

# Estratégia de Purificação de Links Virtuais para Redes de Entrelaçamento Quânticas

David Tavares<sup>1</sup>, Diego Abreu<sup>1</sup>, Antônio Abelém<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Ciências Exatas e Naturais – Universidade Federal do Pará (UFPA)

{david.tavares}@icen.ufpa.br, diego.abreu@itec.ufpa.br abelem@ufpa.br

**Abstract.** *End-to-end entanglement distribution in multi-hop quantum networks experiences fidelity degradation as entanglement swapping progresses over noisy and heterogeneous channels. In this paper, we propose a virtual-link purification strategy in which multiple EPR pairs are used at each stage to create virtual links between non-adjacent nodes and then purified in cascade using symmetric purification. The approach allows parameterizing the number of links per stage and follows a hierarchical design, with a more complete first stage and simplified purification in subsequent stages. We implement a time-slot-based orchestrator and compare the proposal against conventional swapping under Werner and bit-flip noise models. The results indicate higher end-to-end fidelity with virtual-link purification.*

## 1. Introdução

A Internet Quântica representa um novo paradigma de comunicação, no qual recursos quânticos, como superposição e emaranhamento, habilitam aplicações inviáveis em redes clássicas, incluindo comunicação intrinsecamente segura e computação quântica distribuída [Kimble 2008, Wehner et al. 2018]. Para que essas aplicações sejam suportadas, é necessário gerar, distribuir e manter pares emaranhados, conhecidos como pares Einstein-Podolsky-Rosen (EPR), com alta fidelidade entre nós finais, mesmo na presença de ruídos e limitações físicas dos enlaces.

A distribuição de emaranhamento em longas distâncias depende de redes multi-salto, compostas por enlaces elementares conectados por repetidores quânticos. Nessas redes, a operação de *entanglement swapping* permite estender o emaranhamento entre nós não adjacentes ao combinar pares EPR ao longo de uma rota [Zukowski et al. 1993, Dür et al. 1999]. Entretanto, como a fidelidade dos pares é afetada por ruídos do canal, imperfeições operacionais e decoerência, o *swapping* sequencial tende a acumular degradações ao longo das etapas, reduzindo a fidelidade fim a fim e comprometendo a utilidade do emaranhamento para as camadas superiores.

Nesse contexto, a camada de enlace quântica é responsável por oferecer um serviço robusto de criação e entrega de pares EPR, conciliando requisitos de fidelidade e desempenho [Dahlberg et al. 2019]. Para isso, operações de purificação são frequentemente empregadas: múltiplos pares EPR com fidelidade mais baixa são combinados para produzir um par com fidelidade mais alta [Pan et al. 2001]. Embora eficaz, a purificação é iterativa, consome recursos e está sujeita a falhas probabilísticas. Além disso, seu desempenho pode ser limitado por ruídos heterogêneos e por restrições temporais impostas pela decoerência. Por esse motivo, estratégias de controle e agendamento têm sido investigadas para maximizar o *throughput* e cumprir metas de fidelidade [Xiao et al. 2024a],

considerando que diferentes enlaces podem estar sujeitos a modelos de ruído distintos [Panigrahy et al. 2023].

Este artigo parte da observação de que, em rotas multi-salto, o ponto crítico não é apenas a qualidade dos enlaces físicos elementares, mas também a degradação progressiva causada pelo *swapping* ao longo da rota. A maioria das abordagens trata a purificação como uma etapa de preparação dos enlaces físicos iniciais, sem considerar a restauração da fidelidade nos *links virtuais* gerados após operações intermediárias de *swapping*. Motivados por essa lacuna, propomos uma **Estratégia de Purificação de Links Virtuais** para redes quânticas multi-salto. A proposta utiliza múltiplos pares EPR em cada etapa de *swapping* para formar links virtuais entre nós não adjacentes, os quais são posteriormente purificados em cascata por meio de purificação simétrica antes de serem propagados para as próximas etapas.

A abordagem adota uma estrutura hierárquica, parametrizando explicitamente o número de pares utilizados por etapa e permitindo diferentes níveis de purificação. Avaliamos a proposta comparando o *entanglement swapping* convencional com o *swapping* com purificação de links virtuais, sob os modelos de ruído *Werner* e *bit-flip*. As principais contribuições deste trabalho são:

- A formulação de uma estratégia de purificação aplicada a *links virtuais* gerados ao longo do *swapping* sequencial em rotas multi-salto;
- Um orquestrador hierárquico que controla o uso de múltiplos pares por etapa e realiza purificação em cascata via purificação simétrica;
- Uma avaliação comparativa com *swapping* convencional sob ruídos *Werner* e *bit-flip*, evidenciando ganhos de fidelidade fim a fim.

