

Estratégia de Agendamento de Purificação Híbrida para Redes Quânticas de Canais Ruidosos Heterogêneos

David Tavares¹, Diego Abreu¹, Polyana Moraes¹, Arthur Pimentel¹, Antônio Abelém¹

¹ Universidade Federal do Pará - UFPA

Abstract. *The evolution of Quantum Internet relies on the efficient generation and purification of entangled pairs (EPR) across noisy and heterogeneous quantum channels. However, several challenges arise in this context, such as (1) estimating the optimal number of purification rounds without prior knowledge of the channel error type, (2) low aggregated success probability in purification processes, and (3) resource wastage caused by unused EPR pairs. In this work, we propose a hybrid scheduling strategy for purification in quantum networks to address these issues. Our approach dynamically adjusts the number of purification rounds, compensates for low success probabilities through additional operations, and mitigates resource inefficiencies by reusing idle EPR pairs. We evaluate the solution through case studies under various noise scenarios, including bit-flip, Werner, and mixed noise models. The results demonstrate significant improvements in throughput compared to current approaches, highlighting the effectiveness of the scheduling strategy in quantum networks.*

Resumo. *A evolução da Internet Quântica depende da geração eficiente e purificação de pares entrelaçados (EPR) em canais quânticos ruidosos e heterogêneos. No entanto, diversos desafios surgem nesse contexto, como (1) estimar o número ótimo de rodadas de purificação sem conhecimento prévio do tipo de erro do canal, (2) a baixa probabilidade agregada de sucesso nos processos de purificação e (3) o desperdício de recursos causado pelos pares EPR não utilizados. Neste trabalho, propomos uma estratégia híbrida de agendamento de purificação em redes quânticas para lidar com esses desafios. Nossa abordagem ajusta dinamicamente o número de rodadas de purificação, compensa a baixa probabilidade de sucesso por meio de operações adicionais e reduz as ineficiências no uso de recursos ao reutilizar pares EPR ociosos. Avaliamos a solução por meio de estudos de caso em cenários de ruído, incluindo os modelos bit-flip, Werner e ruído misto. Os resultados demonstram melhorias significativas no throughput em comparação com abordagens atuais, destacando a eficácia da estratégia de agendamento em redes quânticas.*

1. Introdução

A Internet Quântica representa um conjunto de novas possibilidades de aplicações baseadas em princípios da mecânica quântica [Kimble 2008]. O funcionamento eficaz dessas redes depende essencialmente da geração, distribuição e manutenção de pares emaranhados (pares EPR) com alta qualidade (fidelidade), os quais consistem no principal recurso para as operações de comunicação quântica segura e computação quântica distribuída [Wehner et al. 2018].

Nesse contexto, a camada de enlace quântica [Dahlberg et al. 2019] é a responsável pelo controle e geração robusta dos pares EPR, com o objetivo de entregá-los às camadas superiores com fidelidade suficiente para atender as aplicações da Internet Quântica. Para isso, a camada implementa o agendamento das operações de criação e purificação dos EPRs, buscando maximizar o número de EPRs entregues (*throughput*) com a fidelidade pedida [Xiao et al. 2024].

O processo de purificação consiste em combinar múltiplos pares EPR, de fidelidade mais baixa, para produzir pares de fidelidade mais alta [Pan et al. 2001]. Esse processo é necessário para corrigir os efeitos dos ruídos presentes nos canais quânticos, os quais alteram o estado original do Qubits, reduzindo a fidelidade e afetando as operações quânticas. Embora eficaz, a purificação requer várias operações iterativas (rodadas de purificação) sujeitas a falhas, o que pode levar ao desperdício de recursos em caso de erros ou mau dimensionamento da operação.

Outro ponto importante, é que os canais quânticos podem apresentar diferentes tipos de erros, decorrentes de fatores ambientais e limitações tecnológicas. Isso afeta diretamente a eficácia do processo de purificação, já que a fidelidade final atingida depende diretamente dos tipos de erros e ruídos presentes no canal [Panigrahy et al. 2023]. Além disso, os pares EPRs têm a sua fidelidade reduzida com o passar do tempo, devido a decoerência. Assim, os EPRs precisam ser usados antes que percam sua utilidade. Isso torna o agendamento das operações de purificação um desafio ainda maior, exigindo estratégias que considerem as características específicas de cada canal.

Diante desse cenário, é proposta uma Estratégia Híbrida de Agendamento de Purificação que aborda esses problemas ao ajustar dinamicamente o número de rodadas de purificação, compensar falhas por meio de operações adicionais e reaproveitar pares EPR ociosos. As principais contribuições deste trabalho são:

- Modelagem do problema de purificação em redes quânticas heterogêneas.
- Proposta de uma estratégia híbrida dinâmica que melhora o agendamento das operações de purificação.
- Avaliação da solução em cenários de ruído *bit-flip*, *Werner* e misto, demonstrando ganhos no *throughput*.

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta a fundamentação teórica sobre redes quânticas e purificação. A Seção 3 discute trabalhos relacionados. A Seção 4 detalha a estratégia híbrida proposta. A Seção 5 apresenta o estudo de caso e os resultados obtidos. Por fim, a Seção 6 traz as conclusões e trabalhos futuros.

2. Fundamentação Teórica

Nesta seção são apresentados conceitos fundamentais relativos ao funcionamento das redes quânticas, bem como o processo de purificação e os desafios envolvendo as técnicas de agendamento em canais ruidosos.

2.1. Purificação de Entrelaçamento

A unidade básica de informação em sistemas quânticos, o Qubit, diferencia-se do bit clássico por sua capacidade de estar em superposição dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Além disso,

múltiplos Qubits podem estar em um estado de entrelaçamento quântico, podendo formar os chamados pares EPRs (ou pares de Bell) [Kimble 2008]. Um exemplo é o par EPR no estado $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, onde dois Qubits estão fortemente correlacionados.

