

Explorando o Espaço de Regras Conservativas Binárias com Vizinhança de Moore

Felipe G. Rocha¹, Pedro Paulo Balbi^{1,2}

¹Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação

²Faculdade de Computação e Informática

Universidade Presbiteriana Mackenzie

Rua da Consolação 896, Consolação; 01302-907 São Paulo, SP – Brasil

felipegr6@gmail.com, pedrob@mackenzie.br

Abstract. *A subset of the number conserving rules of binary two-dimensional cellular automata of unit radius in Moore's neighbourhood is obtained. We relied on related concepts already described in the literature for von Neumann's neighbourhood and for the elementary space of cellular automata, while making the necessary extensions. In doing so, algorithms were used for the creation of traffic rules and for the creation of two-dimensional rules with Moore's neighbourhood of radius 1 derived from conservative one-dimensional rules with radius 4. All the constructed rules have been validated by implementing a known algorithm that establishes the presence of the conservation property of a rule. The approach is effective but the analysis of the constructed number conserving rules points at the necessity of developing further processes of rule construction.*

Resumo. *Foi obtido um subconjunto das regras conservativas (number conserving) de autômatos celulares bidimensionais binários de raio unitário em vizinhança de Moore. Baseou-se em conceitos relacionados já descritos na literatura para a vizinhança de von Neumann e para o espaço elementar dos autômatos celulares, realizando-se as extensões necessárias. Nesse sentido, algoritmos foram usados para a criação de regras de tráfego e de regras bidimensionais com a vizinhança de Moore de raio 1 derivadas de regras unidimensionais conservativas de raio 4. Todas as regras construídas foram validadas implementando-se um algoritmo existente que estabelece a presença da propriedade de conservação em uma regra. A abordagem é eficaz, mas a análise das regras construídas que preservam a conservação numérica apontam para a necessidade de desenvolver novos processos de construção de regras.*

1. Introdução

Autômatos celulares (ACs) são sistemas dinâmicos discretos, desenvolvidos originalmente para modelar sistemas autorreplicantes [Von Neumann et al. 1966]. Tratam-se de sistemas onde todas as interações são locais e usualmente simples, mas com poder de descrever comportamentos complexos; estruturam-se em um reticulado regular de células, cujos estados, em quantidade finita, são alterados de forma síncrona, a partir dos estados das células vizinhas [Wolfram 1994, Kari 2005]. Dependendo de como são definidos, podem possuir propriedades que ajudam a modelar fenômenos naturais, como leis de conservação de energia e massa [Pivato 2002], tal como fluxo discretizado de

fluidos [Boon 1991] e tráfego de carros [Nagel and Schreckenberg 1992], entre outros. Nesses casos, o que os modelos citados têm em comum é a noção de conservabilidade, onde alguma propriedade do estado global do sistema se mantém ao longo do tempo, como a conservabilidade numérica (*number conservation*), em que a soma dos estados na configuração inicial do AC permanece constante. Como a conservabilidade numérica é o foco deste trabalho, para simplificar nos referimos à essa propriedade simplesmente por conservabilidade.

Apesar de a noção de conservabilidade numérica em ACs ser um tema importante na área, os resultados já apresentados na literatura foram delimitados, majoritariamente, a espaços de regras unidimensionais, ou de regras bidimensionais com um tipo específico de vizinhança, a de *von Neumann*, em contraste com o tipo de vizinhança de interesse aqui, que é a vizinhança bidimensional de *Moore*, ambas as quais serão definidas posteriormente. Assim, por exemplo, em [Boccara and Fukš 1998] foi mostrado como determinar todas as regras conservativas no espaço unidimensional binário de raio $r = 1$ e em [Boccara and Fukš 2002] extrapolou-se para casos unidimensionais, k -ários de vizinhança de tamanho arbitrário. Em [Durand et al. 2003] descreveu-se a existência de três definições de conservabilidade (periódicas, finitas e infinitas) e provou-se a equivalência delas entre si. Também é demonstrado o que as regras devem respeitar para serem consideradas conservativas em dimensões $d > 1$ com vizinhança hiper-retangular. Em [Wolnik et al. 2017], foram apresentadas as condições necessárias e suficientes para que ACs de dimensões e de estados arbitrários em vizinhança de von Neumann sejam conservativos. Em [Wolnik and De Baets 2019a], foi provado que todos os ACs binários conservativos são intrinsecamente unidimensionais em vizinhança de von Neumann, independente de suas dimensões, isto é, sempre existirá $4d + 1$ regras conservativas, sendo elas a identidade, os deslocamentos e as regras de tráfego. Em [Wolnik and De Baets 2019b], foi mostrado um novo método de estudo de reversibilidade em ACs conservativos k -ários d -dimensionais com vizinhança de von Neumann, utilizando-se do método da decomposição de regras por divisão e perturbação (*split-and-perturbation decomposition*); nesse trabalho, o foco foi mostrar que ACs conservativos reversíveis ternários d -dimensionais não são suficientes para decretar a existência de ACs não triviais com as características citadas anteriormente.