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta a fundamentação teórica sobre distribuição de emaranhamento, *swapping* e purificação. A Seção 3 discute os trabalhos relacionados. A Seção 4 detalha o protocolo *Purify and Swap*. A Seção 5 descreve os resultados experimentais. Por fim, a Seção 6 apresenta as conclusões e direções de trabalhos futuros.

## 2. Fundamentação Teórica

Nesta seção, apresentam-se os conceitos fundamentais para a compreensão do trabalho, com foco na distribuição de emaranhamento em redes multi-salto, na operação de *entanglement swapping* e nos protocolos de purificação. Discutem-se ainda os modelos de ruído considerados e a formalização matemática da purificação iterativa, que serve de base para o protocolo proposto na Seção 4.

### 2.1. Pares EPR e Fidelidade

O recurso central para a comunicação quântica é o par emaranhado (par EPR ou de Bell), comumente representado pelo estado  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ . Em sistemas reais, a interação com o ambiente e imperfeições nos dispositivos degradam esse estado ideal.

A qualidade de um par EPR real  $\rho$  é quantificada pela sua fidelidade  $F$  em relação ao estado alvo  $|\Phi^+\rangle$ , definida como:

$$F(\rho, |\Phi^+\rangle) = \langle \Phi^+ | \rho | \Phi^+ \rangle. \quad (1)$$

Valores de fidelidade próximos a 1 indicam alta pureza do emaranhamento, requisito essencial para a execução de protocolos das camadas superiores, como a computação quântica distribuída.

## 2.2. Distribuição Multi-salto e *Entanglement Swapping*

Dadas as limitações de alcance dos enlaces físicos — decorrentes de perdas em fibras ópticas ou despolarização — a distribuição de emaranhamento em longas distâncias depende de repetidores quânticos. O mecanismo fundamental para essa extensão é o *entanglement swapping*.

Essa operação permite estender o emaranhamento entre nós não adjacentes. Considere quatro nós: Alice,  $N_1$ ,  $N_2$  e Bob. Se Alice compartilha um par EPR com  $N_1$ , e  $N_2$  compartilha outro par com Bob, os nós intermediários podem realizar uma medição de estado de Bell (*Bell State Measurement* — BSM) em seus qubits locais. O resultado dessa medição, após comunicado via canal clássico, projeta os qubits remotos de Alice e Bob em um estado emaranhado, criando um novo enlace entre eles e consumindo os pares originais.

Entretanto, o *swapping* introduz degradação. Uma abstração comum modela a fidelidade do enlace resultante como o produto das fidelidades dos enlaces de entrada:

$$F_{A,C} = F_{A,B} \cdot F_{B,C}. \quad (2)$$

Em rotas multi-salto, esse efeito se acumula a cada etapa, produzindo uma queda progressiva na fidelidade fim a fim. Esse comportamento motiva o uso de mecanismos de purificação ao longo da rota, conforme discutido nas seções seguintes.

## 2.3. Modelos de Ruído: *Bit-flip* e *Werner*

O desempenho de operações fundamentais em redes quânticas, como a purificação de emaranhamento e o *entanglement swapping*, depende diretamente do modelo de ruído que afeta os canais quânticos. Neste trabalho, consideramos dois modelos amplamente utilizados na literatura, que capturam diferentes características de degradação do estado quântico.

O primeiro modelo é o ruído do tipo *bit-flip*, no qual ocorre a inversão do estado quântico por meio da aplicação da operação de Pauli- $X$ . Nesse cenário, um estado de Bell ideal  $|\Phi^+\rangle$  pode ser convertido em  $|\Psi^+\rangle$  com certa probabilidade. Como resultado, o estado compartilhado entre os nós torna-se uma mistura estatística entre esses dois estados, conforme descrito pela Equação 3. Nesse caso, o parâmetro  $F$  representa a fidelidade do estado desejado  $|\Phi^+\rangle$ , enquanto  $1 - F$  corresponde à probabilidade de ocorrência do erro de inversão.

$$\rho = F |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1 - F) |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|. \quad (3)$$

Por outro lado, o modelo de ruído de Werner descreve um cenário mais geral e isotrópico, no qual a degradação do estado ocorre de forma uniforme entre os demais estados de Bell. Nesse modelo, além da possibilidade de transição para  $|\Psi^+\rangle$ , o sistema também pode evoluir para  $|\Phi^-\rangle$  e  $|\Psi^-\rangle$ , todos com igual probabilidade. Assim, o estado

resultante é uma mistura entre o estado ideal e os outros três estados de Bell, conforme apresentado na Equação 4. Novamente, o parâmetro  $F$  indica a fidelidade em relação ao estado alvo, enquanto o termo  $(1 - F)/3$  distribui uniformemente o erro entre os demais estados.

$$\rho = F |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \frac{1 - F}{3} (|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| + |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|). \quad (4)$$

Esses dois modelos permitem analisar diferentes regimes de ruído: enquanto o modelo *bit-flip* captura erros direcionais específicos, o modelo de Werner representa um cenário mais realista em que múltiplos tipos de erro podem ocorrer de forma equiprovável. A comparação entre ambos fornece uma base importante para avaliar a robustez de protocolos de purificação e distribuição de emaranhamento em redes quânticas.