Entretanto, o entrelaçamento é altamente sensível a interações com o ambiente, que podem degradar o estado quântico, reduzindo a qualidade do entrelaçamento e comprometendo sua utilidade. Para quantificar essa qualidade, utiliza-se a fidelidade do estado entrelaçado, que mede o grau de proximidade entre um estado real ρ e um estado ideal $|\Phi^+\rangle$, como mostrado na Equação 1.

$$F(\rho, |\Phi^+\rangle) = \langle \Phi^+ | \rho | \Phi^+ \rangle. \quad (1)$$

Nesse contexto, a purificação de entrelaçamento é um processo fundamental para recuperar a fidelidade de pares entrelaçados degradados por ruídos em canais quânticos, permitindo que esses pares atinjam a qualidade necessária para aplicações da Internet Quântica [Pan et al. 2001]. Esse processo utiliza dois ou mais pares entrelaçados de fidelidade baixa para gerar um único par com fidelidade mais alta, por meio de operações locais e comunicação clássica auxiliar. O processo é iterativo e envolve operações coordenadas pela camada de enlace quântica, como a aplicação de portas lógicas, medições e filtragens. Essas etapas são repetidas até que o par entrelaçado alcance a fidelidade alvo e estejam prontos para serem utilizados, ou até que se esgotem os recursos disponíveis para a operação.

A eficácia do processo de purificação depende diretamente dos tipos de erros existentes nos enlaces que contêm os pares entrelaçados. Podem-se destacar canais que contêm erros do tipo *Bit-Flip*, nos quais os estados quânticos sofrem alterações que invertem os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, e canais de *Werner*, que modelam uma mistura isotrópica do estado idealmente entrelaçado com ruído aleatório. Nos canais de *Werner*, o ruído afeta todos os estados de maneira uniforme. Esses diferentes tipos de erros impactam a fidelidade obtida a cada etapa de purificação e a probabilidade de sucesso da purificação como um todo, exigindo estratégias específicas de ajuste durante o processo [Dür et al. 1999].

2.1.1. Purificação em Canais de *Bit-Flip*

Canais do tipo *bit-flip* podem ser modelados pela operação da porta lógica X , que inverte os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Esse tipo de ruído reduz a fidelidade do estado transmitido de maneira proporcional à intensidade do ruído presente no canal. Quando um par entrelaçado é transmitido por um canal com erro *bit-flip*, o estado resultante é uma mistura estatística entre o estado idealmente entrelaçado $|\Phi^+\rangle$ e um estado ruidoso $|\Psi^+\rangle$. A descrição matemática desse estado misto é dada pela Equação 2, onde F representa a fidelidade inicial do estado entrelaçado em relação ao estado ideal $|\Phi^+\rangle$:

$$\rho = F|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1 - F)|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| \quad (2)$$

Para recuperar a fidelidade, utiliza-se o protocolo de purificação de entrelaçamento, que combina múltiplos pares para produzir um de maior fidelidade. O processo gera combinações de entrada e saída com diferentes probabilidades de ocorrência e ações

Entrada	Saída	Probabilidade	Resultado
$ \Phi^+\rangle_1 \Phi^+\rangle_2$	$ \Phi^+\rangle_1 \Phi^+\rangle_2$	F^2	Sucesso
$ \Phi^+\rangle_1 \Psi^+\rangle_2$	$ \Phi^+\rangle_1 \Psi^+\rangle_2$	$F(1 - F)$	Falha
$ \Psi^+\rangle_1 \Phi^+\rangle_2$	$ \Psi^+\rangle_1 \Psi^+\rangle_2$	$F(1 - F)$	Falha
$ \Psi^+\rangle_1 \Psi^+\rangle_2$	$ \Psi^+\rangle_1 \Phi^+\rangle_2$	$(1 - F)^2$	Sucesso

Tabela 1. Possíveis combinações de entrada e saída durante o processo de purificação.

associadas, conforme detalhado na Tabela 1. Os estados que contribuem para o aumento da fidelidade são mantidos, enquanto os demais são descartados.

Assim, o processo de purificação em canais *bit-flip* tem probabilidade de sucesso (p_{sucesso}) como apresentada na Equação 3. O estado resultante após a purificação (ρ') é descrito pela Equação 4, enquanto a fidelidade final (F') do estado purificado (quando o processo de purificação ocorre com sucesso), é calculada conforme a Equação 5 [Panigrahy et al. 2023].

$$p_{\text{sucesso}} = F^2 + (1 - F)^2 \quad (3)$$

$$\rho' = F'|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1 - F')|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| \quad (4)$$

$$F' = \frac{F^2}{F^2 + (1 - F)^2} \quad (5)$$

2.1.2. Purificação em Canais Werner

De outro modo, os enlaces quânticos podem se comportar como canais de *Werner*. Neste caso, o estado (ρ) é alterado pelo ruído, conforme a Equação 6, onde a presença de outros estados ($|\Phi^-\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$) afetam o funcionamento do processo de purificação. Assim, a probabilidade de sucesso da purificação (p_{sucesso}) se torna como na Equação 7 e a fidelidade do estado purificado (F') como na Equação 8 [Panigrahy et al. 2023].

$$\rho = F|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \frac{1 - F}{3} (|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| + |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|) \quad (6)$$

$$p_{\text{sucesso}} = \left(F + \frac{1 - F}{3}\right)^2 + \left(\frac{2(1 - F)}{3}\right)^2 \quad (7)$$

$$F' = \frac{F^2 + \frac{1}{9}(1 - F)^2}{F^2 + \frac{2}{3}F(1 - F) + \frac{5}{9}(1 - F)^2} \quad (8)$$

Nota-se que a Fidelidade após uma operação de purificação é maior em Canais *bit-flip* (Equação 5) do que em Canais *Werner* (Equação 8). Isso faz com que, em muitos casos, sejam necessárias mais operações de purificação em canais de *Werner*, para se

atingir a fidelidade desejada. Além disso, observa-se que a probabilidade de sucesso de operação (p_{sucesso}) também é inferior em canais de *Werner* (Equação 7) do que em canais *bit-flips* (Equação 3). Esses fatores tornam desafiador a estimação correta da quantidade de operações necessárias para se realizar a purificação em canais dinâmicos, onde o conhecimento a priori do tipo de ruído do canal não está disponível para a camada de enlace.

