

Capacidade de um Enlace Óptico com um Número Finito de Fontes Ópticas sob Tráfego Uniforme

Helio Waldman¹, Rodrigo C. Bortoletto², Vinicius F. de Souza³, Lucas O. A. Mauricio¹

¹Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) Caixa Postal 6167 – 13084-971 – Campinas – SP – Brazil

²Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP – Campus Guarulhos) – 07115-000 – Guarulhos – SP – Brazil

³Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais (IFSULDEMINAS – Campus Machado) – 37750-000 – Machado – MG – Brazil

hwaldman@unicamp.br, bortoletto@ifsp.edu.br,
vinicius.souza@ifsuldeminas.edu.br, 1188523@dac.unicamp.br

Resumo. *Esse artigo apresenta uma comparação dos desempenhos previstos pelos modelos de Erlang e de Engset para um enlace óptico a partir da observação da taxa média de chegada de requisições espectrais uniformes, que é tomada como uma variável observável comum aos dois modelos. Para isso, são estudadas separadamente as dinâmicas da ocupação espectral e do engajamento das fontes, porém articuladas entre si pela variável observada, tendo em vista que o número de conexões alocadas é sempre igual ao de fontes ativas. A pesquisa discutiu as condições de equilíbrio entre o protagonismo das fontes e o antagonismo do espectro, e determinou em que condições ele ocorre. Com base nesse estudo, foi calculada a capacidade efetiva de um enlace capaz de acomodar 11 conexões ao mesmo tempo, para o número de fontes variando de 1 a 100.*

Abstract. *This paper presents a comparison of the performances forecast by the Erlang and the Engset models for an optical link from the observation of the mean rate of arrivals of uniform spectral requests, which is accepted by both models as an observed variable. For this purpose, the dynamics of the spectral occupation and of the engagement of a finite number of sources are articulated with each other, considering that the number of active connections is also the number of active sources all the time. The paper discusses the conditions for equilibrium between the protagonism of the sources and the antagonism of the spectrum whenever it occurs. Based on this discussion, the effective capacity of a single link with enough slots to accommodate 11 connections at the same time was calculated for the number of sources varying from 1 to 100.*

1. Introdução

O modelo de Erlang é amplamente utilizado para modelar o comportamento de redes de telecomunicações, incluindo redes ópticas. No entanto, ele apresenta algumas limitações significativas quando aplicado a estas últimas. Por exemplo, o Modelo de Erlang assume que há uma quantidade infinita de fontes de tráfego, o que não é realista nas redes ópticas modernas, onde o número de fontes acopladas a uma fibra óptica é limitado.

Para superar essas limitações, o Modelo de Engset oferece uma alternativa mais precisa. Diferentemente do Modelo de Erlang, o Modelo de Engset leva em conta um número finito de fontes de tráfego, proporcionando uma representação mais fiel da realidade das redes ópticas e a oportunidade da otimização do sistema como um todo, ou seja, considerando tanto as restrições espectrais como também as eventuais restrições de serviço. Por isso, ele permite uma análise mais detalhada das probabilidades de bloqueio e da utilização dos recursos, adaptando-se melhor às características dinâmicas do tráfego óptico. Dessa forma, o Modelo de Engset pode melhorar significativamente a eficiência e a robustez da modelagem de redes ópticas, proporcionando uma ferramenta poderosa para os pesquisadores e engenheiros na otimização dessas infraestruturas vitais. Uma apresentação contemporânea de ambos os modelos pode ser encontrada em [Zukerman 2013].

O modelo de Erlang foi proposto em 1917 [Erlang 1917] e o de Engset no ano seguinte [Engset 1918]. Na época, como se sabe, não havia computadores. Assim, a maior simplicidade do modelo de Erlang deve ter sido decisiva para que ele fosse adotado como padrão pelos profissionais de telefonia através de simples consultas a tabelas pré-calculadas que, por sua vez, iam se tornando cada vez mais precisas à medida que o número de fontes (telefones) ia se aproximando do “infinito” com a universalização do serviço telefônico.

Com essa universalização, ocorrida nos países ricos nos anos 60 do século passado, a investidora de uma empresa estadunidense (ATT) na oferta do serviço telefônico nos Estados Unidos perdeu seu sentido original, abrindo caminho para a sua desinvestidura (“*divestment*”), e a consequente privatização do serviço em quase todos os países (inclusive no Brasil em 1998), e o uso da rede telefônica para a oferta de serviços digitais precursores (p. ex. e-mails) através de modems e/ou de redes integradas de serviços digitais (ISDN’s).

Esse uso, porém, já começou com os dias (ou anos) contados, pois enquanto os serviços digitais cresciam em torno de 100 % ao ano, a rede de fios de cobre continuava a crescer no mesmo ritmo de 10 % ao ano de antes da universalização, de maneira que em algum momento em torno da virada do século o crescimento dos serviços digitais seria contido pela capacidade acanhada dos fios de cobre se nenhuma alternativa surgisse em tempo. Assim, a continuidade desse crescimento só foi possível graças ao extraordinário desenvolvimento da tecnologia da conectividade (“*networking*”) por fibras ópticas, ocorrido nas últimas décadas do século XX. Por isso, o prêmio Nobel de Física de 2009 foi conferido a Charles Kao, por ter contribuído de forma relevante e decisiva para desenvolver o potencial das fibras e da luz desde a retomada dessa pesquisa em meados do século XX, e colocá-los a serviço da sociedade moderna ao longo de décadas.