#### 2.4. Purificação Simétrica de Entrelaçamento

A purificação combina dois ou mais pares EPR de fidelidade inferior para produzir um único par de fidelidade superior. O processo é probabilístico: em caso de sucesso, obtém-se um par melhorado; em caso de falha, os recursos envolvidos são descartados. Para dois pares com fidelidades  $F_1$  e  $F_2$ , a probabilidade de sucesso  $p_{\text{suc}}$  e a fidelidade resultante  $F'$  dependem do modelo de ruído do canal:

**Canais *bit-flip*:**

$$p_{\text{suc}} = F_1 F_2 + (1 - F_1)(1 - F_2), \quad F' = \frac{F_1 F_2}{p_{\text{suc}}}. \quad (5)$$

**Canais *Werner*:**

$$p_{\text{suc}} = \left( F_1 + \frac{1 - F_1}{3} \right) \left( F_2 + \frac{1 - F_2}{3} \right) + \left( \frac{2(1 - F_1)}{3} \right) \left( \frac{2(1 - F_2)}{3} \right), \quad (6)$$

$$F' = \frac{F_1 F_2 + \frac{(1 - F_1)(1 - F_2)}{9}}{p_{\text{suc}}}. \quad (7)$$

#### 2.5. Links Virtuais e Purificação em Cascata

O conceito de **link virtual** refere-se a um enlace lógico estabelecido entre nós não adjacentes, obtido por meio de uma ou mais operações de swapping sobre enlaces físicos elementares. Sua fidelidade é função das qualidades dos pares precursores e das operações intermediárias realizadas.

Para elevar a fidelidade de um link virtual antes de novas operações de swapping, emprega-se a **purificação em cascata**: dado um conjunto de  $m$  pares EPR com fidelidades  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ , a purificação sequencial segue a recorrência:

$$\tilde{f}^{(1)} = f_1, \quad \tilde{f}^{(j+1)} = \text{PURIFY}(\tilde{f}^{(j)}, f_{j+1}), \quad j = 1, \dots, m - 1, \quad (8)$$

onde  $\text{PURIFY}(\cdot)$  representa o mapeamento para a fidelidade pós-purificação definido nas Equações (5) ou (7), conforme o modelo de ruído do canal. Essa formulação permite quantificar o ganho incremental de fidelidade em função do número de pares consumidos, e constitui o mecanismo central do protocolo.

### 3. Trabalhos Relacionados

O avanço das pesquisas em redes quânticas tem consolidado a purificação e o agendamento de recursos como mecanismos essenciais para viabilizar a comunicação de longa distância. A literatura atual busca, principalmente, otimizar a fidelidade e o *throughput* diante da natureza probabilística das operações quânticas. No entanto, muitas abordagens concentram a purificação nos enlaces físicos elementares e não tratam diretamente a degradação acumulada nos links virtuais gerados ao longo do *entanglement swapping* sequencial.

Wang et al. (2023) [Wang et al. 2023] e Chen e Jia (2024) [Chen and Jia 2024] investigam a coordenação entre purificação e *entanglement swapping*. O primeiro utiliza modelos de permutação para definir sequências de operações com menor atraso, enquanto o segundo explora árvores de purificação integradas ao roteamento. Embora relevantes, essas abordagens tendem a tratar a purificação como uma etapa anterior ao estabelecimento dos enlaces virtuais, deixando em aberto a restauração da fidelidade após múltiplas etapas de swapping.

Em uma perspectiva de controle em nível de rede, Xiao et al. (2024) [Xiao et al. 2024b] propõem o *Purification Scheduling Control* (PSC) para gerenciar múltiplas requisições e alocar recursos de forma eficiente. Pérez Castro et al. (2024) [Pérez Castro et al. 2024], por sua vez, analisam o impacto das memórias quânticas e de protocolos de gerenciamento em cadeias de repetidores. Esses trabalhos reforçam a importância do controle de recursos, mas não aprofundam a purificação dos links virtuais formados durante a construção progressiva da rota.