2.2. Agendamento de Purificação

A camada de enlace quântica desempenha um papel central no controle das operações de purificação, buscando garantir que os pares entrelaçados sejam utilizados antes que suas fidelidades sejam reduzidas pela decoerência. Como um único procedimento de purificação nem sempre é suficiente para atingir a fidelidade alvo, múltiplas iterações são frequentemente necessárias. Essas iterações devem ser planejadas e coordenadas para assegurar que o par EPR final atenda aos requisitos de qualidade exigidos pelas camadas superiores.

Nesse cenário, duas abordagens de agendamento de purificação se destacam: purificação simétrica e purificação do tipo *pumping*. Essas abordagens diferem em termos de consumo de recursos e fidelidade alcançada, exigindo um planejamento adequado para maximizar a eficiência do processo.

Na purificação simétrica, dois pares entrelaçados com fidelidade inicial F_{base} , são combinados em cada etapa para gerar um par purificado com fidelidade maior. Esse processo é iterativo, com os pares resultantes sendo utilizados em rodadas subsequentes para alcançar fidelidades progressivamente mais altas. A Figura 1 ilustra essa abordagem, destacando a evolução das fidelidades em cada rodada de purificação.

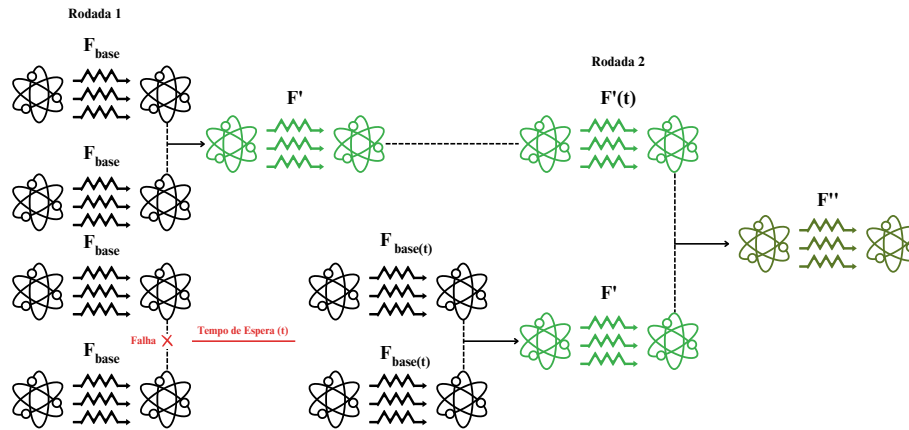


Figura 1. Estratégia de Agendamento de Purificação Simétrica.

A Figura 1 ilustra um processo de purificação simétrica, no qual são necessárias duas rodadas de purificação para atingir a fidelidade final F'' , utilizando pares EPR criados com uma fidelidade inicial F_{base} . Nesse exemplo, a camada de enlace planejou inicialmente a utilização de quatro pares EPR, agendando a realização de duas operações de purificação em paralelo na primeira rodada, e uma operação adicional na segunda rodada, já com os pares EPR purificados da etapa anterior. Cada operação possui uma probabilidade de sucesso (p_{sucesso}) e resulta em um par EPR de fidelidade final F' .

No entanto, no exemplo da Figura 1, devido à falha em uma das operações da primeira rodada, foi necessário criar dois novos pares EPR para repetir a operação. Assim,

o par EPR obtido na primeira operação precisou aguardar a conclusão do processo de purificação da segunda operação para iniciar a segunda rodada. Esse tempo de espera (t) expõe o par EPR à decoerência, reduzindo sua fidelidade de F' para $F'(t)$. Isso implica que a fidelidade final será $F''(t)$, menor do que a inicialmente planejada F'' .

De outro modo, na purificação do tipo *pumping*, apenas uma operação de purificação é realizada por rodada. Como a Figura 2 ilustra, a partir da segunda rodada, é adicionado (através do processo de bombeamento - *pumping*) um novo par EPR, o qual foi agendado pela camada de enlace para ser utilizado na rodada específica. Esse novo par EPR é então utilizado em conjunto ao par EPR resultante da rodada anterior.

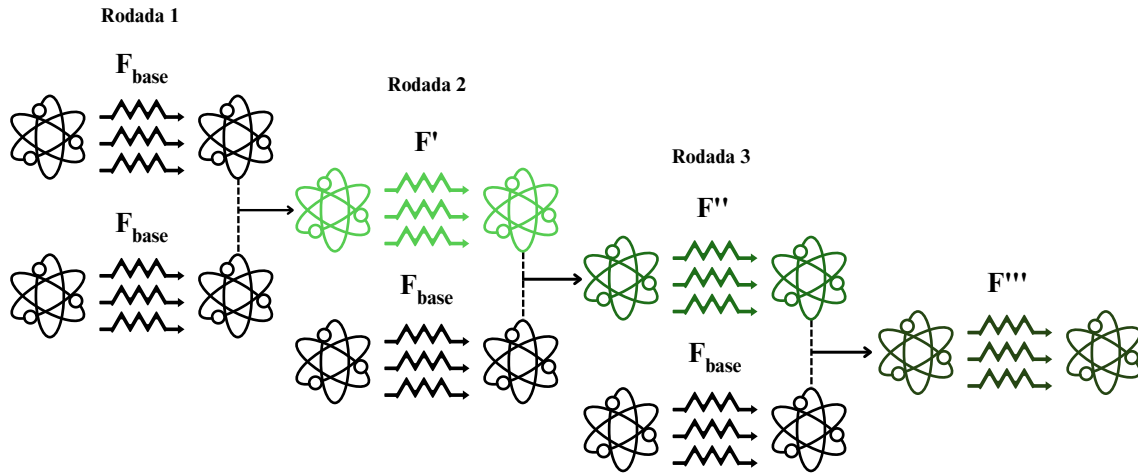


Figura 2. Estratégia de Agendamento de Purificação do tipo *Pumping*.