A necessidade de prover uma infraestrutura adequada para sustentar o crescimento acelerado e contínuo dos serviços digitais levou diversas empresas a implantarem redes de fibra óptica desde a virada do século. Ao mesmo tempo, o advento dos amplificadores ópticos nos anos 90 viabilizou a plena utilização da banda passante das fibras, fazendo delas o meio de transmissão mais transparente do planeta, substituindo o ar, salvo pela maior capilaridade inerente aos sistemas sem fio. Por isso, as novas fibras eram tipicamente muito sub-utilizadas no começo deste século, de maneira que o rápido crescimento do tráfego não era considerado um problema no curto prazo. Porém, o tráfego dobra

cada vez que ele cresce 100 %, e, portanto, é multiplicado por 1000 quando dobra 10 vezes, pois $2^{10} = 1024$. Então, uma fibra que só usava 0,1 % da sua capacidade em 2005 vai saturar em 2025 se o seu tráfego cresceu 40 % ao ano durante esses últimos 20 anos, que é o que tem acontecido. Daí a crescente preocupação com a eficiência no uso dos recursos espectrais diante do incessante crescimento e variedade dos serviços digitais [Waldman 2018], o que requer a adoção de modelos mais realistas da complexa dinâmica envolvida pelos requisitos do tráfego gerado por esses serviços, sendo esta a motivação deste trabalho.

2. Metodologia

A fim de discutir a aplicação do modelo de Engset ao enlace óptico e compará-lo com os resultados gerados pela aplicação do modelo de Erlang, consideramos aqui um tráfego uniforme, em que todas as requisições solicitam o mesmo número de slots contíguos do espectro; e o algoritmo de alocação espectral é o *first-fit*, do estado-da-arte [Chatterjee and Oki 2020], que é isento de perdas causadas pela fragmentação espectral na presença de tráfego uniforme, o que viabiliza a metodologia analítica para a formulação de um modelo nessas condições.

A Figura 1 ilustra a abordagem adotada em [Waldman et al. 2024] para fazer uma comparação quantitativa entre os dois modelos num enlace avulso que engloba: um espectro disponível com S slots; e um conjunto de M fontes acopladas à fibra que alternam dois regimes de trabalho: ativo e inativo. Quando inativa, cada fonte aguarda com uma taxa ρ a oportunidade de requisitar b slots contíguos para acomodar uma nova conexão. Se essa requisição não for bloqueada por insuficiência de recursos espectrais, a fonte passa para o estado ativo, no qual ela atua no serviço à conexão ativada e não pode requisitar outras conexões. O término dessa conexão devolve a fonte ao estado inativo. Portanto, a taxa instantânea de requisição de cada fonte SBRC 2026 é ρ quando ela está inativa e zero quando está ativa. Além disso, o espectro disponível só consegue acomodar no máximo $C = \lfloor \frac{S}{b} \rfloor$ conexões ao mesmo tempo.

A Figura mostra dois peritos em modelagem de redes, sendo um adepto do modelo de Erlang e outro do modelo de Engset, aos quais é colocado o seguinte desafio: com base na observação das chegadas de requisições a um enlace avulso de um tráfego uniforme, qual será a resultante probabilidade de bloqueio em regime? Supõe-se que os dois peritos dispõem de um relógio e de um contador de chegadas, de maneira que eles podem, após um certo tempo, chegar a um acordo a respeito do valor da taxa média de chegadas, aqui denotado por λ .

Este acordo obriga os dois peritos a modelar o enlace de tal forma que ambos os modelos apresentem a mesma taxa média λ de requisições observada ao longo do tempo. Porém, eles são livres para adotar hipóteses diferentes sobre a taxa instantânea. O modelo de Erlang supõe que a taxa instantânea é igual à taxa média em todos os instantes, como mostra a nuvem esquerda. Já o modelo de Engset, ilustrado na nuvem direita, supõe que a taxa instantânea é dada pelo produto do parâmetro ρ pelo número de fontes inativas $M - n(t)$, onde $n(t)$ é o número de conexões ativas no instante t , que é igual ao número de fontes ativas no mesmo instante. Assim sendo, ρ pode ser identificado com a taxa individual de requisições de cada fonte inativa ao longo do tempo.

As duas nuvens apresentadas na Figura 1 apresentam duas maneiras distintas

Comparação Quantitativa

Experimento Imaginário: $\{\lambda, C\} \rightarrow P_b=?$

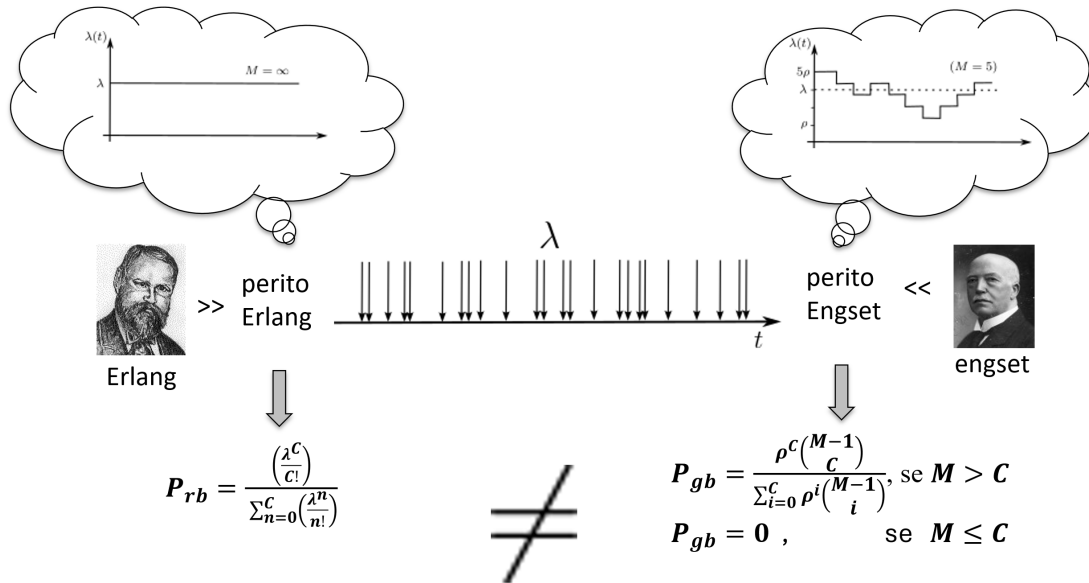


Figura 1. Ilustração de um experimento imaginário (“*thought experiment*”).