#### 3.1. Diferenças em Relação ao Trabalho Anterior

Nossa investigação anterior [Tavares et al. 2025] propôs uma estratégia de agendamento híbrida para purificação em redes quânticas com canais ruidosos heterogêneos, ajustando dinamicamente o número de rodadas sem conhecimento *a priori* do modelo de ruído. O foco daquele trabalho estava na eficiência local dos enlaces físicos, buscando reduzir desperdício de pares EPR e melhorar o *throughput* da purificação.

Neste artigo, o foco é a degradação de fidelidade em rotas multi-salto. Diferentemente do trabalho anterior, a purificação também é aplicada aos links virtuais gerados após operações intermediárias de *entanglement swapping*. Assim, a principal contribuição está em integrar swapping sequencial e purificação hierárquica de links virtuais, buscando restaurar a fidelidade ao longo da rota antes da entrega fim a fim.

### 4. Protocolo *Purify and Swap*

O protocolo *Purify and Swap* (PS) integra as operações de purificação em cascata, formalizadas na Seção 2.5, ao processo de *entanglement swapping* sequencial. O objetivo é estabelecer enlaces de longa distância com maior fidelidade entre os nós de origem e destino, reduzindo a degradação acumulada em rotas multi-salto.

#### 4.1. Visão Geral da Proposta

O protocolo recebe como entrada uma rota multi-salto, as fidelidades dos enlaces físicos, o número de pares EPR alocados por etapa e o nível de purificação  $\eta$ . O parâmetro  $k$

define quantos pares EPR são usados em uma etapa, enquanto  $\eta$  define até qual etapa a purificação será aplicada. Quando a etapa atual  $e$  satisfaz  $e \leq \eta$ , os links virtuais gerados são purificados em cascata; caso contrário, realiza-se apenas o *swapping* simples.

A principal diferença da proposta é que a purificação não se limita aos enlaces físicos elementares. Após operações intermediárias de *swapping*, os links virtuais formados entre nós não adjacentes também são purificados antes de serem propagados para as próximas etapas da rota.

## 4.2. Funcionamento Geral

Considere uma rota com quatro nós: Alice,  $N_1$ ,  $N_2$  e Bob, conforme ilustrado nas Figuras 1 e 2. O processo é dividido em etapas de *swapping* sequencial, nas quais pares EPR físicos adjacentes são combinados para gerar links virtuais progressivamente mais longos.

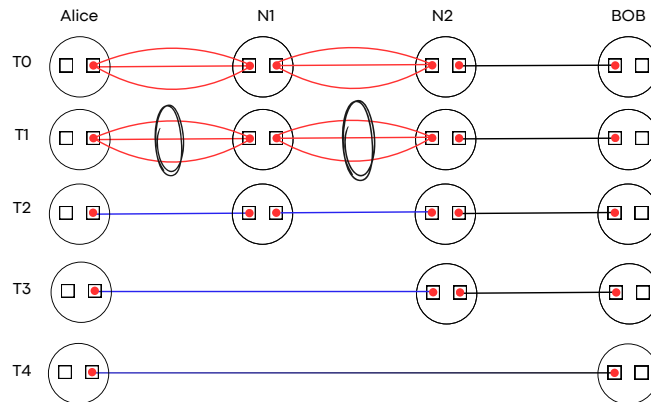
Na **Etapa 1** (Alice– $N_1$ – $N_2$ ), são alocados  $k$  pares EPR em cada enlace físico. O *swapping* gera  $k$  links virtuais entre Alice e  $N_2$ , com fidelidade  $F_v = F_1 \cdot F_2$ . Esses links são submetidos à purificação em cascata (Equação 8), produzindo um único par purificado com fidelidade  $F_p > F_v$ .

Nas etapas subsequentes com  $e \leq \eta$ , o par purificado acumulado é combinado com novos pares EPR do enlace seguinte por meio de purificações sequenciais. Para etapas além do nível  $\eta$ , aplica-se o *swapping* simples, com fidelidade  $F_s = F_{\text{acumulada}} \cdot F_{\text{enlace}}$ .

## 4.3. Nível 1 de Purificação (PS-1)

No PS-1, fixa-se  $\eta = 1$ , de modo que apenas a primeira etapa de links virtuais, gerada a partir de Alice– $N_1$  e  $N_1$ – $N_2$ , é submetida à purificação hierárquica. As etapas restantes utilizam *swapping* simples. A Figura 1 ilustra esse processo entre os instantes  $T_0$  e  $T_4$ .

Em  $T_0$  e  $T_1$ , são alocados pares EPR nos dois primeiros enlaces. Em seguida, o *swapping* cria links virtuais entre Alice e  $N_2$ , que são purificados em cascata. A partir de  $T_2$ , o par purificado é estendido por *swapping* simples até Bob.