O objetivo do presente estudo é realizar uma análise exploratória do espaço de regras conservativas de ACs bidimensionais binários em vizinhança de Moore de raio unitário, aplicando ferramentas e conceitos já estabelecidos sobre outros tipos de vizinhança, mas adaptando-as convenientemente de forma que se possa atingir um certo nível de exploração do espaço de interesse.

Este artigo se estrutura da seguinte forma. A Seção 2 expõe os conceitos que servirão de base para o entendimento do restante do artigo. A Seção 3 mostra como as regras conservativas do espaço elementar serviram de inspiração para construir regras conservativas do espaço restrito desta pesquisa. Já a Seção 4 sugere uma heurística para revelar regras conservativas no espaço bidimensional de vizinhança de Moore de raio unitário utilizando composição de regras unidimensionais. O artigo encerra com a Seção 5, fazendo uma crítica aos resultados obtidos e sugerindo possíveis complementos futuros.

2. Referencial Teórico

Esta seção apresenta os conceitos que sustentam a pesquisa, quais sejam, autômato celular (AC) e sua formalização matemática; conceito de vizinhança, principalmente em ACs bidimensionais; definição geral de conservabilidade e específica para vizinhança $m \times n$; equivalência dinâmica, seu significado e caracterização das operações em uma e duas dimensões; e, por fim, a noção de composição de regras unidimensionais.

2.1. Definições Básicas

Autômatos celulares são quádruplas do tipo (d, S, N, f) , onde d refere-se à dimensão espacial, com $d \geq 1$; S é o conjunto dos possíveis estados que as células podem assumir, com $S = \{0, 1, \dots, q-1\}$; $N = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ é o vetor de vizinhança de tamanho n , sendo que, para casos unidimensionais, $n = 2r + 1$, onde r é o raio desta vizinhança; e f é a função de transição de estado, também chamada de regra local, sendo $f : S^n \rightarrow S$ [Durand et al. 2003, Moreira 2003, Kari 2005].

Configuração $c : \mathbb{Z}^d \rightarrow S$ é uma função que mapeia o estado de todas as células em um passo de tempo t , e \mathcal{C} é o conjunto de todas as configurações possíveis para um determinado AC ($c \in \mathcal{C}$).

A função global F de um AC é dada por $F : S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$, ou seja, é a função que representa a mudança de estado de todas as células dado um passo de tempo t .

A representação temporal de uma função global f pode ser dada pelo número da regra R_f [Wolfram 1994], onde:

$$R_f = \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n} f(a_1, a_2, \dots, a_n) q^{q^{n-1}a_1 + q^{n-2}a_2 + \dots + q^0 a_n}, \quad R_f \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Segundo [Li and Packard 1990], se duas regras são as mesmas a menos do fato que a primeira tem uma transição de estados mapeia determinada vizinhança para um estado q e a segunda mapeia a mesma vizinhança para um estado $q \pm 1$, o espaço de regras é o conjunto de todas as regras que estão nesta condição, umas das outras. O espaço de regras dito *elementar* é formado pelas regras contidas em um espaço unidimensional onde $S = \{0, 1\}$ e $N = (-1, 0, 1)$, totalizando 256 regras. ACs cujas regras estão contidas neste espaço são denominados autômatos celulares elementares (ACEs) [Wolfram 1984].