como os dois peritos “enxergam” a taxa instantânea de chegadas no tempo. O perito de Erlang simplesmente ignora a variação da taxa em torno da sua média, o que parecia bastante razoável quando não havia computadores. Já o perito de Engset vê a taxa instantânea ser acrescida de ρ toda vez que uma conexão é terminada, devolvendo sua fonte ao estado inativo; e ser decrementada no mesmo valor toda vez que uma nova conexão é ativada. Por isso, o valor máximo da taxa instantânea no modelo de Engset é ρM , e o valor mínimo será

- $\rho(M - C)$ se $M \geq C$; e
- zero se $M \leq C$, implicando em ausência de requisições.

A segunda condição acima configura em grau máximo a chamada restrição de serviço, que deve ser considerada ao lado da restrição espectral para avaliar o desempenho do sistema. Como o modelo de Erlang pressupõe que $M = \infty$, ele pode ignorar a segunda hipótese, pois, como o espectro é sempre finito, o número de fontes inativas, capazes de gerar requisições, será sempre infinito. Assim sendo, a tarefa do perito de Erlang consiste apenas em inserir o valor observado de λ na fórmula de Erlang-B mostrada na Figura 1 para obter o valor P_{rb} da probabilidade de bloqueio segundo o modelo de Erlang.

Já a tarefa do perito de Engset é mais difícil, pois o valor da probabilidade P_{gb} de bloqueio segundo o modelo de Engset não é expresso em função de λ na literatura. Ao invés disso, a fórmula normalmente encontrada na literatura expressa P_{rb} em função de ρ , que é tratado como um parâmetro independente. A ideia desse trabalho é estabelecer a relação entre λ e ρ , e a partir dela obter P_{gb} e compará-la com P_{rb} , para o mesmo valor da

variável observada λ .

3. Modelos de Engset e de Erlang para um enlace óptico sob tráfego uniforme

Na presença de um tráfego uniforme de requisições por uSBRC 2026m número b de slots contíguos de um total de S slots que pode estar parcialmente ocupado por conexões de mesmo tamanho, o modelo de Engset difere do modelo de Erlang por supor a presença de apenas um número finito M de fontes acopladas à fibra, enquanto o modelo de Erlang supõe a existência de infinitas fontes ($M = \infty$), o que não é realista, mas pode ser ou não uma boa aproximação da realidade.

A representação matemática do modelo depende não só do sistema em si como também do algoritmo usado para alocar as requisições no espectro disponível. Neste trabalho suporemos a adoção do algoritmo *first-fit* de alocação espectral, que é ótimo num enlace avulso por ser isento de perdas por fragmentação espectral sob tráfego uniforme. Nessas condições, o máximo número C de conexões ativas que o sistema poderá acomodar no espectro ao mesmo tempo será:

$$C = \left\lfloor \frac{S}{b} \right\rfloor \quad (1)$$

Na Figura 2 os círculos representam os estados de duas cadeias de Markov que representam o modelo de Engset para dois SBRC 2026casos distintos. As figuras 2a e 2b se aplicam respectivamente aos casos em que $M \leq C$ e em que $M \geq C$, sendo ambas equivalentes para $M = C$. Os círculos são rotulados pelo número n de conexões ativas no espectro.

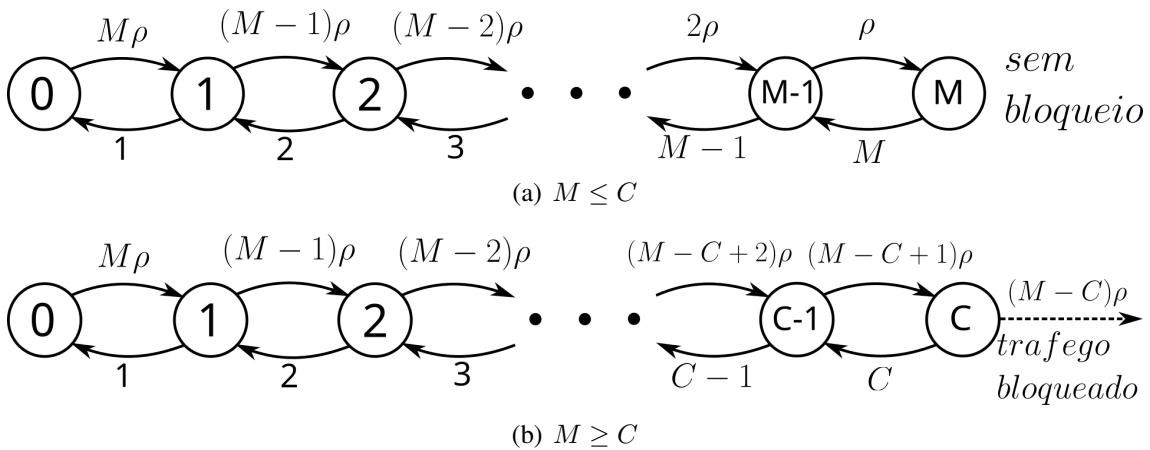


Figura 2. Cadeia de Markov de um enlace avulso sob tráfego uniforme no modelo de Engset.

As alocações (“nascimentos”) são representadas por setas da esquerda para a direita, rotuladas pelas respectivas taxas $\rho(M - n)$, que são proporcionais ao número $(M - n)$ de fontes inativas, sendo a constante de proporcionalidade dada pelo parâmetro ρ , que corresponde, portanto, à taxa de requisições geradas por cada fonte individualmente quando ela se encontrar no estado inativo. Quando no estado ativo, uma fonte não pode gerar novas requisições, pois não poderá servir a duas conexões ao mesmo tempo.