**Figura 1. Protocolo PS-1: purificação hierárquica aplicada somente à primeira etapa de links virtuais (entre Alice e  $N_2$ ). As demais etapas utilizam *swapping* simples.**

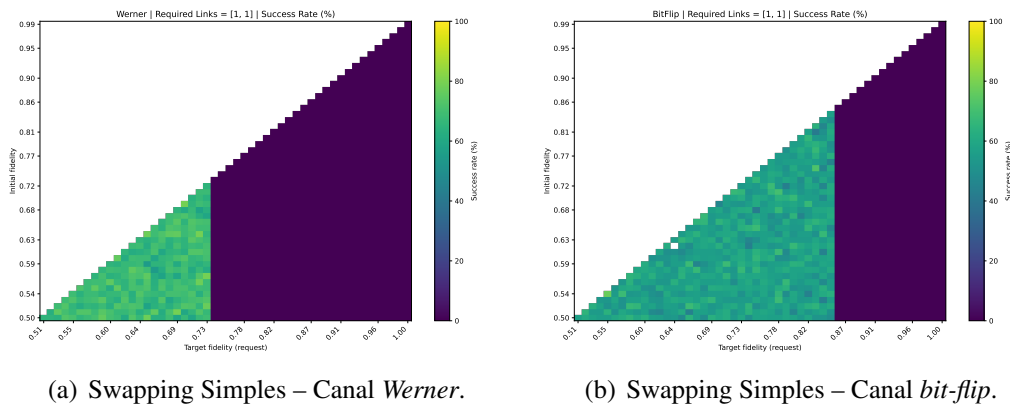


que satisfaça uma fidelidade mínima exigida pela aplicação (*Fidelidade Alvo*), dada uma fidelidade base dos pares físicos gerados nos enlaces (*Fidelidade Inicial*).

### 5.1. Cenário Base: Entanglement Swapping Convencional (Sem Purificação)

Para estabelecer uma linha de base (*baseline*) e evidenciar a necessidade de purificação hierárquica, o primeiro experimento avalia uma rota onde é alocado estritamente um único par EPR por enlace em cada etapa (cenário [1, 1]). Nessa configuração, o protocolo não possui redundância de links para executar operações de purificação, restringindo-se a realizar o *entanglement swapping* simples de ponta a ponta.

A Figura 3 apresenta os *heatmaps* de taxa de sucesso para este cenário sob ruídos de *Werner* (Figura 3(a)) e *bit-flip* (Figura 3(b)). O eixo vertical representa a fidelidade inicial dos pares físicos gerados, enquanto o eixo horizontal indica a fidelidade alvo requisitada. A intensidade das cores reflete a taxa de sucesso obtida.



**Figura 3. Taxa de sucesso para o *entanglement swapping* simples (sem purificação, cenário [1, 1]). A área escura evidencia a impossibilidade de atender a requisições onde a fidelidade alvo supera a fidelidade degradada pelo *swapping*.**

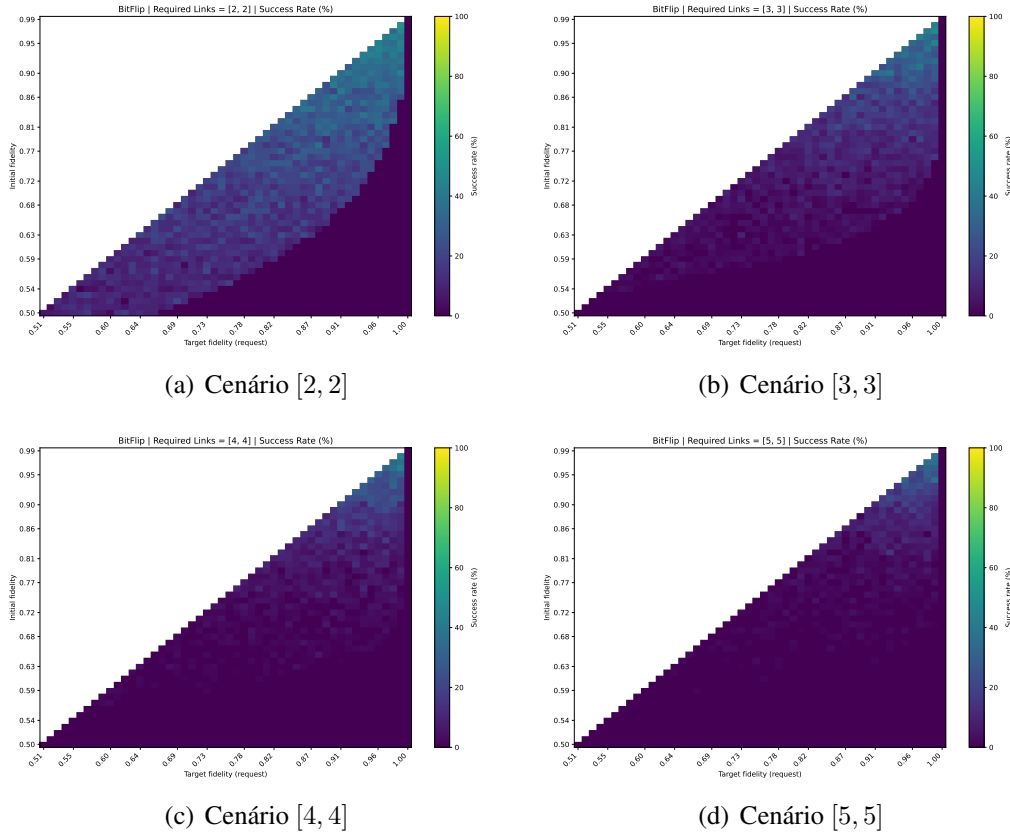
Como pode ser observado em ambas as subfiguras, existe uma fronteira rígida e triangular de sucesso. A região roxa (taxa de sucesso nula) domina grande parte do gráfico, evidenciando que, sem purificação, a fidelidade do par resultante sofre uma degradação multiplicativa inerente ao processo de *swapping*. Consequentemente, é fisicamente impossível atender a qualquer requisição cuja fidelidade alvo seja superior à fidelidade do link virtual resultante. Para fidelidades iniciais baixas, a taxa de sucesso cai drasticamente mesmo para exigências de fidelidade alvo modestas.