Para espaços de regras d -dimensionais, $d > 1$, definem-se as vizinhanças:

- Vizinhança de Moore: composta pela célula a e pelas vizinhas a' , cuja distância de *Chebyshev* $d_C(a, a')$ é menor ou igual a r [Zaitsev 2017], sendo

$$d_C(a, a') = \max_i (|a'_i - a_i|), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2)$$

- Vizinhança de von Neumann: formada pela célula a e pelas vizinhas a' , cuja distância de *Manhattan* $d_M(a, a')$ é menor ou igual a r [Zaitsev 2017], sendo

$$d_M(a, a') = \sum_i (|a'_i - a_i|), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3)$$

2.2. Conservabilidade numérica

Representando-se a soma dos estados σ de uma determinada configuração c por

$$\sigma(c) = \sum_{(i,j) \in N} c_{i,j}, \quad (4)$$

um AC é conservativo se, e somente se [Boccaro and Fukś 2002, Moreira 2003, Schranko and De Oliveira 2011]:

$$\sigma(c) = \sigma(F(c)), \quad \forall c \in C. \quad (5)$$

Especificamente para vizinhanças hiper-retangulares, isto é, com dimensões $m \times n$, sendo $a_{1,1}$ a célula que mudará de estado no passo de tempo $t+1$, um AC é conservativo se, e somente se [Durand et al. 2003]:

$$f \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = a_{1,1} + g(1,2) + g(2,1) - g(1,1) - g(2,2), \quad m, n > 0 \quad (6)$$

onde

$$g(w, y) = \sum_{i=0}^{m-w} \sum_{j=0}^{n-y} f \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{(i-1+w) \times (j-1+y)} & & 0 \\ & & a_{w,y} & \dots & a_{w,n-j} \\ & & a_{w+1,y} & \dots & a_{w+1,n-j} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & a_{m-i,y} & \dots & a_{m-i,n-j} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Vale ressaltar que uma função f será conservativa se a igualdade na Equação 6 for mantida para todas as combinações em S de $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{m,n}$.

Conforme discutido em [Wolnik and De Baets 2019a], regras que seguem os comportamentos listados a seguir, tanto em ACs unidimensionais quanto em ACs bidimensionais com vizinhança de von Neumann binários, são conservativas:

- *Identidade*: o estado de cada célula a mantém-se a cada aplicação da regra local f .
- *Deslocamento (shift)*: o estado de cada célula a desloca-se para uma determinada célula vizinha a' , dada uma orientação possível restrita pela dimensionalidade do AC e de sua respectiva vizinhança, a cada passo de tempo t [Kari 2005].
- *Regra do tráfego*: modelo citado em [Nagel and Schreckenberg 1992], onde se reproduz a ideia de uma via de tráfego de carros circular, em que o estado da célula em $t+1$ depende se há *congestionamento* ou não em t .

No espaço elementar, os comportamentos citados são representados pelas regras 204 (identidade), 170 e 240 (deslocamentos, respectivamente, à esquerda e à direita), 184 e 226 (regras do tráfego, com o *carro* se deslocando, respectivamente, para a direita e para a esquerda), e cujas evoluções espaço-temporais são ilustradas na Figura 1.

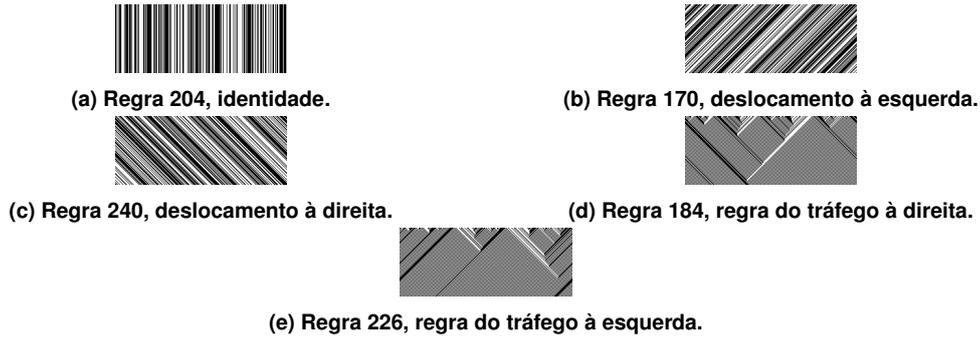


Figura 1. Evolução espaço-temporal das regras conservativas do espaço elementar de comprimento 250 e em 100 passos de tempo.