Já as terminações (“mortes”) das conexões são representadas pelas setas da direita para a esquerda, que são rotuladas por múltiplos da taxa de terminação de cada conexão, dada pelo inverso da duração média das conexões, que é igual a 1 por convenção quando as taxas são expressas em Erlangs.

Assim sendo, se houver um estado em que todas as M fontes estiverem ativas, como ocorre na Figura 2a no estado M , então não haverá nenhuma fonte inativa que possa fazer uma nova requisição, e por isso também não haverá nenhum bloqueio conforme indicado na figura. Essa condição configura uma situação de restrição de serviço, na qual todas as fontes estão ocupadas, e, por isso não há requisições. Nessas condições, poderíamos dizer que a probabilidade de bloqueio é indeterminada, mas, como também não há bloqueios, podemos também dizer que a probabilidade de bloqueio é zero, que é o procedimento adotado pela literatura e aqui.

Por outro lado, se o número de fontes for superior ao maior número C de conexões ativas que o espectro pode acomodar ao mesmo tempo, então mesmo quando o espectro estiver cheio, ou seja, com C conexões ativas, ainda haverá $(M - C)$ fontes inativas que produzirão requisições com taxa $\rho(M - C)$ de bloqueios, conforme mostrado na Figura 2b.

Para efeito de comparação, a Figura 3 mostra a cadeia de Markov que representa o modelo de Erlang para todos os casos, uma vez que o número de fontes agora é suposto infinito ($M = \infty$). Nota-se uma grande semelhança entre as Figuras 2b e 3. Praticamente a única diferença é que as taxas de alocação no modelo de Erlang passam a ser independentes do estado, de maneira que a taxa de alocação não varia mais com o tempo e é sempre igual à taxa média de requisições λ , conforme sugere a imagem da nuvem esquerda na Figura 1.

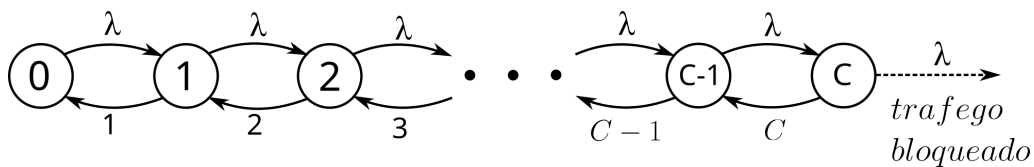


Figura 3. Cadeia de Markov de um enlace avulso sob tráfego uniforme no modelo de Erlang.

A rigor, se fizermos $\rho \rightarrow 0$ e $M \rightarrow \infty$ na Figura 2b, obtemos a Figura 3, pois ao subtrair uma quantia finita de outra infinita, o resultado continua infinito. Por consequência, as duas nuvens da Figura 1 também se igualam, unificando as conjecturas dos dois peritos, o que sugere que o modelo de Erlang pode ser considerado um limite assintótico do modelo de Engset quando o número de fontes é levado ao infinito.

3.1. Probabilidades de Estado e de Bloqueio

A probabilidade do sistema se encontrar no estado n será denotada por $p_g(n)$ no modelo de Engset e por $p_r(n)$ no modelo de Erlang. A relação entre as probabilidades de estado em cada modelo depende apenas da topologia da cadeia de Markov de cada modelo, que é comum aos dois modelos aqui considerados, como se pode observar pela semelhança entre as Figuras 2b e 3. Assim sendo, é conveniente adotar a notação $p_m(n)$, sendo $m \in \{g, r\}$, onde “g” representa o modelo de Engset e “r” o modelo de Erlang,

para obter as probabilidades de estado em cada um dos modelos aqui estudados. Assim, as probabilidades de estado serão expressas em função das taxas de transição genéricas $t_{n,n-1}$ do estado n para o estado $(n - 1)$ quando houver; e das taxas $t_{n,n+1}$ do estado n para o estado $(n + 1)$ quando houver, dadas por:

$$t_{n,n-1} = n, \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \dots, C\}, \quad \forall m \in \{g, r\} \quad (2)$$

$$t_{n,n+1} = \lambda \quad \forall n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, C - 1\}, \quad m = r \quad (3)$$

$$t_{n,n+1} = \rho(M - n) \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \dots, C - 1\}, \quad m = g \quad (4)$$

As topologias das cadeias mostradas nas Figuras 2 e 3 pertencem à classe de topologias de rede em barramento, que por sua vez pertence a um conjunto maior de redes conhecidas como reversíveis [Kelly 2011]. Os sistemas reversíveis têm a propriedade de, além de apresentar um equilíbrio global envolvendo todos os estados do sistema, apresentam também uma condição de equilíbrio local (“*detailed balance*”) que contempla cada par de estados que se comunicam.

O equilíbrio local significa que, dado qualquer par de estados a e b que se comunicam, as taxas médias de transição de a para b e de b para a ao longo do tempo são iguais, ou seja:

$$p_m(a) t_{a,b} = p_m(b) t_{b,a}, \quad \forall m \in \{g, r\} \quad (5)$$

Assim sendo, podemos escrever para ambos os modelos aqui estudados que:

$$p_m(n) t_{n,n-1} = p_m(n-1) t_{n-1,n} \quad (6)$$

3.1.1. Modelo de Erlang

Da equação 6, teremos então para o modelo de Erlang ($m = r$):

$$p_r(n) n = p_r(n-1) \lambda \quad (7)$$

Aplicando esta equação recorrentemente, teremos então:

$$\begin{aligned} p_r(n) &= \left(\frac{\lambda}{n}\right) p_r(n-1) = \left(\frac{\lambda}{n}\right) \left(\frac{\lambda}{n-1}\right) p_r(n-2) = \dots = \\ &= \left(\frac{\lambda}{n}\right) \left(\frac{\lambda}{n-1}\right) \dots \left(\frac{\lambda}{1}\right) p_r(0) = \frac{\lambda^n}{n!} p_r(0) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\therefore \sum_{i=0}^C p_r(i) = p_r(0) \sum_{i=0}^C \frac{\lambda^i}{i!} = 1, \quad (9)$$

por se tratar da soma das probabilidades de todos os estados. Das equações 8 e 9, temos então:

$$\therefore p_r(n) = \frac{\lambda^n}{n!} p_r(0) = \frac{\frac{\lambda^n}{n!}}{\sum_{i=0}^C \frac{\lambda^i}{i!}}, \quad (10)$$