A diferença entre os modelos de ruído afeta levemente a inclinação e a intensidade da área de sucesso (tons de verde/amarelo), mas a limitação fundamental da ausência de purificação permanece. Para transpor essa barreira e expandir a área de sucesso em direção ao canto inferior direito do *heatmap* (baixa fidelidade inicial e alta fidelidade alvo), torna-se indispensável a injeção de mais pares EPR e a aplicação do protocolo *Purify and Swap*.

### 5.2. Impacto da Purificação e Aumento de Recursos: Canal *Bit-flip*

Após constatar a limitação estrutural do cenário sem purificação, este experimento avalia o impacto da injeção gradual de recursos na rede. Para isso, o número de pares EPR alo-

cados por enlace físico foi incrementado sistematicamente de 2 até 5 pares em cada etapa (cenários [2, 2] a [5, 5]), focando inicialmente no modelo de ruído *bit-flip*. A redundância de recursos quebra a barreira do *swapping* simples e ativa as operações probabilísticas do protocolo *Purify and Swap*. A Figura 4 ilustra os *heatmaps* de taxa de sucesso para essa progressão de alocação de links.



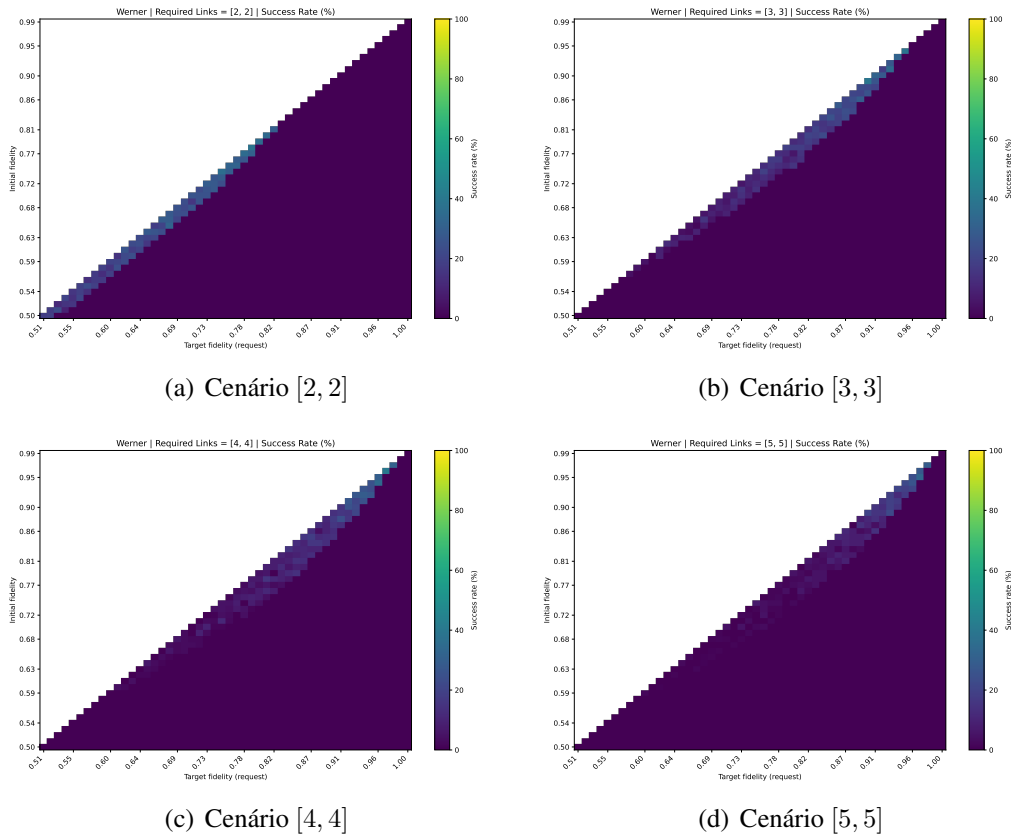
**Figura 4. Evolução da taxa de sucesso sob o ruído *bit-flip* com o aumento progressivo de links alocados por etapa ([2, 2] até [5, 5]). A purificação desloca a fronteira de sucesso, habilitando conexões anteriormente impossíveis.**