2.3. Equivalência Dinâmica

No espaço de regras elementares, uma regra possui equivalência dinâmica com uma outra do mesmo espaço, isto é, possuem configurações equivalentes entre si a menos de uma operação de reflexão (f_1), de conjugação (f_2), ou de composição das anteriores, em qualquer ordem (por exemplo, f_3 , na formalização abaixo, em que se representa a conjugação da reflexão) [Li and Packard 1990], se, e somente se, resultarem de uma das seguintes operações:

$$f_1(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) = f(a_{i+1}, a_i, a_{i-1}) \quad (8)$$

$$f_2(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) = f(\overline{a_{i-1}}, \overline{a_i}, \overline{a_{i+1}}) \quad (9)$$

$$f_3(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) = f(\overline{a_{i+1}}, \overline{a_i}, \overline{a_{i-1}}) \quad (10)$$

onde

$$\overline{a} = \begin{cases} 1, & \text{se } a = 0 \\ 0, & \text{se } a = 1 \end{cases} \quad (11)$$

No intuito de exemplificar as operações mencionadas anteriormente, tomará a regra elementar 110. Deste modo, a operação de reflexão resultará na regra elementar 124, a operação de conjugação terá como resultado a regra elementar 137 e a conjugação da reflexão, portanto, a reflexão da regra 124, resultará na regra 193 do espaço elementar. A Figura 2 mostra a evolução espaço-temporal da regra 110 e das suas respectivas equivalentes dinâmicas para uma mesma condição inicial aleatória, de comprimento 250 e em 250 passos de tempo.

Para ACs bidimensionais, as seguintes operações se definem: a *conjugação* (\bar{c}), idêntica ao caso unidimensional; a *reflexão* na horizontal (h); a *reflexão* na vertical (v); a *reflexão* na diagonal (d), para reticulados de tamanho $n \times n$; e as composições entre as operações anteriores [Freitas and Severino 2013]. Segundo [Freitas and Severino 2013], 15 transformações diferentes entre si podem ser definidas (conforme mostradas a seguir), já que algumas operações, como a reflexão na antidiagonal, podem ser obtidas através da composição das outras operações já citadas:

- 1 operação: \bar{c}, h, v, d ;
- 2 operações: $\bar{c} \circ h, \bar{c} \circ v, \bar{c} \circ d, h \circ v, h \circ d, v \circ d$;
- 3 operações: $\bar{c} \circ h \circ v, \bar{c} \circ h \circ d, \bar{c} \circ v \circ d, h \circ v \circ d$;
- 4 operações: $\bar{c} \circ h \circ v \circ d$

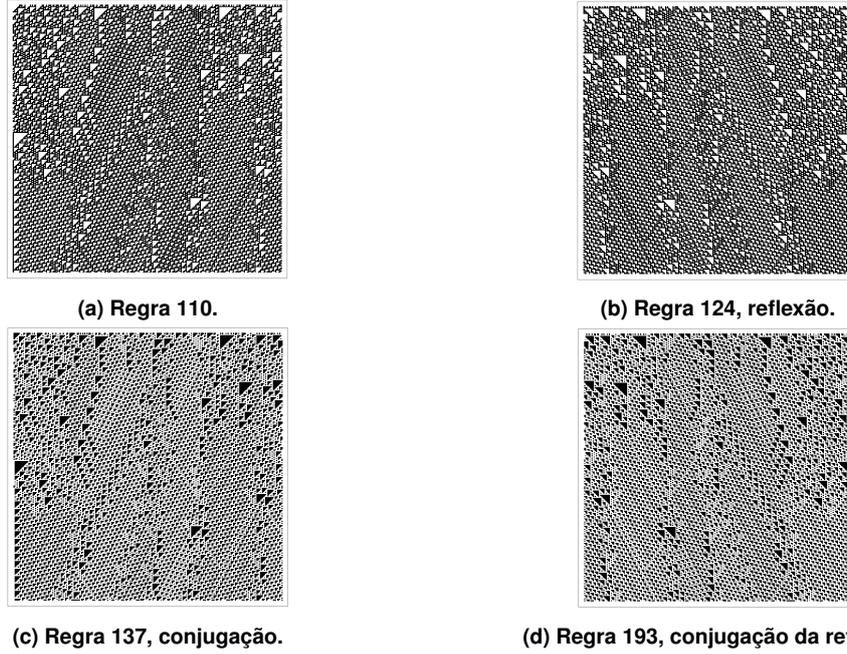


Figura 2. Evolução espaço-temporal da regra elementar 110 e das suas equivalentes dinâmicas de comprimento 250 e em 250 passos de tempo.

