARQUITETURA DE COMPUTADORES**, 2., 1988, Águas de Lindóia. São Paulo: SBC, 1988.
- [PRE 81] PREPARATA, P. F. et al. The cube-connected cycles: a versatile network for parallel computation. Comm. of the ACM, New York, v.24, n.5, p.300-309, May 1981.
- [RAG 86] RAGHAVENDRA, C. S. et al. A survey of multiconnected loop topologies for local computer networks. Computer Networks and ISDN Systems, n.11, p.29-42, 1986.
- [SAM 89] SAMATHAM, M. R. et al. The De Bruijn multiprocessor network: a versatile parallel processing and sorting network for VLSI. IEEE Transactions on Computers, New York, v.38, n.4, p.567-81, Apr. 1989.
- [WOO 85] WOO, N. S. et al. A symmetric tree structure interconnection network and its message traffic. IEEE Transactions on Computers, New York, v.34, n.8, p.766-769, Aug. 1985.

Rede	$K$	$G$	$Ak$	$B$	$f(N)$	$L$
ANEL	$\lfloor N/2 \rfloor$	2	$\frac{[(N^2+N)/4] - [N/4]}{(N-1)}$	$N$	1	$Ak$
CC	1	$N-1$	1	$(N-1) \cdot \frac{N}{2}$	$\frac{2}{N-1}$	
MALHA	$\sqrt{N}-1$	4	$\sqrt{N}/2$	$2 \cdot N$	$2 \cdot \frac{\sqrt{N}}{+1}$	$\sqrt{N}/4$
ÁRVORE	$2 \log_2(N+1) - 2$	3	$\frac{N \log_2(N+1)(5+2 \cdot N)}{N^2-N}$ $-\frac{6 \cdot N+6}{1-N}$ $+\frac{\log_2(N+1)(4+N)}{N^2-N}$	$N-1$	$N+1$	$\frac{Ak}{N-1} \cdot N$
CÚBICA	$\log_2 N$	$\log_2 N$	$\frac{N \log_2 N}{2 \cdot N-2}$	$\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$	2	$\frac{N}{N-1}$
CORDAL	$\lfloor \sqrt{N} \rfloor$	3	$0,58142274 \cdot N^{0,48856090}$	$\frac{3 \cdot N}{2}$	$\frac{2}{3} \cdot Ak$	
CCC	$\frac{N}{8} + 3$	3	$-0,0000198 \cdot N^2 + 0,06139471 \cdot N$	$N+12$	8	$\frac{Ak \cdot N}{N+12}$
BDM	$\log_2 N$	4	$-0,0002252 \cdot N^2 + 0,05225581 \cdot N + 1,18717517$	$2 \cdot N - 1$	$N$	$\frac{Ak \cdot N}{2 \cdot N - 1}$

