OS PRINCÍPIOS DE *OS ELEMENTOS* NA ANTIGUIDADE CLÁSSICA

GT 8: Educação Matemática
Trabalho completo
Bruno Felipe Gonçalves Diamantino da SILVA (Bolsista do Fundo de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás/FAPEG)
diamantino@discente.ufg.br
Humberto de Assis CLÍMACO (Docente da Universidade Federal de Goiás/UFG)
humberto_climaco@ufg.br

Resumo

Neste trabalho, realizamos uma exposição da axiomatização euclidiana para a teoria geométrica do espaço, conforme disposta em *Os Elementos*. Em seguida, fornecemos um panorama das críticas que se estabeleceram ao conjunto dos princípios estabelecidos por Euclides. Nosso objetivo era evidenciar a necessidade da relativização da afirmação de que *Os Elementos* foram historicamente tidos como o mais perfeito modelo de rigor lógico. Neste sentido, pretendemos também contribuir para que o trato dos conteúdos da geometria, vistos como resultados de um processo de mudanças e transformações históricas, se torne crítico e humanizado, o que, de certo, é uma contribuição ao fazer pedagógica.

Palavras-chave: Euclides. *Os Elementos*. Axiomatização.

1 Introdução

A construção d'*Os Elementos* não foi pensada didaticamente, no sentido que se pensa a Didática atualmente. No entanto, este tratado foi o material-base com que se ensinou a matemática durante mais de dois milênios. Deste modo, discutir *Os Elementos*, nos dias atuais, significa pensar a didática da matemática que predominou durante mais de dois mil anos.

Com isto em mente, é importante ter em vista que o aparecimento na Grécia Antiga da concepção do fazer matemático como um trabalho eminentemente demonstrativo é um dos marcos mais importantes na história da matemática. Foi nesta obra de Euclides de Alexandria (*fl.* 300 a. C.), que tal concepção foi consagrada num tratado sistematizado. Além disso, cabe lembrar também que *Os Elementos* influenciou todo o estudo sobre a geometria que se seguiu dali em diante – tanto que a geometria que hoje estudamos, embora seja organizada a partir de princípios bem diferentes dos propostos por Euclides, ainda é chamada de "geometria euclidiana".

Tornou-se comum, portanto, considerar *Os Elementos* como o mais perfeito modelo de rigor lógico – um padrão para o trabalho demonstrativo do matemático. Neste trabalho procuramos relativizar a legitimidade desta consideração, de modo que o tratamento desta obra, que na maior parte dos casos se dá no ensino de geometria, ou seja, num ambiente pedagógico, possa ser conduzido de maneira historicamente mais sensível.

Nossa inspiração é De Risi (2016). Este trabalho, a partir de uma revisão das edições e dos textos sobre *Os Elementos* – da *Geometria* de São Severino Boécio (*c.* 480 – 524/525) até a edição de François Peyrard (1760 – 1822) –, discrimina a inserção, a retirada e o aparecimento de cada princípio das várias axiomatização propostas para o estudo da geometria. Nosso trabalho fornecerá uma espécie de leitura complementar a De Risi (2016). Pretendemos como ela que, após uma breve apresentação da axiomatização que se pensa ser a mais próxima da originalmente proposta por Euclides, expor o conjunto de autores que, ao comentarem *Os Elementos*, teceram críticas à sua organização. Todo este panorama histórico está fundamentado sobre uma revisão das informações obtidas a partir de *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*, de Proclo Lício (412 – 485), escolarca da academia neoplatônica ateniense. Deste modo, metodologicamente falando, este é um trabalho documental bibliográfico.

Além disso, no entanto, articulamos a elaboração deste trabalho para que ele possa ir além desta leitura complementar e fornecer uma espécie de demonstração da necessidade de se avaliar a recepção d'*Os Elementos* ao longo da história, a partir da consideração das particularidades da conjuntura sócio-histórica na qual a comunidade matemática receptora se encontrava. Com isso, pretende-se que o professor de geometria que venha, eventualmente, ao ler esse material, possa pensar o seu conteúdo (inserido tanto no ensino básico, quanto no ensino superior) a partir de uma perspectiva histórica e crítica, reconhecendo os elementos constitutivos do trabalho geométrico dos gregos na Antiguidade Clássica como fundamentalmente distintos da teoria geométrica moderna.