Na Figura 3, podemos observar que a taxa de requisições em cada estado é sempre igual à taxa média de requisições λ , o que é compatível com um tráfego Poissoniano. Supondo então que o tráfego seja Poissoniano, podemos invocar a propriedade PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) [Kumar et al. 2004] para afirmar que a probabilidade de bloqueio P_{rb} é igual à probabilidade do estado C , uma vez que este é o único estado bloqueante da cadeia:

$$P_{rb} = p_r(C) = \frac{\frac{\lambda^C}{C!}}{\sum_{i=0}^C \frac{\lambda^i}{i!}}, \quad (11)$$

que constitui a famosa fórmula Erlang-B amplamente utilizada na modelagem de sistemas de comunicações.

3.1.2. Modelo de Engset

Aplicando novamente a equação 6, mas agora para o modelo de Engset ($m = g$), temos:

$$p_g(n)n = p_g(n-1)\rho(M-n+1) \quad (12)$$

Aplicando o mesmo tipo de recorrência usado acima para o modelo de Erlang, temos agora para o modelo de Engset:

$$\begin{aligned} P_g(n) &= \frac{\rho(M-n+1)}{n} p_g(n-1) = \left[\frac{\rho(M-n+1)}{n} \right] \left[\frac{\rho(M-n+2)}{n-1} \right] p_g(n-2) = \\ &= \dots = \left[\frac{\rho(M-n+1)}{n} \right] \left[\frac{\rho(M-n+2)}{n-1} \right] \dots \left[\frac{\rho \cdot (M-1)}{2} \right] \left[\frac{\rho \cdot M}{1} \right] p_g(0) = \\ &= \rho^n \left[\frac{M!}{n!(M-n)!} \right] p_g(0) = \rho^n \binom{M}{n} p_g(0), \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, C-1, C\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\therefore \sum_{i=0}^C p_g(i) = p_g(0) \sum_{i=0}^C \left[\frac{\rho^i \binom{M}{i}}{i!} \right] = 1, \quad (14)$$

por se tratar da soma das probabilidades de todos os estados. Das equações 13 e 14, temos então:

$$p_g(n) = \rho^n \binom{M}{n} p_g(0) = \frac{\rho^n \binom{M}{n}}{\sum_{i=0}^C \rho^i \binom{M}{i}} \quad (15)$$

Na Figura 2, as taxas de requisições dos estados diferem entre si no modelo de Engset, fazendo com que o tráfego de requisições não seja Poissoniano. Assim, não podemos invocar a propriedade PASTA para obter a probabilidade de bloqueio P_{gb} . Porém, apenas o estado C continua sendo o único estado bloqueante, e a probabilidade de o sistema estar nesse estado bloqueante é

$$p_g(C) = \frac{\rho^C \binom{M}{C}}{\sum_{i=0}^C \rho^i \binom{M}{i}} \quad (16)$$

de acordo com a equação 15. Isso significa que a probabilidade de uma requisição ser bloqueada é dada pela equação 16 apenas quando o sistema está no estado bloqueante C ,

mas é zero quando o sistema está em todos os demais estados. Por isso, a taxa sistêmica de bloqueios β é dada pelo produto da probabilidade do único estado bloqueante pela sua respectiva taxa de requisições $\rho(M - C)$

$$\beta = \rho(M - C) p_g(C) = \frac{\rho^{C+1} \binom{M}{C} (M - C)}{\sum_{i=0}^C \rho^i \binom{M}{i}} \quad (17)$$

Já a taxa total de requisições, incluindo as aceitas e as bloqueadas, é dada por

$$\lambda = \sum_{n=0}^C \rho(M - n) p_g(n) = \frac{\sum_{n=0}^C \rho^{n+1} (M - n) \binom{M}{n}}{\sum_{i=0}^C \rho^i \binom{M}{i}} \quad (18)$$

Finalmente, a probabilidade de bloqueio é dada pela relação entre as taxas sistêmicas de bloqueio β e de requisições em geral λ :

$$\begin{aligned} P_{gb} &= \frac{\beta}{\lambda} = \frac{\rho^{C+1} \binom{M}{C} (M - C)}{\sum_{n=0}^C \rho^{n+1} \binom{M}{n} (M - n)}, & M > C \\ P_{gb} &= 0, & M \leq C, \end{aligned} \quad (19)$$

onde, na equação 19, foi usada a identidade combinatória $\binom{M}{n} (M - n) = M \binom{M-1}{n}$, $\forall n \in [0, M]$.

4. A Dinâmica do Sistema de Fontes

No modelo de Erlang, o número de fontes é suposto infinito, mas o número de fontes ativas em qualquer momento será sempre finito e no máximo igual a C . Assim sendo, o número de fontes inativas será sempre infinito, fazendo com que sempre existam fontes disponíveis para atender uma requisição de um tráfego essencialmente estacionário, de maneira que o desempenho do modelo seja limitado apenas pela dinâmica espectral já discutida no item anterior. Por isso, a discussão da dinâmica do sistema de fontes só é relevante para o modelo de Engset, que é discutido abaixo.

Da observação da Figura 2, a taxa média de requisições λ pode ser expressa da seguinte maneira alternativa à equação 18:

$$\lambda = E[\rho(M - n)] = \rho(M - \bar{n}), \quad (20)$$

onde \bar{n} é o número médio de conexões ativas no espectro, e, portanto, também o número médio de fontes ativas no sistema de M fontes.