Como ilustrado na Figura 2, em cada iteração, o par resultante da rodada anterior, é combinado com um novo EPR criado com F_{base} . Nesse cenário, caso ocorra a falha de uma operação de purificação, o processo precisará retornar ao início. Porém, os pares EPRs que foram agendados para as rodadas seguintes podem ser reutilizados em novas operações. Essa característica minimiza o número de pares EPRs necessários, pois precisa apenas de 1 novo par entrelaçado a cada rodada, o qual pode ser agendado para ser criado apenas quando aquela rodada iniciar, e não no início da primeira rodada. No entanto, a melhoria na fidelidade é limitada quando comparada à estratégia simétrica, pois o valor de F_{base} permanece inferior a F' , restringindo o crescimento da fidelidade em cada etapa.

É importante observar que, na purificação simétrica, o número de pares entrelaçados necessários cresce exponencialmente com o número de rodadas r , exigindo 2^r pares reservados desde o início da operação, o que impõe um custo elevado em termos de recursos. Dessa forma, o agendamento simétrico é mais adequado para cenários onde a prioridade é alcançar altos níveis de fidelidade em poucas iterações, mas apresenta limitações em ambientes com pouca disponibilidade inicial de pares EPRs.

As duas estratégias, portanto, possuem características complementares. A purificação simétrica é capaz de alcançar fidelidades mais altas com menos rodadas, mas ao custo de recursos exponenciais. Por outro lado, a purificação *pumping* é mais econômica em termos de recursos, mas a melhoria na fidelidade é limitada e a eficiência do processo diminui com o aumento das iterações.

3. Trabalhos Relacionados

As pesquisas sobre agendamento e purificação em redes quânticas têm avançado significativamente nos últimos anos. Diversos estudos exploram estratégias para otimizar a fidelidade e o *throughput* em redes quânticas, enfrentando desafios como a presença de canais ruidosos e limitações na eficiência dos processos de purificação. Nesta seção, são destacados os principais trabalhos e os principais pontos de diferença da abordagem proposta neste artigo.

Wang et al. (2023) [Wang et al. 2023] propõem um esquema de agendamento conjunto para operações de purificação e troca de entrelaçamento (*entanglement swapping*) em redes quânticas. A abordagem prioriza a purificação para atender aos requisitos de fidelidade e maximizar a taxa de distribuição de pares emaranhados. A estratégia envolve a combinação de um algoritmo de troca simultânea para reduzir atrasos com um modelo de permutação para determinar a sequência de operações, possibilitando a manutenção da fidelidade desejada. No entanto, o estudo assume conhecimento prévio do tipo de erro do canal e não aborda diretamente a reutilização de pares EPR não utilizados, limitando sua aplicabilidade em redes heterogêneas e dinâmicas.

Chen e Jia (2024) [Chen and Jia 2024] apresentam um algoritmo de agendamento de purificação que combina estratégias de roteamento e de purificação. O trabalho foca na maximização da taxa de entrega de emaranhamentos purificados, explorando a estrutura de árvores de purificação para melhorar a eficiência. Embora sua análise detalhe cenários de canais com ruído *bit-flip*, a generalização para canais heterogêneos ou Werner não é discutida.

Xiao et al. (2024) [Xiao et al. 2024] introduzem o *Purification Scheduling Control* (PSC), uma abordagem baseada na otimização de recursos em nível de rede. A estratégia considera múltiplas requisições simultâneas, propondo um agendamento que equilibra a purificação e a alocação de recursos para maximizar o *throughput*. Entretanto, o trabalho se limita a modelos de ruído conhecidos previamente e não explora estratégias para lidar com a baixa probabilidade de sucesso das operações de purificação. Essa limitação reduz a eficiência do método em redes heterogêneas.

Pérez Castro et al. (2024) [Pérez Castro et al. 2024] apresentam uma análise sobre a fidelidade em cadeias de repetidores com canais heterogêneos. O trabalho examina como recursos, incluindo memória quântica, capacidade de enlaces, e protocolos de gerenciamento de repetidores influenciam o desempenho do processo de purificação. Entretanto, a abordagem também usa o conhecimento prévio do tipo de ruído do canal para a tomada de decisão.

De outro modo, a proposta apresentada neste trabalho aborda diretamente os desafios de redes quânticas heterogêneas, onde múltiplos tipos de erros podem coexistir, como *bit-flip*, *Werner* e ruído misto. Além disso, o método não assume conhecimento prévio sobre o tipo de erro, ajustando dinamicamente o número de rodadas de purificação e compensando as baixas probabilidades de sucesso por meio de operações adicionais. A reutilização de pares EPR ociosos e a melhoria no *throughput* são diferenciais que destacam a estratégia como uma solução mais abrangente e eficiente.

4. Estratégia de Agendamento de Purificação Híbrida

A eficiência da purificação de pares entrelaçados em redes quânticas heterogêneas depende de estratégias adaptativas capazes de lidar com as variações de ruído nos canais, como os modelos *bit-flip* e *Werner*. Estratégias estáticas, que assumem um número fixo de rodadas de purificação, frequentemente resultam em desperdício de recursos e baixa eficiência. Para mitigar esses problemas, propõe-se uma estratégia híbrida de agendamento de purificação que integra elementos das abordagens simétrica e *pumping* em um modelo dinâmico e adaptativo.