Comparando a progressão da Figura 4 com o cenário base (Figura 3(b)), observa-se um recuo significativo da área de falha absoluta (região roxa escura). A "fronteira de sucesso" diagonal é progressivamente "empurrada" em direção ao canto inferior direito do gráfico, indicando que o protocolo consegue entregar fidelidades alvos maiores mesmo partindo de fidelidades iniciais piores. O cenário [5, 5] (Figura 4(d)) demonstra a maior área de viabilidade operacional neste experimento.

É importante ressaltar o compromisso probabilístico inerente ao processo. Embora o aumento de links expanda o conjunto de requisições viáveis, a purificação de emaranhamento é estocástica e sujeita a falhas nas medições de paridade. Por conseguinte, as regiões recém-descobertas — que apresentavam taxa de sucesso nula no cenário [1, 1] — surgem com taxas de sucesso intermediárias (tons de azul e verde claro). Isso reflete os casos em que as rodadas de purificação consumiram os recursos sem atingir a fidelidade mínima exigida, destacando a importância de um dimensionamento adequado ou do ajuste dinâmico de rodadas para otimizar o *throughput* útil da rede.

### 5.3. Impacto da Purificação e Aumento de Recursos: Canal *Werner*

Para consolidar a análise, o mesmo experimento de aumento progressivo de recursos foi replicado assumindo canais de *Werner*, um modelo de ruído que representa uma despolarização isotrópica e, tipicamente, exige mais esforço do protocolo de purificação em comparação ao ruído *bit-flip*. A Figura 5 apresenta os *heatmaps* para as configurações de [2, 2] a [5, 5] links alocados por etapa, demonstrando o comportamento do protocolo *Purify and Swap* frente a este modelo de ruído mais severo.



**Figura 5. Evolução da taxa de sucesso sob o canal *Werner* com o aumento progressivo de links alocados por etapa ([2, 2] até [5, 5]).**

Assim como no cenário de *bit-flip*, a injeção de redundância permite que o protocolo ultrapasse a limitação do *swapping* simples (Figura 3(a)), expandindo a fronteira de viabilidade da rede. No entanto, o ganho de área útil no canal *Werner* é visivelmente mais restrito e a taxa de sucesso global cresce de forma mais conservadora em relação ao *bit-flip*. No cenário [2, 2] (Figura 5(a)), o deslocamento da fronteira é sutil, refletindo a dificuldade do protocolo em obter sucesso na purificação com apenas um grau de redundância contra a despolarização. À medida que se avança para os cenários [4, 4] e [5, 5] (Figuras 5(c) e 5(d)), o impacto da purificação hierárquica e sequencial torna-se mais pronunciado. O *heatmap* do cenário [5, 5] revela que o protocolo consegue estabilizar conexões mesmo para requisições com alta fidelidade alvo, desde que a fidelidade inicial seja minimamente viável. Ainda assim, a predominância de tons mais escuros (baixas taxas de sucesso) na borda de expansão evidencia a forte natureza estocástica do processo em canais severamente degradados. A purificação em cascata, necessária para mitigar o

ruído *Werner*, frequentemente leva ao esgotamento dos  $k$  links alocados antes que o par alcance a fidelidade alvo. Esse comportamento corrobora a tese de que políticas estáticas de alocação de rodadas e recursos sofrem forte penalização de *throughput* em cenários críticos. O ajuste dinâmico do número de rodadas, conforme discutido nas seções anteriores, apresenta-se como a abordagem mais eficiente para maximizar as taxas de sucesso limitando o desperdício de pares EPR.