2 A evolução do conjunto de princípios euclidianos ao longo da Antiguidade Clássica

2.1 Os princípios de Euclides

O título original d'*Os Elementos* é Στοιχεῖα (transl.: *Stoikheîa*). Esta é a forma plural de στοιχεῖον (transl.: *stoikheîon*), que, por sua vez, é um substantivo neutro geralmente traduzido por "elemento", que designa, muitas das vezes, uma letra, enquanto componente mais simples de um alfabeto. Proclo é quem melhor nos explica a relação deste significado de στοιχεῖον com o uso de Euclides:

> Chamamos "elementos" [στοιχεῖα] àqueles teoremas cujo entendimento leva ao conhecimento do resto e pelo qual as dificuldades neles são resolvidas. Assim como na linguagem escrita existem certos elementos primordiais, simples e indivisíveis, aos quais damos o nome de στοιχεῖα e com os quais todas as palavras são construídas, assim também na geometria como um todo, existem certos teoremas primários que se classifica como pontos de partida para os teoremas que os seguem [...]. O termo "elemento", no entanto, pode ser utilizado em dois sentidos, como nos conta Menêcmo. Pois, o que prova é chamado um elemento do que é provado por ele; assim, em Euclides, o primeiro teorema é um elemento do segundo, e o quarto do quinto [...]. Mas, em outro sentido, "elemento" significa uma parte mais simples na qual [aquilo que é] composto pode ser analisado. Neste sentido, nem tudo pode ser dito um elemento de qualquer coisa [que dele se siga, *adição de Glenn R. Morrow*], mas apenas os membros mais primários de um argumento que conduz a uma conclusão, assim como postulados são elementos de teoremas. Este é o sentido de "elementos" que determina o arranjo dos elementos na obra de Euclides [...] (*Comentário*, 72-73).[1]

A organização sintética do conteúdo de *Os Elementos*, segundo a qual as proposições mais simples deveriam anteceder e ser utilizadas na demonstração das mais complicadas, está, deste modo, expressa no próprio título da obra. Este tipo de organização passou a ser chamado posteriormente de *axiomatização*.

Muito embora *Os Elementos* não tenha sido o primeiro tratado grego a propor uma organização sistemática dos conteúdos geométricos – Proclo sugere, por exemplo, que Hipócrates de Quio (*c.* 470 – *c.* 410 a. C.), mais ou menos cem anos antes de Euclides, teria também escrito "um livro sobre elementos" (*Comentários*, 66)[2] –, ele é, possivelmente, um dos primeiros textos a fornecer à matemática uma axiomatização. Sendo o único sobrevivente dentre os textos deste tipo, ele é muito comumente considerado um marco na história da matemática: o mais antigo testamento que se tem do espírito demonstrativo, tão característico da matemática grega, tomando forma axiomática.

A disposição dos στοιχεῖα, compreendidos segundo o que foi acima exposto, é feita por Euclides em treze livros. O Livro I lida com proposições geométricas elementares e introduz a teoria das paralelas; o Livro II discute proposições relacionadas a triângulos e gnômons (uma figura geométrica semelhante ao que hoje chamamos de esquadro); o Livro III trata de círculos e suas propriedades; o Livro IV é sobre figuras inscritas e circunscritas; o Livro V, sobre proporção entre magnitudes; o Livro VI, sobre proporções entre figuras geométricas; os Livros

[1] Todas as citações de Proclo foram tomadas a partir da segunda edição da tradução para o inglês de Glenn Raymond Morrow, que apareceu pela primeira vez, numa primeira edição, em 1970. O título da tradução de Morrow é *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*; em português, preferimos tratá-la por *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*, donde vem a abreviação *Comentário*, como é clássico entre os autores da história da matemática grega. A paginação, no entanto, não é da edição de Morrow, mas sim da edição de 1873 de Gottfried Friedlein; tal edição está para o *Comentário* de Proclo tal como a de Henri Estienne (Stephanus) está para os diálogos platônicos. A tradução para o português é sempre nossa (feita a partir da tradução de Morrow).

[2] Esta sugestão é sustentada por Waschkies (2004).

VII, VIII e IX, sobre teoria dos números; o Livro X sobre incomensurabilidade; e os Livros XI, XII e XIII desenvolvem a geometria dos sólidos. Deste modo, pode-se grosseiramente dividir *Os Elementos* em 9 grupos de assuntos específicos.

O primeiro livro de cada um desses grupos se inicia com um conjunto de princípios que caracterizam os objetos sobre os quais se desenvolverá a teoria de cada um dos grupos. Estes princípios são as *definições* (em grego: ὅροι; transl.: *hóroi*).