A proposta ajusta o número de rodadas de purificação de forma dinâmica, com base no desempenho observado durante a execução das operações de purificação. Inicialmente, são alocadas poucas rodadas. Quando falhas consecutivas são detectadas, o sistema aumenta progressivamente o número de rodadas, ajustando-se às condições do canal e melhorando a eficiência geral. Essa adaptação permite equilibrar o *throughput* com o consumo de pares EPR, reduzindo o impacto de falhas e o desperdício de recursos. Além disso, para compensar a baixa probabilidade de sucesso em canais mais ruidosos, a estratégia agenda dinamicamente a criação de Pares EPRs extras, os quais podem ser utilizados em caso de falhas no processo de purificação ou de subdimensionamento das rodadas. Por outro lado, caso ocorra o sobredimensionamento de rodadas, os EPRs que não forem utilizados podem ser reutilizados em outros processos de purificação.

Ao combinar ajustes dinâmicos, reaproveitamento de recursos e operações adicionais para compensar ruídos, a estratégia híbrida oferece um equilíbrio entre o alto desempenho da purificação simétrica e a eficiência em recursos da purificação *pumping*, tornando-a ideal para redes heterogêneas e dinâmicas. A seguir, são apresentados os detalhes formais da modelagem do problema e da estratégia proposta.

4.1. Modelagem do Problema

A proposta visa realizar a purificação de maneira eficiente em redes quânticas heterogêneas. Nesse contexto, um dos principais desafios é estimar o número de rodadas necessárias para a purificação. Como o tipo de erro presente no canal não é conhecido a priori, a estratégia de agendamento pode gerar estimativas inadequadas sobre a quantidade de operações requeridas para alcançar a fidelidade desejada.

Por exemplo, se a estratégia assumir que o canal apresenta erros do tipo *bit-flip* e basear suas estimativas nas (Equações 3 e 5), mas o canal, na realidade, contiver erros do tipo *Werner*, poderá ocorrer um subdimensionamento do número de operações. Nessa situação, as estimativas deveriam considerar as (Equações 7 e 8). Essa discrepância pode comprometer a eficiência da purificação e a fidelidade final obtida.

Por outro lado, o sobredimensionamento do número de rodadas pode levar ao desperdício de pares EPR, uma vez que esses pares são agendados e reservados para uso, mas acabam não sendo utilizados. Isso ocorre, por exemplo, quando a estratégia de agendamento assume que o canal apresenta erros do tipo *Werner*, enquanto, na verdade, os erros são do tipo *bit-flip*. Esse cenário impacta negativamente a eficiência da rede, reduzindo significativamente a capacidade de entrega de pares EPR purificados.

Para mitigar esse problema, o modelo inicia com um número reduzido de rodadas e ajusta dinamicamente esse valor com base no desempenho observado. Em caso de falhas consecutivas, o número de rodadas é incrementado de maneira progressiva, desde que

o número de pares ociosos permaneça em níveis aceitáveis. Essa abordagem dinâmico-adaptativa busca equilibrar o *throughput* da rede com o uso eficiente dos recursos disponíveis.

O segundo desafio está relacionado à probabilidade de sucesso, que diminui com o aumento do número de operações, resultando em falhas recorrentes e dificultando a entrega dos pares purificados. Para mitigar esses impactos, a estratégia inclui a geração de pares EPR adicionais, dimensionados com base na estimativa do número de rodadas, funcionando como uma reserva que compensa as falhas acumuladas. Essa abordagem permite a continuidade do processo de purificação, reduzindo o impacto das falhas no desempenho global.

O terceiro desafio diz respeito ao desperdício de pares EPR não utilizados. Durante o processo de purificação, pares descartados devido ao sobredimensionamento ou a falhas nas operações representam uma perda significativa de recursos, especialmente em redes com capacidade limitada de geração de pares. Para mitigar esse problema, a estratégia propõe ajustar dinamicamente a criação de pares EPR, permitindo seu reaproveitamento em rodadas subsequentes. Essa abordagem reduz o desperdício, melhora a eficiência no uso dos recursos e promove uma utilização mais sustentável dos pares EPR gerados.

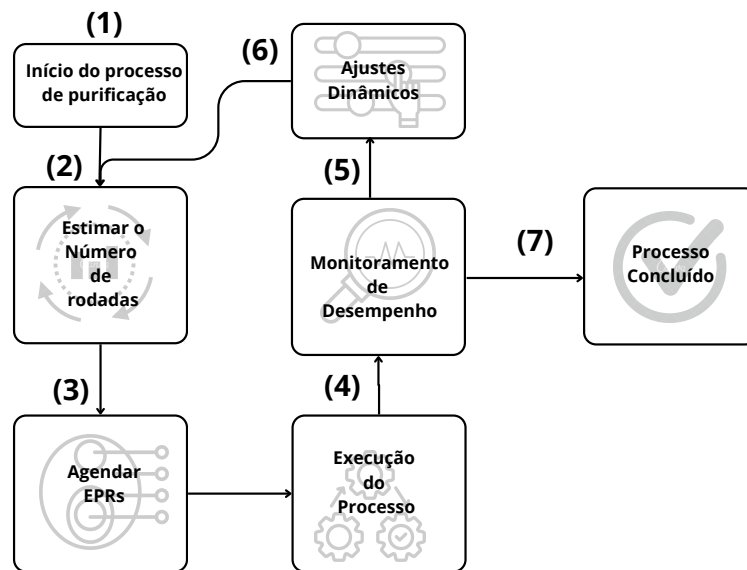


Figura 3. Estratégia de Agendamento de Purificação Híbrida.