## 6. Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, investigamos o problema da degradação de fidelidade na distribuição de emaranhamento em redes quânticas multi-salto e propusemos o protocolo *Purify and Swap*, baseado na aplicação hierárquica de purificação diretamente sobre *links virtuais*. Os resultados demonstraram que a estratégia é capaz de mitigar o acúmulo de erros introduzidos pelo *entanglement swapping* sequencial, superando limitações do modelo convencional. A avaliação sob ruídos *bit-flip* e *Werner* evidenciou que a alocação controlada de recursos permite atingir fidelidades elevadas mesmo em cenários com enlaces degradados, embora também revele um trade-off inerente entre consumo e desperdício de recursos devido à natureza estocástica do processo.

Como trabalhos futuros, pretende-se incorporar técnicas de Inteligência Artificial para modelagem preditiva dos canais quânticos, permitindo ajustes dinâmicos na alocação de pares EPR e rodadas de purificação. Além disso, a integração com abordagens baseadas em SDN quântico é vista como um caminho promissor para habilitar controle global da rede, possibilitando roteamento consciente da fidelidade e gerenciamento eficiente de recursos em ambientes de larga escala, aumentando o *throughput* e a eficiência operacional.

## Disponibilidade de Artefatos

Os artefatos estão disponíveis no repositório referente ao artigo <sup>1</sup>.

## Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por meio dos auxílios nº 403539/2020-0 e nº 400111/2023-3; e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), sob os auxílios 2023/00811-0, 2023/00673-7, 2021/00199-8, 2025/21778-7 (CPE SMARTNESS), 2020/04031-1 e 2018/23097-3. Também contou com o apoio da Proresp/UFPA.

## Referências

- Chen, L. and Jia, Z. (2024). On optimum entanglement purification scheduling in quantum networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*.
- Dahlberg, A., Skrzypczyk, M., Coopmans, T., Wubben, L., Rozpędek, F., Pompili, M., Stolk, A., Pawełczak, P., Knegjens, R., de Oliveira Filho, J., Hanson, R., and Wehner, S. (2019). A link layer protocol for quantum networks. In *Proceedings of the ACM Special Interest Group on Data Communication (SIGCOMM '19)*, pages 159–173.

---

<sup>1</sup><https://github.com/quantumgercom/Link-Layer-Schudeling>

- Dür, W., Briegel, H.-J., Cirac, J. I., and Zoller, P. (1999). Quantum repeaters based on entanglement purification. *Physical Review A*, 59:169–181.
- Kimble, H. J. (2008). The quantum internet. *Nature*, 453(7198):1023–1030.
- Pan, J.-W., Simon, C., Brukner, C., and Zeilinger, A. (2001). Entanglement purification for quantum communication. *Nature*, 410(6832):1067–1070.
- Panigrahy, N. K., Vasantam, T., Towsley, D., and Tassiulas, L. (2023). On the capacity region of a quantum switch with entanglement purification. In *IEEE INFOCOM 2023 - IEEE Conference on Computer Communications*.
- Pérez Castro, D., Fernández Vilas, A., Fernández Veiga, M., Blanco Rodríguez, M., and Díaz Redondo, R. P. (2024). Simulation of fidelity in entanglement-based networks with repeater chains. *Applied Sciences*, 14(23):11270.
- Tavares, D., Abreu, D., Moraes, P., Pimentel, A., and Abelém, A. (2025). Estratégia de agendamento de purificação híbrida para redes quânticas de canais ruidosos heterogêneos. In *Anais do XLIII Simpósio Brasileiro de Redes de Computadores e Sistemas Distribuídos*, pages 280–293, Porto Alegre, RS, Brasil. SBC.
- Wang, Z., Li, J., Xue, K., Wei, D. S., Li, R., Yu, N., Sun, Q., and Lu, J. (2023). An efficient scheduling scheme of swapping and purification operations for end-to-end entanglement distribution in quantum networks. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*.
- Wehner, S., Elkouss, D., and Hanson, R. (2018). Quantum internet: A vision for the road ahead. *Science*, 362(6412):eaam9288.
- Xiao, Z., Li, J., Xue, K., Yu, N., Li, R., Sun, Q., and Lu, J. (2024a). Purification scheduling control for throughput maximization in quantum networks. *Communications Physics*, 7(307).
- Xiao, Z., Li, J., Xue, K., Yu, N., Li, R., Sun, Q., and Lu, J. (2024b). Purification scheduling control for throughput maximization in quantum networks. *Communications Physics*, 7(1):307.
- Zukowski, M., Zeilinger, A., Horne, M. A., and Ekert, A. K. (1993). “Event-ready-detectors” bell experiment via entanglement swapping. *Physical Review Letters*, 71(26):4287–4290.