2.4. Composição de Regras

Uma regra f do espaço unidimensional e de raio r pode ser representada pela composição de duas funções, f_1 e f_2 , também do espaço unidimensional e de raios, respectivamente, r_1 e r_2 , como $f_1 \circ f_2$, tal que $r = r_1 + r_2$ [Schranko and De Oliveira 2011]. A expressão $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ é verdadeira se, e somente se, f_1 e f_2 forem bijetoras.

3. Semelhanças com ACEs

Esta sessão apresenta a formação de regras conservativas do espaço bidimensional em vizinhança de Moore de raio unitário que seguem os comportamentos apresentados na Seção 2.2: identidade, deslocamento e regra do tráfego. Discute-se também como a classe de equivalência dinâmica de uma regra conservativa obtida poderia sinalizar novas regras conservativas.

3.1. Identidade e Deslocamentos

Observando a representação binária das regras conservativas que possuem o comportamento de identidade e de deslocamento no espaço elementar e no espaço bidimensional de von Neumann, notou-se a existência de um padrão que pode ser aproveitado para o espaço delimitado por este estudo: a repetição de 2^x vezes do estado 1, seguida da mesma quantidade de 0s, repetindo este padrão por 2^{n-1-x} vezes, onde $0 \leq x \leq n - 1$.

Portanto, a representação R_f das regras que possuem comportamentos espaço-temporais de identidade e deslocamentos em vizinhança de Moore de raio unitário bidimensionais, na sua forma binária, é dada pela seguinte expressão regular:

$$R_f = (1^{2^x} 0^{2^x})^{2^{8-x}}, \quad 0 \leq x \leq 8, x \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Desta maneira, aplicou-se o enunciado pela Equação 12 e, para cada regra gerada, provou-se a sua conservabilidade, computacionalmente, através da Equação 6. Posteriormente sua dinâmica foi verificada e enumerada na Tabela 1.

Tabela 1. A expressão regular das regras conservativas bidimensionais em vizinhança de Moore de raio unitário e suas respectivas dinâmicas e sentidos.

Índice	Expressão Regular	Dinâmica	Sentido
0	$(1^1 0^1)^{256}$	Deslocamento	SE \rightarrow NW
1	$(1^2 0^2)^{128}$	Deslocamento	S \rightarrow N
2	$(1^4 0^4)^{64}$	Deslocamento	SW \rightarrow NE
3	$(1^8 0^8)^{32}$	Deslocamento	E \rightarrow W
4	$(1^{16} 0^{16})^{16}$	Identidade	-
5	$(1^{32} 0^{32})^8$	Deslocamento	W \rightarrow E
6	$(1^{64} 0^{64})^4$	Deslocamento	NE \rightarrow SW
7	$(1^{128} 0^{128})^2$	Deslocamento	N \rightarrow S
8	$(1^{256} 0^{256})^1$	Deslocamento	NW \rightarrow SE

3.2. Regra do Tráfego

Empregando a ideia das regras do tráfego do espaço elementar, os passos a seguir permitem efetuar a construção de regras no espaço de interesse:

1. Como a matriz vizinhança do espaço de regras bidimensionais de vizinhança de Moore $N_M = (a_{ij})_{i \times j}$, com $i = j = 3$, considere-se o vetor $N'_M = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})$ correspondente à matriz linearizada;
2. Para N_M , considere-se somente o estado das células de uma única coluna, linha ou diagonal, tomando-as na ordem de aparição em N'_M , e denotando-as, sucessivamente, como $N_R = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$, $N_R = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})$, $N_R = (a_{11}, a_{22}, a_{33})$ ou $N_R = (a_{13}, a_{22}, a_{31})$, com $i, j \in \{1, 2, 3\}$;
3. Para cada combinação de estados das células de N'_M , o resultado da função f que se deseja construir é o resultado da regra 184, representada por f_{184} (ou f_{226} , no caso da regra 226), em N_R ;
4. A representação da regra R_f é dada pelos resultados obtidos das combinações de N'_M .

Para exemplificar, considere-se a matriz vizinhança de Moore N_M de raio $r = 1$, com cada célula dessa matriz sendo representada por a_{ij} , $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$, ou seja:

$$N_M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Para cada combinação de vizinhança em N_M , considerem-se então somente os valores das células a_{21} , a_{22} e a_{23} na aplicação da regra local f_{184} para tornar-se o resultado da regra local f , isto é:

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}) = f_{184}(a_{21}, a_{22}, a_{23}). \quad (14)$$

Desta maneira, obtém-se uma transição de estado em vizinhança de Moore, cujo estado seguinte da célula de referência será o mesmo que o correspondente no ACE 184; a Tabela 2 exemplifica alguns casos. Por fim, o número da regra gerado corresponde à coluna da direita em base binária, sendo que o dígito mais significativo é a última entrada da tabela e o menos significativo, o primeiro.