A Lei de Little estabelece que o número médio de uma categoria qualquer de componentes temporários de um sistema é sempre dado pelo produto da taxa de entrada desses componentes no sistema pelo tempo médio deles no sistema. No caso em pauta, \bar{n} é o número médio de conexões ativas no enlace, a taxa de entrada das conexões é $\lambda(1 - P_{gb})$, e o tempo médio das conexões é 1 por convenção quando as taxas são expressas em Erlangs, de maneira que podemos escrever

$$\bar{n} = \lambda(1 - P_{gb}) \quad (21)$$

Inserindo a equação 20 na equação 21, obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \rho [M - \lambda (1 - P_{gb})] \\ \therefore \rho &= \frac{\lambda}{[M - \lambda (1 - P_{gb})]} \end{aligned} \quad (22)$$

Assim sendo, quando $P_{gb} = 0$, o que ocorre quando $M \leq C$, então

$$\rho = \frac{\lambda}{(M - \lambda)}, \quad M \leq C, \quad P_{gb} = 0 \quad (23)$$

Na equação 18, λ é uma função complexa de ρ , dado M , portanto não seria possível obter nem ρ nem λ apenas com a equação 22. Porém, nas condições do experimento proposto para comparar os modelos de Erlang e de Engset, ilustradas pela Figura 1, λ é uma **variável observada**, comum aos dois modelos, de maneira que podemos escrever a partir da equação 22 que

$$P_{gb} = \frac{1}{\rho} + 1 - \frac{M}{\lambda} \quad (24)$$

onde λ é observada e medida, condicionando uma nova dependência de P_{gb} com ρ , em adição a equação 19. Observe na equação 24 que P_{gb} é decrescente com ρ quando se fixa a taxa média λ como se pretende na metodologia proposta, ao passo que, na equação 19, P_{gb} é crescente com ρ . Portanto, existe no máximo um único ponto de cruzamento entre as duas equações, que fornecerá ao mesmo tempo os valores de ρ e P_{gb} . A Figura 4 apresenta o cruzamento das duas equações no plano (ρ, P_{gb}) e a respectiva solução para ρ e P_{gb} no caso em que $M = 24$, $C = 18$ e $\lambda = 16$ discutido em [Waldman et al. 2024].

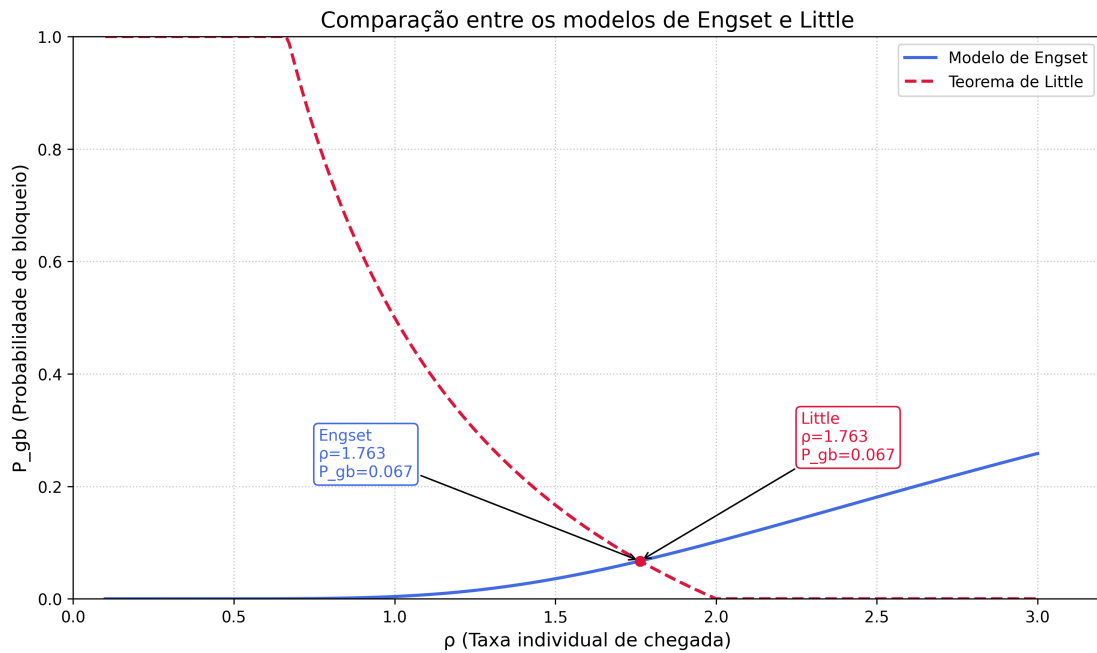


Figura 4. Equilíbrio entre as dinâmicas de alocação do espectro e de engajamento das fontes.

O cruzamento entre as duas curvas da Figura 4 caracteriza a interação entre as dinâmicas da alocação espectral pelas fontes inativas e do recrutamento de fontes para fazer este serviço, que decorre da igualdade entre o número de fontes ativas e de conexões ativas em cada momento. Assim sendo, a aplicação do Teorema de Little preconizada em [Waldman et al. 2024] descarta a caracterização de ρ como um parâmetro independente que possa assumir qualquer valor em qualquer circunstância, pois há pelo menos uma limitação, gerada pelo equilíbrio entre o protagonismo das requisições pelas fontes e o antagonismo dos bloqueios pelo espectro.

5. Capacidade do Enlace Avulso

Entendemos por capacidade de um enlace o máximo valor da ocupação média do espectro que pode ser atingido para alguma condição de tráfego. No modelo de Erlang, que supõe um número infinito de fontes, a capacidade do enlace é simplesmente $C = \lfloor \frac{S}{b} \rfloor$, e o problema de determinar a variação da capacidade com o número de fontes não se coloca, pois o número de fontes é infinito por definição.