Outros dois conjuntos de princípios, no entanto, são mais universais a todo o tratado. Eles são, portanto, expostos apenas no início do primeiro livro: são eles os *postulados* (gr.: αἰτήματα; transl.: *aitḗmata*) e as *noções comuns* (gr.: κοιναὶ ἔννοιαι; transl.: *koinaì énnoiai*). Embora seja ingênuo identificar uma relação direta entre as divisões aristotélica e euclidiana dos princípios assumidos para as elaborações teóricas posteriores (Szabó, 1978, p. 230-231), alguma aproximação pode ser útil para a compreensão das diferenças entre *postulado* e *noção comum*. Ambos são princípios aceitos sem demonstração. No entanto, podemos, através desta aproximação, comparar os *postulados* de Euclides às *noções específicas* de Aristóteles, no sentido de que se referem a objetos específicos da teoria que se pretende estudar; neste caso, os *postulados* de Euclides seriam *noções específicas da geometria*. Por outro lado, as *noções comuns*, que, já na época de Proclo, podiam também se chamar *axiomas*, carregam este mesmo nome dentro da divisão aristotélica e são, por suas vezes, comuns a todas as ciências.

É um trabalho um tanto complicado estabelecer o número de postulados e noções comuns que Euclides originalmente dispôs em seu *Os Elementos*. Para a composição da única edição crítica que temos hoje do texto euclidiano, Heiberg consultou sete manuscritos gregos: *Ms. Vaticano 190* (chamado P; início do século IX), *Ms. Bodleiano (D'Orville) 301* (chamado B; 888), *Ms. Laurentino XXVIII, 3* (chamado F; século X), *Ms. Bolonhês 18-19* (chamado b; século XI), *Ms. Vienense Gr. 103* (chamado V; século XII), *Ms. Parisiense Gr. 2466* (chamado p; século XII) e *Ms. Parisiense Gr. 2344* (chamado q; século XII).[3] Nesses manuscritos, a lista de postulados, sempre inclui os cinco clássicos, que também figuram na tradução de Irineu Bicudo para o português (Euclides, 2009), que é a única edição de *Os Elementos* em língua portuguesa preparada após a publicação da edição crítica de Heiberg. Esses cinco postulados clássicos são:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

---

[3] Todas as abreviações, P, B, F, b, V, p e q são de Heiberg. "B" é de "Bodleiano", "F" é de "Florença", "b" é de "Bolonha", V é de "Viena", "p" é de "Paris" e "q" segue-se a "p", pois também é um ms. parisiense. Para o significado de "P", veja a *Nota 5*.

> 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (Euclides, 2009, p. 98).

O quinto postulado desta lista é o famoso “quinto postulado de Euclides”, que, de agora em diante, vamos referir como *postulado das paralelas*. No entanto, de acordo com as observações de De Risi (2016), P, F, V e q incluem um sexto postulado – ainda que F e V encabecem a lista de postulados pelos títulos “αἰτήματά ἐστι πέντε” (transl.: *aitḗmata esti pénte*; “os postulados são cinco”) e “αἰτήματα πέντε” (“os cinco postulados”), respectivamente –, que, em B, b, V (novamente) e p, é tido como uma noção comum: “[...] duas retas não contém uma área” (Euclides, 2009, p. 99). O texto de Heiberg, no entanto, não inclui esse postulado nem mesmo dentre as noções comuns.

Cinco noções comuns também são constantes nestes manuscritos:

> 1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
> 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
> 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
> […]
> 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
> 8. E o todo [é] maior do que a parte (Euclides, 2009, p. 99).

Outras quatro, no entanto, aparecem em alguns e não em outros. Todas elas são consideradas quase consensualmente como não genuínas e provenientes de interpolações posteriores. Três são dadas (e sinalizadas como provavelmente não genuinamente euclidianas) na tradução de Bicudo:

> 4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
> 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
> 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si (Euclides, 2009, p. 99).

A última dessas quatro, a saber, que caso iguais sejam subtraídas de iguais, as restantes são iguais entre si – que, diga-se de passagem, muito se assemelha à terceira –, não se encontra no texto de Bicudo (Euclides, 2009) e foi por nós parafraseada a partir de De Risi (2016).

Heath (1921, p. 376), que foi um grande estudioso dos clássicos da matemática grega, argumenta que nem mesmo as duas últimas noções comuns da lista de Heiberg são verdadeiramente genuínas. Assim, o número das noções comuns euclidianas pode ser fixado com maior firmeza apenas em três.