Assim, a aplicação do algoritmo proposto resulta em 16 regras e após a execução computacional da Equação 6, provou-se que todas elas eram, de fato, conservativas. A Tabela 3 mostra, para cada uma delas, as células e as regras do tráfego consideradas.

Tabela 2. Trecho das transições consideradas para a montagem da regra do tráfego.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	Estado em $t + 1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
...
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
...
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 3. As células e as regras do tráfego do espaço elementar consideradas na composição de regras conservativas do espaço binário em vizinhança de Moore de raio unitário.

Índice	Células	ACE
9	a_{21}, a_{22}, a_{23}	f_{184}
10		f_{226}
11	a_{12}, a_{22}, a_{32}	f_{184}
12		f_{226}
13	a_{11}, a_{22}, a_{33}	f_{184}
14		f_{226}
15	a_{13}, a_{22}, a_{31}	f_{184}
16		f_{226}
17	a_{11}, a_{12}, a_{13}	f_{184}
18		f_{226}
19	a_{31}, a_{32}, a_{33}	f_{184}
20		f_{226}
21	a_{11}, a_{21}, a_{31}	f_{184}
22		f_{226}
23	a_{31}, a_{32}, a_{33}	f_{184}
24		f_{226}

3.3. Aplicação das Operações de Equivalência Dinâmica

Dadas as 25 regras previamente enumeradas nas Tabelas 1 e 3, as operações de equivalência dinâmica não revelaram novas regras; contudo, evidenciaram que as regras que representam a identidade e os deslocamentos relacionam-se entre si, mas não com as re-

gras do tráfego. Por exemplo, conforme se mostra na Tabela 4, a regra 7 não surge como resultado de nenhuma das operações de equivalência dinâmica das regras enumeradas de 9 a 24 (regras do tráfego) e a regra 15, por exemplo, não consta como resultado das operações citadas das regras de 0 a 8 (identidade e deslocamentos). A Tabela 4 explicita as 25 regras referidas e as operações que permitiram obtê-las.

Tabela 4. Regras conservativas e suas equivalentes dinâmicas.

Índice	Operações														
	\bar{c}	h	v	d	$\bar{c} \circ h$	$\bar{c} \circ v$	$\bar{c} \circ d$	$h \circ v$	$h \circ d$	$v \circ d$	$\bar{c} \circ h \circ v$	$\bar{c} \circ h \circ d$	$\bar{c} \circ v \circ d$	$h \circ v \circ d$	$\bar{c} \circ h \circ v \circ d$
0	0	2	6	0	2	6	0	8	6	2	8	6	2	8	8
1	1	1	7	3	1	7	3	7	3	5	7	3	5	5	5
2	2	0	8	6	0	8	6	6	0	8	6	0	8	2	2
3	3	5	3	1	5	3	1	5	7	1	5	7	1	7	7
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	3	5	7	3	5	7	3	1	7	3	1	7	1	1
6	6	8	0	2	8	0	2	2	8	0	2	8	0	6	6
7	7	7	1	5	7	1	5	1	5	3	1	5	3	3	3
8	8	6	2	8	6	2	8	0	2	6	0	2	6	0	0
9	10	9	10	11	10	9	12	10	11	12	9	12	11	12	11
10	9	10	9	12	9	10	11	9	12	11	10	11	12	11	12
11	12	12	11	9	11	12	10	12	10	9	11	9	10	10	9
12	11	11	12	10	12	11	9	11	9	10	12	10	9	9	10
13	14	15	16	13	16	15	14	14	16	15	13	15	16	14	13
14	13	16	15	14	15	16	13	13	15	16	14	16	15	13	14
15	16	13	14	16	14	13	15	16	13	14	15	14	13	15	16
16	15	14	13	15	13	14	16	15	14	13	16	13	14	16	15
17	18	18	19	21	17	20	22	20	22	24	19	21	23	23	24
18	17	17	20	22	18	19	21	19	21	23	20	22	24	24	23
19	20	20	17	24	19	18	23	18	23	21	17	24	22	22	21
20	19	19	18	23	20	17	24	17	24	22	18	23	21	21	22
21	22	24	22	17	23	21	18	23	19	18	24	20	17	20	19
22	21	23	21	18	24	22	17	24	20	17	23	19	18	19	20
23	24	22	24	20	21	23	19	21	18	19	22	17	20	17	18
24	23	21	23	19	22	24	20	22	17	20	21	18	19	18	17