Já no modelo de Engset, o número de fontes M é finito, estabelecendo um limitante para a quantidade de requisições que podem ser alocadas por unidade de tempo. Para obter esse número, consideremos inicialmente quantas requisições por unidade de tempo cada fonte pode gerar. Como ela não pode gerar nenhuma requisição enquanto estiver prestando serviço a uma conexão, então o espaçamento médio entre duas requisições sucessivas é pelo menos a duração média de um serviço, que é 1. Ou seja, o tráfego gerado por cada fonte individualmente é no máximo 1 Erlang. Assim, a taxa sistêmica de requisições geradas por M fontes independentes é limitada a M Erlangs. Além disso, tratando-se de uma taxa média no tempo, $\lambda(\rho; M)$ é limitada pela taxa instantânea de pico dada por ρM , que ocorre no estado vazio ($n = 0$). Teremos então:

$$\lambda(\rho; M) \leq \min(M, \rho M) = M, \quad \text{se } \rho > 1 \quad (25)$$

Uma vez obtido, por aproximação numérica, o valor de $\rho > 1$ que produz $\lambda(\rho; M) = M$, o valor da capacidade do enlace é obtido calculando a ocupação média do espectro.

Fazendo-se $\lambda(\rho) = M$ na equação 24, teremos:

$$P_{gb} = \frac{1}{\rho}, \quad \lambda(\rho; M) = M, \quad (26)$$

de maneira que podemos expressar a capacidade Γ_g do enlace pelo modelo de Engset como o máximo número médio de conexões ativas:

$$\Gamma_g = M \left(1 - \frac{1}{\rho}\right), \quad \lambda(\rho; M) = M > C. \quad (27)$$

$$\Gamma_g = M, \quad M \leq C \quad (28)$$

A Figura 5 mostra a variação da capacidade Γ_g do enlace com o número M de fontes para o caso de um enlace capaz de acomodar um número $C = 11$ de conexões

ativas ao mesmo tempo, como por exemplo com enlace com 320 slots sob um tráfego de requisições de conexões de 28 slots capazes de dar suporte a uma taxa de bits de 1 Tb/s sobre distâncias superiores a 4000 km .

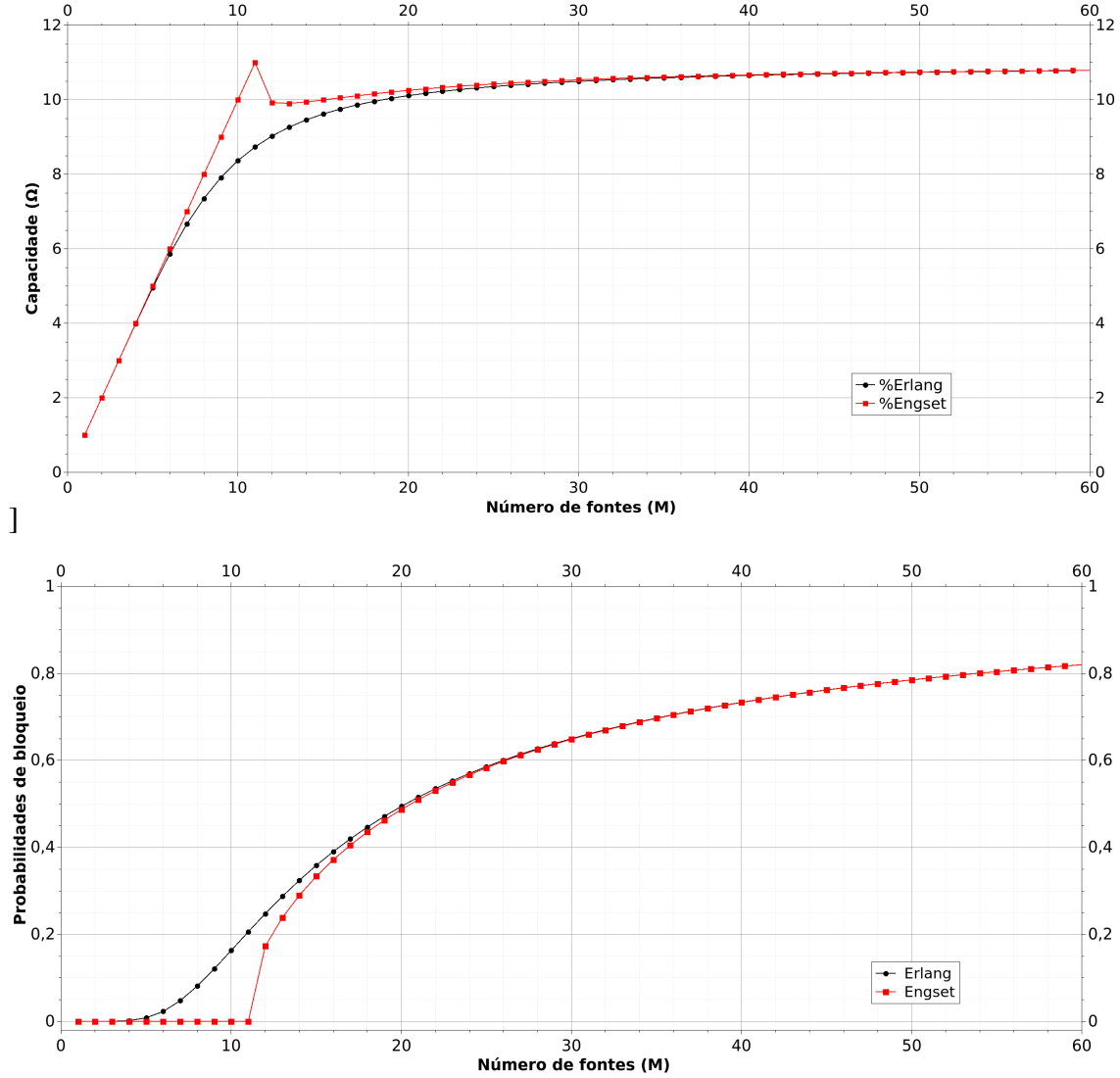


Figura 5. Capacidade do enlace avulso sob tráfego uniforme de requisições de uma única classe sob os modelos de Engset e de Erlang.