4.2. Estratégia de Agendamento Híbrida

A estratégia híbrida proposta combina as abordagens de purificação simétrica e *pumping* em um modelo adaptativo e dinâmico, com o objetivo de otimizar o processo de purificação em redes quânticas heterogêneas. A abordagem é projetada para lidar com cenários onde os canais apresentam ruídos variáveis, incluindo modelos *bit-flip*, *Werner* ou mistos, ajustando dinamicamente o número de rodadas de purificação, reaproveitando recursos ociosos e utilizando redundâncias para compensar falhas, maximizando o *throughput* e melhorando a eficiência no uso de pares EPR. A Figura 3 apresenta o funcionamento da proposta.

O modelo começa com uma estimativa do número de rodadas de purificação, conforme descrito na Seção 4.1. Após cada tentativa de purificação, independentemente do sucesso ou falha, são registradas a quantidade de pares EPR utilizados e o número de rodadas realizadas. Caso o processo detecte falhas consecutivas, a estimativa do número de rodadas é ajustada até que a fidelidade alvo seja alcançada.

Em cenários onde a probabilidade de sucesso é baixa, especialmente em canais altamente ruidosos, a estratégia adotada prevê a geração adicional de pares EPR para prover redundância. Esses pares são reservados para uso em operações futuras de purificação, assegurando a continuidade do processo mesmo diante de falhas. Além disso, a quantidade de pares adicionais é ajustada dinamicamente com base na ocorrência de falhas ou sucessos sucessivos.

A integração dessas técnicas busca otimizar a relação entre eficiência e robustez nas abordagens de purificação. A purificação simétrica permite alcançar fidelidades mais altas em menos etapas, mas com um custo exponencial de recursos. Em contraste, a purificação *pumping* apresenta maior eficiência em termos de recursos, embora seja limitada pela fidelidade final atingível. A proposta ajusta dinamicamente a aplicação dessas abordagens com base nas características dos canais quânticos, otimizando o consumo de recursos e a taxa de sucesso do processo de purificação. Essa abordagem é particularmente relevante para redes heterogêneas, onde as flutuações nas condições dos canais exigem adaptações em tempo real.

5. Avaliação e Resultados

Nesta seção, o desempenho da proposta é avaliado em comparação com as estratégias de agendamento simétrica e *pumping*. São considerados cenários de sobredimensionamento e subdimensionamento das rodadas, bem como o impacto no *throughput* em função das fidelidades inicial e alvo. Nesse contexto, o *throughput* é definido como a taxa de pares EPR purificados que podem ser entregues no canal por unidade de tempo, atendendo a uma fidelidade mínima inicial e uma fidelidade alvo especificada. Os resultados incluem a análise de canais de ruído do tipo *bit-flip*, *Werner* e misto (onde o ruído alterna aleatoriamente entre *bit-flip* e *Werner*). Essa avaliação destaca os desafios enfrentados pelas estratégias de agendamento atuais e demonstra como a estratégia proposta é capaz de se adaptar a condições de redes heterogêneas. A proposta desenvolvida, bem como os experimentos e os resultados, pode ser acessada no repositório referente ao artigo¹.

5.1. Sobredimensionamento de Rodadas de Purificação

A Figura 4 mostra o funcionamento da purificação quando todos os canais são tratados como canais do tipo *Werner*, ou seja, assumindo um cenário de sobredimensionamento. Nesse caso, mesmo para canais que exigem menos rodadas de purificação, o número de rodadas alocadas é maior. O *throughput* é mantido em níveis elevados, porém, como apresentado anteriormente na Seção 4.1, existe um desperdício de recursos, pois pares EPR não utilizados serão descartados. Este cenário é apresentado nas subfiguras 4(a) e 4(b) (para o caso de purificação simétrica e *pumping* em canais *Werner*), e 4(c) e 4(d) (para o caso de canais *bitflip*). O *heatmap* ilustra a relação entre a fidelidade alvo e a fidelidade inicial, e o *throughput* atingindo de acordo com a intensidade das cores.

¹<https://github.com/quantumgercom/Link-Layer-Schudeling>

Assim, é possível observar em quais casos, dado a fidelidade inicial, é possível alcançar a fidelidade alvo, e quantos pares EPRs podem ser entregues.