Table 8: Funções das curvas para as topologias estáticas

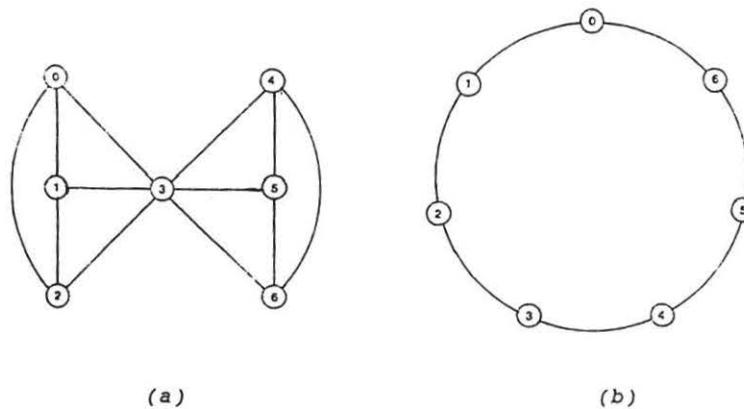


Figura 1 - Conectividade X Vulnerabilidade

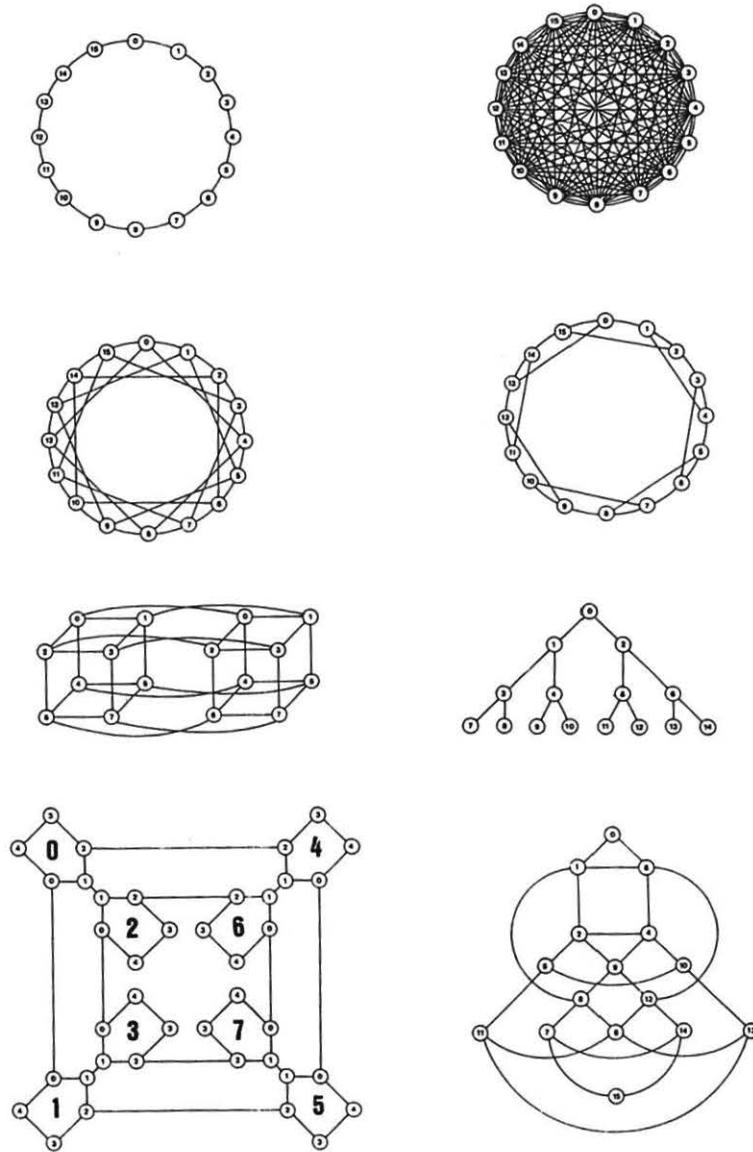


Figura 2 - Topologias Estáticas

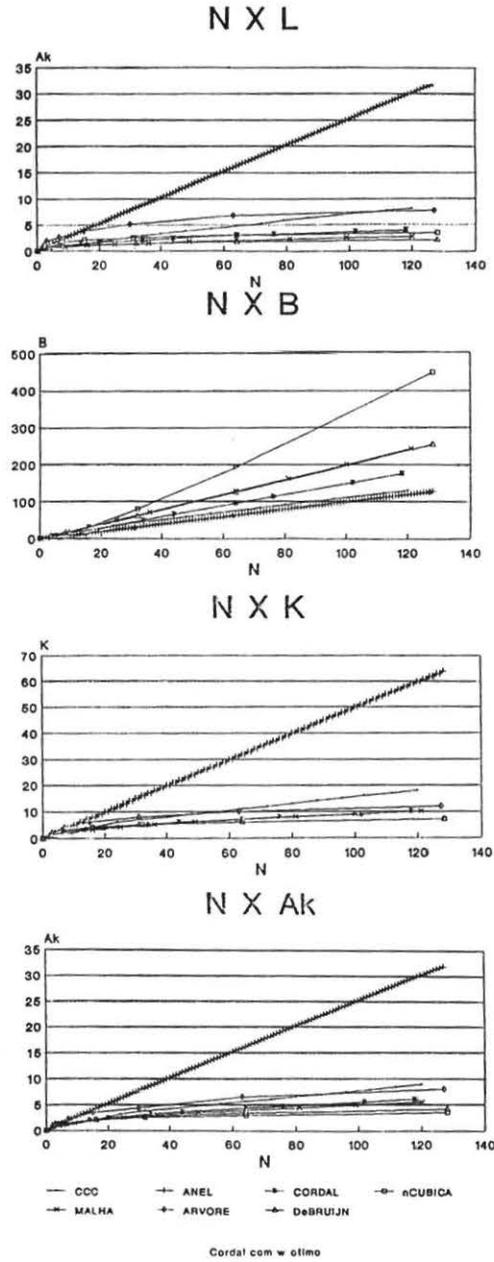


Figura 3 - Comportamento das topologias estáticas