Estes são os princípios mais básicos e universais da geometria, segundo o que se supõe ser a concepção euclidiana. No que se segue, discutimos como se deu a recepção desta lista de princípios elementares por parte da comunidade matemática da Antiguidade Clássica.

2.2 A crítica aos princípios de Euclides na Antiguidade Clássica

É possível que o postulado das paralelas represente uma espécie de novidade na matemática grega, pois Aristóteles (384 – 322 a. C.), que não é muito mais velho que Euclides, fala sobre um princípio invocado pelos defensores de uma teoria das paralelas pré-euclidiana, problemática em razão de sua circularidade. Pode ser que Euclides tenha se livrado deste princípio ao formular o postulado das paralelas e utilizá-lo para a demonstração da vigésima nona proposição do Livro I, a primeira que faz uso dele. Neste momento, ele estaria formulando a clássica teoria euclidiana das paralelas (Heath, 1921, p. 239). Como seria de se esperar, não se recebeu a novidade desta teoria sem críticas.

Possidônio de Apameia (*c.* 135 – *c.* 51 a. C.) preferiu definir o paralelismo de maneira diferente (*Comentário*, 176). Junto dele, Gêmino de Rodes (*fl.* 70 a. C.), é contado como um dos autores mais antigos de que temos notícia que consideraram que Euclides poderia ter errado ao não contar o postulado das paralelas como uma de suas proposições, demonstrável a partir dos outros quatro postulados e das demais noções comuns. Aparentemente, ele tentou realizar uma demonstração deste tipo (*Comentário*, 191); no entanto, seu texto se perdeu.

Mas, não só a teoria das paralelas de Euclides foi alvo de contestações. Segundo Proclo, Apolônio de Perga (262 – 194 a. C.), autor de *Cônicas*, o mais celebrado geômetra da Antiguidade, ainda antes de Possidônio e Gêmino, havia tentado "(...) providenciar demonstrações para os axiomas [noções comuns]" (*Comentário*, 183). Sabe-se, por exemplo, pelo mesmo autor, que ele tentou demonstrar a primeira noção comum, segundo a qual "caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais".

Também não se aceitou acriticamente que "as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si" e que "o todo é maior do que a parte" devessem ser contadas entre as noções comuns euclidianas. Foi Herão de Alexandria (*c.* 10 – *c.* 80), dos tratados gregos de medição, que as tomou como sendo, na verdade, proposições, cujas implicações se deviam aos outros princípios.

A contestação ao postulado das paralelas tomou forma novamente com Cláudio Ptolomeu (*c.* 100 – *c.* 170), autor de *Almagesto*, quase cem anos depois de Herão. Sua tentativa de demonstração do postulado das paralelas a partir dos outros postulados é conservada por Proclo

(*Comentário*, 365-368). Ela é, no entanto, falaciosa, na medida em que assume implicitamente que existe somente uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora desta última, o que, como se sabe desde os tempos de Alhazém (*c.* 965 – *c.* 1039) (De Risi, 2016, p. 673), é um princípio logicamente equivalente ao postulado das paralelas.[4]

Pode-se inferir que, depois de Ptolomeu, Porfírio de Tiro (232 – 304), o discípulo do ilustre Plotino (*c.* 205 – *c.* 270), escreveu um tratado sistemático acerca de *Os Elementos*, pois Proclo fornece algumas demonstrações alternativas a certas proposições do primeiro livro de Euclides que ele mesmo atribui a Porfírio (Heath, 1908, p. 24). No entanto, nosso conhecimento sobre este tratado termina aqui, pois não só ele não nos chegou, como também ele não é diretamente mencionado por nenhuma fonte (nem mesmo por Proclo).

Em Papo de Alexandria (290 – 350), logo após Porfírio, encontramos, pela primeira vez, a opinião de que a noção comum segundo a qual "duas retas não contém uma área" deveria ser contada entre as noções comuns. Seu trabalho fornece adições ao conteúdo de *Os Elementos*; segundo ele, novos princípios deveriam ser considerados. Que "os dobros da mesma coisa são iguais entre si" deveria ser uma noção comum é também uma de suas opiniões. Mas não só isso. Os seguintes princípios, que damos a partir da tradução de Morrow, também deveriam, segundo Papo, ser contados entre as noções comuns: "caso desiguais sejam adicionados a desiguais, o excesso de uma das somas sobre a outra é igual ao excesso de uma das quantidades adicionadas sobre a outra", "caso iguais sejam adicionados a desiguais, o excesso de uma das somas sobre a outra é igual ao excesso de uma das quantidades original sobre a outra", "todas as partes de um plano e todas as partes de uma reta coincidem entre si", "um ponto divide uma reta, uma reta divide um plano" e "infinito em magnitude existe tanto por adição, quanto por remoção, ainda que potencialmente em cada caso" (*Comentário*, 197-198).