4. Composição de Regras

Com o intuito de revelar novas regras bidimensionais, partiu-se da ideia de utilizar o conceito de composição de regras unidimensionais conservativas. Para tanto, observe-se que:

- Uma regra unidimensional conservativa f_4 , de raio $r = 4$, pode ser construída a partir de uma regra conservativa $f_{1.5}$, de raio $r' = 1.5$ e de outra $f_{2.5}$, de raio $r'' = 2.5$, ambas unidimensionais, através da operação $f_{1.5} \circ f_{2.5}$ ou $f_{2.5} \circ f_{1.5}$;
- O número de células da vizinhança de ACs unidimensionais de raio $r = 4$ é igual ao número de células em vizinhança de Moore de raio unitário em ACs bidimensionais;

- A vizinhança de Moore $N_{M_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ de raio unitário pode ser linearizada na representação $N'_{M_1} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})$.

Portanto, os seguintes passos podem ser empregados para a construção de regras bidimensionais de raio unitário em vizinhança de Moore:

1. Enumeram-se as regras conservativas do espaço unidimensional binário de raio $r' = 1.5$ (22 regras) e de raio $r'' = 2.5$ (133.184 regras);
2. Realizam-se as operações $f_{1.5} \circ f_{2.5}$ e $f_{2.5} \circ f_{1.5}$ para cada regra descrita anteriormente, obtendo-se as regras conservativas unidimensionais de raio $r = 4$;
3. Considera-se cada regra obtida como uma regra do espaço bidimensional binário de vizinhança de Moore e raio unitário e verifica-se sua conservabilidade;
4. Aplicam-se as operações de equivalência dinâmica em todas as regras conservativas.

A execução desses passos levou aos seguintes resultados:

- 2.869.768 regras únicas de raio $r = 4$ foram obtidas na operação $f_{1.5} \circ f_{2.5}$ e 2.181.482 regras únicas em $f_{2.5} \circ f_{1.5}$, sendo que há uma intersecção de 533.268 regras entre ambos os conjuntos;
- Das 4.517.982 regras, $(f_{1.5} \circ f_{2.5}) \cup (f_{2.5} \circ f_{1.5})$, considerando-as do espaço de regras Moore de raio unitário, apenas 157 são conservativas (as mesmas que, a propósito, se obtém pela verificação de conservabilidade diretamente das regras geradas por $f_{1.5} \circ f_{2.5}$ ou por $f_{2.5} \circ f_{1.5}$);
- As operações de equivalência dinâmica foram realizadas nas 157 regras previamente listadas e novas foram reveladas, totalizando, assim, 313 regras conservativas;
- As 25 regras a que nos referimos anteriormente (identidade, deslocamentos e regras do tráfego) estavam contidas nas 313 regras;
- Agrupando-se as 313 regras em suas classes de equivalência dinâmica, e tomando-se um representante de cada classe, obtém-se apenas 32 regras.

Vale observar que, ao realizar as operações acima, no ponto que tange à transformação de uma regra unidimensional de raio $r = 4$ para uma regra bidimensional de raio $r = 1$ e vice-versa, naturalmente perde-se informação, decorrente do fato de que as evoluções espaço-temporais nos dois casos são distintas. Portanto, todo o procedimento realizado relaxou alguns aspectos, que ainda necessitam de maior fundamentação, mas gerou resultados relevantes do ponto de vista prático.

5. Comentários finais

Explorar o espaço dos ACs bidimensionais binários com vizinhança de Moore de raio $r = 1$ é árduo, especialmente porque a análise de todas as regras do espaço é impraticável do ponto de vista computacional. Dessa forma, é necessária a utilização de técnicas heurísticas para que se possa encontrar, senão todas, um número significativo de regras conservativas do espaço, que possa permitir vislumbrar minimamente a estrutura do espaço de regras conservativas de Moore em raio 1, e, quem sabe, até possa fornecer indicativos sobre os espaços correspondentes de raios maiores. Utilizando-se de algoritmos verificadores e dos procedimentos descritos foi possível avançar nesta exploração.