Na figura, é plotada também a capacidade do mesmo enlace sob o modelo de Erlang para a mesma taxa média λ de chegada de requisições observada sob o modelo de Engset para o respectivo número de fontes, calibrando assim a comparação para o mesmo valor de uma variável observável (no caso, a taxa média de chegadas de requisições). Assim sendo, para efeito de comparação com o modelo de Engset com M fontes, a capacidade Γ_r do enlace sob o modelo de Erlang é obtida da equação 11 fazendo $\lambda = M$:

$$\Gamma_r = M (1 - P_{rb}) = M \left[1 - \frac{\frac{M^C}{C!}}{\sum_{i=0}^C \frac{M^i}{i!}} \right] \quad (29)$$

A Figura 5 mostra que o modelo de Engset prevê um pico bastante acentuado

da capacidade do enlace quando $M = C$, ou seja, quando o número de fontes iguala exatamente o número de conexões ativas que o espectro é capaz de acomodar ao mesmo tempo. Este pico é bastante trivial quando consideramos, por exemplo, o número de vagas (C) que precisam ser oferecidas por um estacionamento para acomodar um certo número de automóveis habilitados para acessá-lo ($M = C$). Porém, o modelo de Erlang não é capaz de reconhecer a existência dessa condição ótima porque ele parte do pressuposto de que $M = \infty$, condição irreal na qual a capacidade cairia cerca de 20% em relação ao pico para $C = 11$.

6. Comentários Finais

O artigo demonstrou a existência de um pico de capacidade de um enlace avulso sob um tráfego uniforme com o algoritmo *first-fit* de alocação quando o número de fontes é igual ao número de conexões ativas que o espectro pode acomodar ao mesmo tempo. Além disso, esse número de fontes garante a plena ocupação do espectro disponível com probabilidade zero de bloqueio pelo espectro.

Apesar de extraordinário, esse resultado pode ser considerado intuitivo se considerarmos, por exemplo, o dimensionamento ótimo do estacionamento de um condomínio com C condôminos em que cada um tenha direito a uma vaga. Como todos sabemos, são necessárias e suficientes exatamente C vagas para que todos possam estacionar a qualquer momento e atingir a plena ocupação do estacionamento com probabilidade zero de bloqueio.

Porém, apenas o modelo de Engset é capaz de prever esse resultado. Para o modelo de Erlang, a ocupação plena só seria atingível com um número de fontes (“condôminos”) tendendo assintoticamente ao infinito, e com probabilidade de bloqueio tendendo a 1, o que também é previsto pelo modelo de Engset mas tem pouco interesse na prática. Para a mesma taxa média observada de $C = 11$ chegadas de requisições por unidade de tempo, o modelo de Erlang prevê uma ocupação de apenas 8,83 vagas com uma probabilidade de bloqueio de 20,6 %, ao passo que o de Engset prevê corretamente uma ocupação total das onze vagas com probabilidade zero de bloqueio.

O próximo desafio nessa pesquisa é a extensão desse resultado para o caso do enlace elástico, que admite requisições não-uniformes, que podem admitir 2 ou mais tamanhos expressos em diferentes números de slots, conforme a taxa de bits e/ou a distância a ser percorrida pelo caminho óptico.

O modelo de Erlang consolidou sua popularidade antes do advento do computador em meados do século XX, usando como tecnologia a impressão de tabelas pré-calculadas em papel, que eram consultadas pelos engenheiros no dimensionamento de centrais telefônicas. Na ocasião, as redes tinham que ser dimensionadas para se manter permanentemente bem abaixo da sobrecarga. Atualmente, vários autores estão alertando a comunidade sobre a iminência de um “*networking crunch*” na próxima década, e algo parecido com isso já ocorreu durante a pandemia. Daí a necessidade de modelar a rede para essa eventualidade, o que só é possível com um modelo que reconheça a existência de restrições de serviço associadas a cargas pesadas e até à sobrecarga, como é o caso do modelo de Engset.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio do CNPq, por meio da bolsa PQ-Sr – Proc. 304005/20222-3, do Instituto Federal de São Paulo – IFSP, do Instituto Federal do Sul de Minas – IFSULDEMINAS – Campus Machado e da FAPESP .

Referências

- Chatterjee, B. and Oki, E. (2020). *Elastic optical networks: fundamentals, design, control, and management*. CRC Press.
- Engset, T. (1918). Die wahrscheinlichkeitsrechnung zur bestimmung der wähleranzahl in automatischen fernsprechamtern. *Elektrotechnische zeitschrift*, 39(31):304–306.
- Erlang, A. K. (1917). Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. *Post Office Electrical Engineer's Journal*, 10:189–197.
- Kelly, F. P. (2011). *Reversibility and stochastic networks*. Cambridge University Press.
- Kumar, A., Manjunath, D., and Kuri, J. (2004). *Communication networking: an analytical approach*. Elsevier.
- Waldman, H. (2018). The impending optical network capacity crunch. In *2018 SBFoton International Optics and Photonics Conference (SBFoton IOPC)*, pages 1–4. IEEE.
- Waldman, H., Bortoletto, R. C., and De Souza, V. F. (2024). A comparison between the erlang and engset traffic models in the provisioning of an optical link. In *2024 24th International Conference on Transparent Optical Networks (ICTON)*, pages 1–4. IEEE.
- Zukerman, M. (2013). Introduction to queueing theory and stochastic teletraffic models. *arXiv preprint arXiv:1307.2968*.