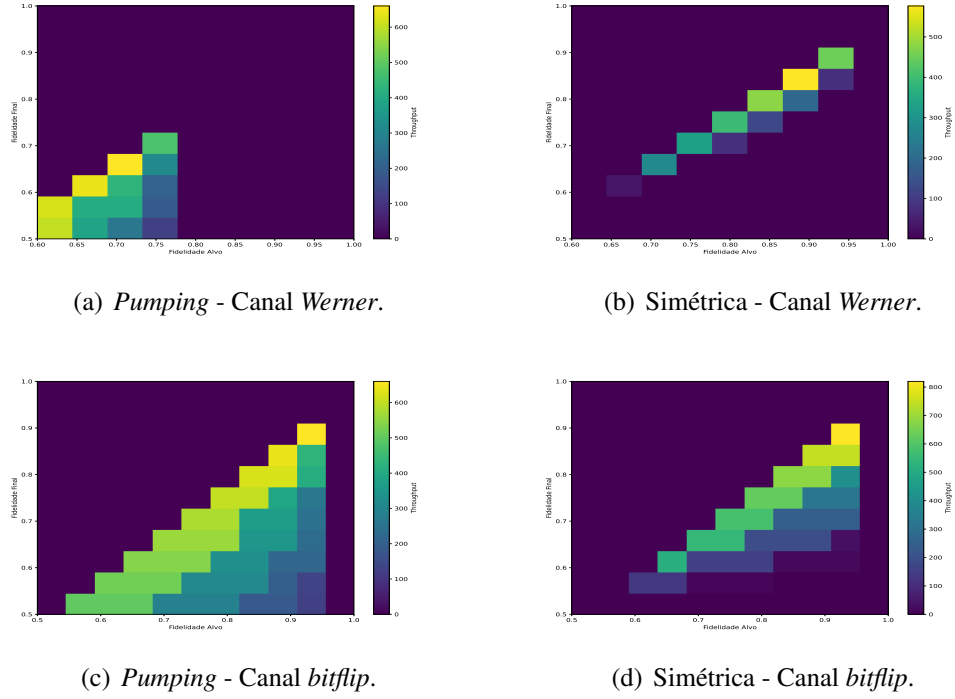


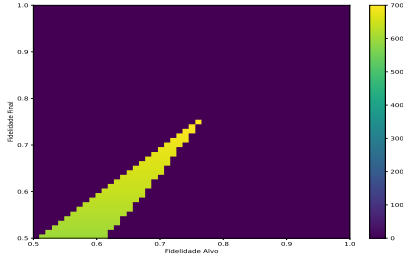
Figura 4. Cenário com Sobredimensionamento considerando todos os canais como *Werner*. Fidelidade Inicial (Eixo Y), Fidelidade Alvo (Eixo X), e *throughput* representando na intensidade das cores.

5.2. Subdimensionamento de Rodadas de Purificação

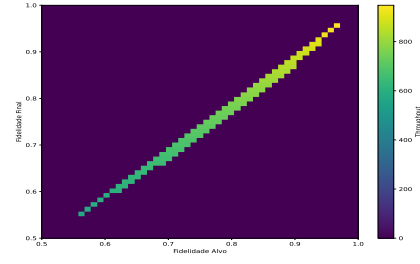
A Figura 5 apresenta os resultados para o cenário de subdimensionamento, onde os canais são assumidos como canais *bitflip*. Para os canais *Werner*, a amostragem foi ajustada de 0.5 para 0.1 para melhorar a visualização no gráfico. Este modelo é subdimensionado, pois não leva em consideração a maior exigência de rodadas para canais *Werner* e mistos. Como resultado, a purificação falha devido à insuficiência de pares EPR, especialmente para canais com ruído *Werner* ou misto, como ilustrado nas subfiguras 5(a), 5(b), 5(c), e 5(d). O *heatmap* dessas subfiguras mostra que o *throughput* cai drasticamente quando o número de rodadas é insuficiente, reduzindo a capacidade de purificação em comparação com a Figura 4.

5.3. Resultados com a Estratégia de Agendamento Proposta

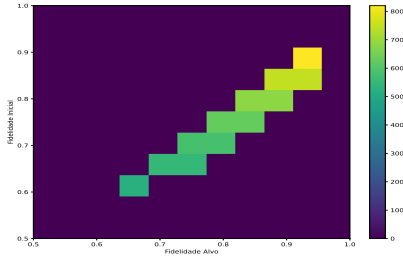
A Figura 6 apresenta os resultados obtidos com a estratégia proposta, que ajusta dinamicamente o número de rodadas de purificação e reaproveita pares EPR de tentativas anteriores. Esse processo elimina o desperdício de recursos observado no subdimensionamento e evita falhas críticas no subdimensionamento. As subfiguras 6(a) e 6(b) mostram os resultados para canais *bitflip*, com a estratégia proposta alcançando um *throughput* otimizado, sem o desperdício de pares EPR. Para os canais *Werner* e mistos, apresentados nas subfiguras 6(c), 6(d), 6(e), e 6(f), a adaptação dinâmica do número de



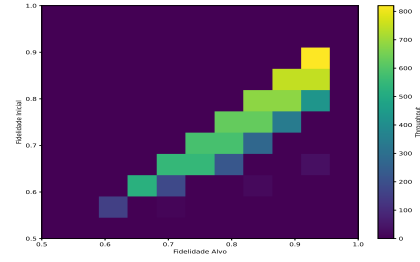
(a) *Pumping* - Canal Werner



(b) Simétrica - Canal Werner



(c) *Pumping* - Canal misto



(d) Simétrica - Canal misto

Figura 5. Cenário de Subdimensionamento considerando todos os canais como *bitflip*. Fidelidade Inicial (Eixo Y), Fidelidade Alvo (Eixo X), e *throughput* representando na intensidade das cores.

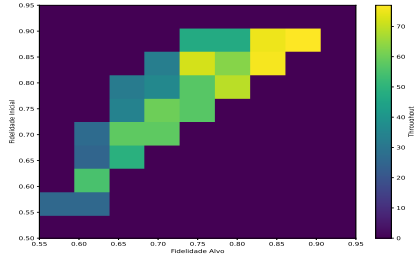
rodadas de purificação garante que os pares EPR sejam reutilizados, otimizando a utilização de recursos e melhorando o desempenho geral da rede. Os *heatmaps* mostram uma melhoria significativa no *throughput*, mesmo em cenários de ruídos mistos.

A estratégia proposta se destaca pela sua adaptabilidade, ajustando-se dinamicamente às condições dos canais quânticos e aproveitando os recursos de forma mais eficiente. Os resultados demonstram uma melhoria significativa no desempenho da rede, tanto em termos de *throughput* quanto na utilização de pares EPR, mesmo sob condições de ruído mais complexas. Isso confirma a eficácia da nossa abordagem para redes quânticas heterogêneas e sua capacidade de superar as limitações das estratégias de agendamento estáticas.