Até este momento na história (isto é, até a segunda metade do século IV e primeira do século V), como se vê pelo exposto acima – que parte apenas de notícias que nos foram fornecidas por Proclo – uma determinada tradição de comentários e críticas à axiomatização euclidiana já havia se estabelecido, desde a Grécia Helenística de Euclides até a agora Grécia Romana de Papo. Esta forma de estudo e produção científica tão característica da Antiguidade e da Idade Média, o comentário, foi a forma através da qual muitas obras, dentre as quais, *Os Elementos*, chegaram até nós. No entanto, sugestões como, por exemplo, as de Papo (acima

[4] Hoje em dia, a maior parte dos livros-texto de geometria substitui o postulado das paralelas por este princípio. Ele é chamado *axioma de Playfair*, em razão do fato de que ele figura, pela primeira vez na história, em substituição do postulado euclidiano na edição de 1795 de *Os Elementos*, organizada por John Playfair.

discutidas), se faziam, na maior parte das vezes, indiscriminadamente na forma de interpolações no texto original. Essa é a razão para as divergências apontadas na *Seção 2.1* entre os manuscritos consultados por Heiberg.

Por volta do final do século IV, apareceu a famosa recensão que Teão de Alexandria (*c.* 335 – *c.* 405) fez do texto euclidiano. Até Peyrard ter redescoberto P entre meio aos textos da Biblioteca do Vaticano,[5] os manuscritos mais antigos de *Os Elementos* eram todos teoninos – inclusive B, F, b, V, p e q –, o que significa dizer que tinham sido todos copiados a partir da recensão de Teão. No entanto, o próprio Teão não realizou críticas à axiomatização de Euclides dignas de nota para a história dos princípios euclidianos. Seu texto deve ser mencionado apenas em razão do fato de que é por meio dele que o *Os Elementos* sobreviveu e foi transmitido por todo o Ocidente e, também, pelo Oriente árabe.

Imediatamente após Teão, aparece Proclo (412 – 485), que escreveu os mais extensos e bem preservados comentários gregos acerca da geometria euclidiana. O *Comentário* de Proclo é um dos documentos mais importantes para a história da matemática grega e se configura quase como um verdadeiro tratado de filosofia da matemática. Apenas a discussão acerca de suas observações sobre cada um dos princípios euclidianos e da forma como *Os Elementos* está organizado já seria suficiente para que se compusesse um trabalho inteiro. Vamos, portanto, apenas nos limitar a uma rápida exposição relacionada a uma crítica sua a um dos postulados de Euclides: o postulado das paralelas.

Ptolomeu e Proclo são os únicos autores da Antiguidade que tentaram fornecer demonstrações para o postulado das paralelas através dos demais princípios (e/ou de outros mais simples que não lhe fossem equivalentes). Sua demonstração (*Comentário*, 369-373), no entanto, também contém falhas lógicas, pois ela depende do fato de que retas paralelas sejam equidistantes. Ora, a existência de um par de retas equidistante é logicamente equivalente ao postulado das paralelas; contudo, aparentemente, Proclo não foi capaz de perceber este fato. Uma rápida apresentação tanto da demonstração de Ptolomeu quanto da demonstração de Proclo que se preocupa em evidenciar as falhas lógicas nos argumentos de ambos os personagens pode ser encontrada em Barbosa (2007, p. 18-20).

Esta seção, tendo se iniciado com algumas observações acerca da crítica que se estabeleceu à teoria euclidiana das paralelas ainda no período helenístico, também termina, nos limites da divisão histórica entre Antiguidade Clássica e Idade Média, com uma menção a uma

[5] É sua homenagem que o *Ms. Vaticano 190* é batizado, por Heiberg, como “P”.

tentativa de demonstração de P5 realizada por um certo “Aganis”, conforme sabemos, a partir de Abū ’l ‘Abbās al-Faḍl b. Ḥātim an-Nairīzī, de Simplício, o Grego (*fl.* 500) (Heath, 1908, p. 27-28). Sua demonstração se perdeu; e a única coisa que se sabe sobre este “Aganis” é que, muito provavelmente, antecedeu imediatamente a Simplício.