Entretanto, ainda que animadores, os resultados que obtivemos demandam que se deva necessariamente ir além. Nesse sentido, vislumbramos uma extensão imediata do trabalho, qual seja, verificar os conceitos apresentados no artigo sobre a decomposição de regras por divisão e perturbação [Wolnik et al. 2019] e aplicá-los sob a ótica de vizinhança de Moore, extendendo o que lá foi realizado apenas para a vizinhança de von Neumann.

Uma vez cumprida essa etapa, vale ainda considerar adequar os conceitos de representação de deslocamento de partículas para o espaço bidimensional em vizinhança de Moore, conforme discutido em [Boccara and Fuk s 1998, Moreira et al. 2004, Kong et al. 2017, Kong et al. 2019].

Agradecimentos

Este trabalho se insere nos projetos de pesquisa da CAPES STIC-AmSud (CoDANet) no. 88881.197456/2018-01 e Mackenzie-PrInt no. 88887.310281/2018-00, e no projeto CNPq PQ 305199/2019-6.

Refer ncias

- Boccara, N. and Fuk s, H. (1998). Cellular automaton rules conserving the number of active sites. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 31(28):6007–6018.
- Boccara, N. and Fuk s, H. (2002). Number-conserving cellular automation rules. *Fundamenta Informaticae*, 52(1-3):1–13.
- Boon, J. P. (1991). Statistical mechanics and hydrodynamics of lattice gas automata: An overview. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 47(1-2):3–8.
- Durand, B., Formenti, E., and Roka, Z. (2003). Number-conserving cellular automata I: Decidability. *Theoretical Computer Science*, 299(1-3):523–535.
- Freitas, J. A. and Severino, R. (2013). 2D elementary cellular automata with four neighbors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(4).
- Kari, J. (2005). Theory of cellular automata: A survey. *Theoretical Computer Science*, 334(1-3):3–33.
- Kong, G., Imai, K., and Nakanishi, T. (2017). Hierarchical motion representation of 2-state number conserving cellular automata. In *2017 Fifth International Symposium on Computing and Networking*, pages 194–199.
- Kong, G.-T., Imai, K., and Nakanashi, T. (2019). A hierarchical structure in the motion representation of 2-state number-conserving cellular automata. *arXiv e-prints*, page arXiv:1910.08236.
- Li, W. and Packard, N. (1990). The structure of the elementary cellular automata rule space. *Complex Systems*, 4:281–297.
- Moreira, A. (2003). Universality and decidability of number-conserving cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 292(3):711–721.

- Moreira, A., Boccara, N., and Goles, E. (2004). On conservative and monotone one-dimensional cellular automata and their particle representation. *Theoretical Computer Science*, 325(2):285–316.
- Nagel, K. and Schreckenberg, M. (1992). A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de Physique I*, 2:2221–2229.
- Pivato, M. (2002). Conservation laws in cellular automata. *Nonlinearity*, 15(6):1781.
- Schranks, A. and De Oliveira, P. P. (2011). Derivation and representation of one-dimensional, reversible, number-conserving cellular automata rules. *Journal of Cellular Automata*, 6(1).
- Von Neumann, J., Burks, A. W., et al. (1966). Theory of self-reproducing automata. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5(1):3–14.
- Wolfram, S. (1984). Universality and complexity in cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 10(1-2):1–35.
- Wolfram, S. (1994). *Cellular Automata and Complexity*. Addison-Wesley.
- Wolnik, B. and De Baets, B. (2019a). All binary number-conserving cellular automata based on adjacent cells are intrinsically one-dimensional. *Phys. Rev. E*, 100:022126.
- Wolnik, B. and De Baets, B. (2019b). Ternary reversible number-conserving cellular automata are trivial. *Information Sciences*, 513:180–189.
- Wolnik, B., Dzedzej, A., Baetens, J. M., and De Baets, B. (2017). Number-conserving cellular automata with a von Neumann neighborhood of range one. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50:435101.
- Wolnik, B., Nenca, A., Baetens, J., and De Baets, B. (2019). A split-and-perturb decomposition of number-conserving cellular automata. *arXiv e-prints*, page arXiv:1901.05067.
- Zaitsev, D. A. (2017). A generalized neighborhood for cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 666:21–35.