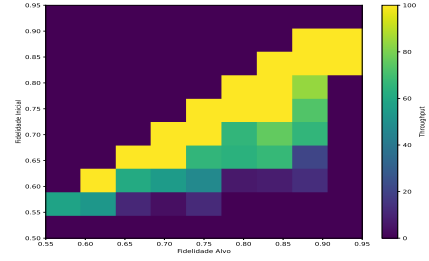
6. Conclusão e Trabalhos Futuros

Este trabalho apresentou uma estratégia de agendamento de purificação híbrida para redes quânticas heterogêneas, abordando desafios relacionados à variabilidade de ruídos nos canais, à baixa probabilidade de sucesso e ao desperdício de recursos. Os resultados indicaram que a estratégia híbrida oferece melhorias significativas no *throughput* e na eficiência no uso de recursos, especialmente em cenários de ruído complexo e heterogêneo. Em comparação com abordagens estáticas, a solução demonstrou robustez e adaptabilidade, superando limitações associadas à alocação inadequada de recursos e à insuficiência de rodadas de purificação.

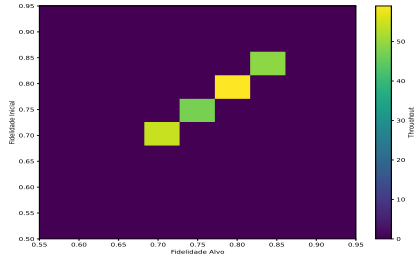
Como trabalhos futuros, sugere-se a integração da estratégia híbrida com processos de outras camadas, como roteamento e aplicações que demandam níveis específicos



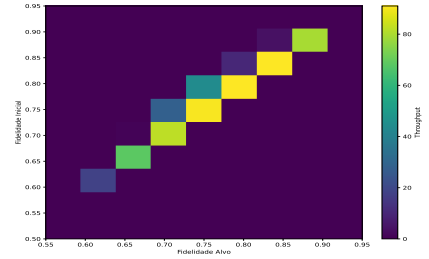
(a) Proposta com *pumping* - Canal *bitflip*.



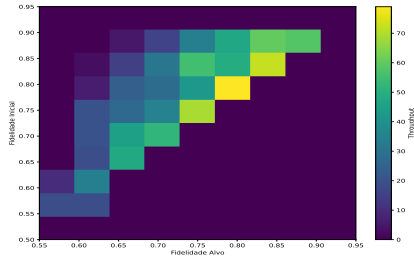
(b) Proposta com simétrica - Canal *bitflip*.



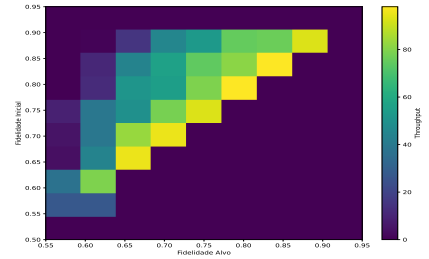
(c) Proposta com *pumping* - Canal *Werner*.



(d) Proposta com simétrica - Canal *Werner*.



(e) Proposta com *pumping* - Canal misto.



(f) Proposta com simétrica - Canal misto.

Figura 6. Resultados obtidos com a estratégia proposta. Fidelidade Inicial (Eixo Y), Fidelidade Alvo (Eixo X), e *throughput* representando na intensidade das cores.

de *throughput* e fidelidade. Além disso, a ampliação do modelo para redes quânticas maiores e topologias mais complexas permitirá avaliar seu impacto em cenários diversificados. Por fim, a investigação de modelos de ruído dinâmico e a aplicação de técnicas de controle em tempo real para mitigar a degradação da fidelidade representam direções promissoras para o aprimoramento da estratégia e sua aplicação prática em redes quânticas reais.

Disponibilidade de Artefatos

Os artefatos estão disponíveis no repositório referente ao artigo ².

²<https://github.com/quantumgercom/Link-Layer-Schudeling>

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) projeto 2023/00811-0, projeto 2023/00673-7, projeto 2021/00199-8 (CPE SMARTNESS), projeto 2020/04031-1, e projeto 2018/23097-3.

Referências

- Chen, L. and Jia, Z. (2024). On optimum entanglement purification scheduling in quantum networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*.
- Dahlberg, A., Skrzypczyk, M., Coopmans, T., Wubben, L., Rozpundineddek, F., Pompili, M., Stolk, A., Pawełczak, P., Knegjens, R., de Oliveira Filho, J., Hanson, R., and Wehner, S. (2019). A link layer protocol for quantum networks. In *Proceedings of the ACM Special Interest Group on Data Communication, SIGCOMM '19*, page 159–173, New York, NY, USA. Association for Computing Machinery.
- Dür, W., Briegel, H.-J., Cirac, J. I., and Zoller, P. (1999). Quantum repeaters based on entanglement purification. *Physical Review A*, 59(1):169.
- Kimble, H. J. (2008). The quantum internet. *Nature*, 453(7198):1023–1030.
- Pan, J.-W., Simon, C., Brukner, Č., and Zeilinger, A. (2001). Entanglement purification for quantum communication. *Nature*, 410(6832):1067–1070.
- Panigrahy, N. K., Vasantam, T., Towsley, D., and Tassiulas, L. (2023). On the capacity region of a quantum switch with entanglement purification. In *IEEE INFOCOM 2023-IEEE Conference on Computer Communications*, pages 1–10. IEEE.
- Pérez Castro, D., Fernández Vilas, A., Fernández Veiga, M., Blanco Rodríguez, M., and Díaz Redondo, R. P. (2024). Simulation of fidelity in entanglement-based networks with repeater chains. *Applied Sciences*, 14(23):11270.
- Wang, Z., Li, J., Xue, K., Wei, D. S., Li, R., Yu, N., Sun, Q., and Lu, J. (2023). An efficient scheduling scheme of swapping and purification operations for end-to-end entanglement distribution in quantum networks. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*.
- Wehner, S., Elkouss, D., and Hanson, R. (2018). Quantum internet: A vision for the road ahead. *Science*, 362(6412):eaam9288.
- Xiao, Z., Li, J., Xue, K., Yu, N., Li, R., Sun, Q., and Lu, J. (2024). Purification scheduling control for throughput maximization in quantum networks. *Communications Physics*, 7(1):307.