3 Considerações finais

A crítica à teoria euclidiana das paralelas foi um dos motores mais poderosos para o desenvolvimento da matemática. No século XIX, se chegou à conclusão de que uma lista maior e mais bem estabelecida de axiomas que buscava caracterizar o mesmo espaço geométrico que os quatro primeiros postulados era completamente independente do quinto postulado de Euclides, isto é, que o postulado das paralelas não é demonstrável a partir de outros axiomas que não lhe sejam equivalentes. Daí surgiram geometrias hiperbólicas, esféricas, elípticas, entre outras, resultado da exclusão ou substituição do postulado das paralelas. Somos capazes, hoje, de observar a fecundidade das pesquisas relacionadas a essas geometrias.

Este trabalho fornece um panorama sobre a situação em que se encontrava a crítica na Antiguidade Clássica à lista de princípios básicos de Euclides, isto é, à axiomatização de Euclides. Por meio dele, ao vislumbrar o desenvolvimento primitivo de uma teoria matemática da maior importância histórica, o leitor poderá criticamente perpassar as várias escritas da história da matemática. Pois nossa exposição evidencia a necessidade da relativização do entendimento d’*Os Elementos* como um modelo de perfeição lógica até a nova axiomatização da geometria proposta por David Hilbert e Moritz Pasch, no século XIX, ou pelo menos até a colocação da geometria antiga no domínio da álgebra realizado por Descartes (Struik, 1989). Ora, verificamos que, embora a forma de crítica tenha mudado a partir do século XVII, quando as críticas dos comentários dos clássicos deixaram de ser a forma principal de atividade intelectual, dando lugar à busca de métodos de descoberta, não é certo que não se tenha criticado *Os Elementos* desde que eles apareceram.

Pois, a depender da forma que toma e do contexto em que se insere, tal entendimento pode contribuir para uma interpretação equivocada acerca do processo histórico de construção, proposição e solidificação da teoria euclidiana do espaço e do seu método de axiomatização, o que acarreta, consequentemente, em práticas relacionadas ao ensino da geometria e de sua história totalmente equivocadas. Não poucas vezes se observa um trato absolutamente descuidado – nos cursos de licenciatura, por exemplo – para com os conteúdos relacionados à história de *Os Elementos* e da geometria euclidiana: comparações e paralelos são traçados, sem que levem em conta as particularidades culturais da Grécia Antiga; transcrições dos teoremas euclidianos para a linguagem simbólica moderna eminentemente algébrica são sancionadas e realizadas em razão da suposta legitimidade das comparações anteriormente mencionadas; e exposições simplistas da história de Euclides, dos gregos, da descoberta da incomensurabilidade e da crítica à teoria das paralelas são desenhadas.

A partir do que foi, portanto, demonstrado, acreditamos contribuir para uma recepção crítica e historicamente sensível dos conteúdos da geometria euclidiana pela comunidade de professores de matemática; isto é, para que a geometria possa ser ensinada a partir da sua consideração como fruto do trabalho humano, que factualmente se transformou e se transforma ao longo da histórica e cuja forma é resultado de um sem-número de concepções filosóficas, elas mesmas resultado de um processo histórico.

Referências

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

DE RISI, Vincenzo. The Development of Euclidean axiomatics: The systems of principles and the foundations of mathematics in editions of the Elements in the Early Modern Age. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 70, p. 591-676, fev. 2016.

EUCLIDES. **Euclidis Elementa**. Tradução de Johan Ludvig Heiberg. Leipzig: Teubner, 1883-1888. (Euclidis Opera Omnia, v. 1-4.)

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

HEATH, Thomas Little. **A History of Greek Mathematics**. Oxford: Clarendon Press, 1921. v. 1.

HEATH, Thomas Little. Introduction. In: EUCLIDES. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Tradução de Sir Thomas Little Heath. Cambridge: Cambridge University Press, 1908. v. 1. p. 1-151.

STRUIK, Dirk Jan. *História Concisa das Matemáticas*. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. 3. ed. Lisboa: Gradiva, 1989.

SZABÓ, Árpád. **The beginnings of Greek mathematics**. Tradução de A. M. Ungar. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1978.

WASCHKIES, Hans-Joachim. Introduction. In: CHRISTIANIDIS, Jean (ed.). **Classics in the History of Greek Mathematics**. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2004. p. 3-18.