

Parametrização ótima do método de Correlação de Fase para o Registro de Imagens

Lucas Eduardo Bertuol e Bruno Mussoi

Vertical de Mobilidade

Instituto Hercílio Randon

Caxias do Sul - RS, Brasil, 95070-560

Email: {lucas.bertuol ; bruno.mussoi}@ihr.tec.br

Guilherme Holsbach Costa

Programa de Pós-graduação em Computação Aplicada

Universidade de Caxias do Sul, Brasil, 95070-560

Email: ghcosta@ucs.br

Abstract—Phase correlation is a widely used and effective method for estimating translation, rotation, and scaling parameters between two images. This technique relies on a (log-)polar mapping of the coordinates of the images' magnitude spectra. However, the accuracy of the estimation strongly depends on the parameterization of this mapping. While it is well established that low angular resolutions lead to the loss of relevant information and impair registration performance, recent studies have shown that excessively high resolutions can also degrade performance due to spurious correlations introduced by interpolation. To address this issue, we propose a methodology for parameterizing the coordinate mapping that preserves the information contained in the Cartesian plane while minimizing factors that cause false correlations and unnecessary memory consumption. Beyond its direct application to phase correlation, the proposed approach has the potential to benefit any signal processing task that requires lossless discrete-to-discrete Cartesian-to-Polar mapping.

Abstract—A Correlação de Fase é um método eficaz para estimar parâmetros de movimentos de translação, rotação e reescala entre duas imagens. Para tanto, essa técnica utiliza um mapeamento (log-)polar das coordenadas dos espectros de magnitude das imagens. No entanto, a acurácia da estimação depende da parametrização desse mapeamento. Enquanto é evidente que baixas resoluções angulares provocam perda de informação relevante para o bom desempenho do registro, recentemente foi demonstrado que altas resoluções levam a perda de desempenho, em função de correlações espúrias causadas por interpolações. Em face disso, neste trabalho é proposta uma metodologia para parametrizar o mapeamento de coordenadas, garantindo a preservação da informação contida no plano cartesiano ao mesmo tempo que minimizando os fatores que geram falsas correlações e o consumo de memória. Além da contribuição para a Correlação de Fase, o método proposto neste trabalho potencialmente contribui com todo processamento de sinais que dependa de um mapeamento cartesiano-polar discreto-discreto sem perda de informação.

I. INTRODUÇÃO

O registro de imagens consiste em realizar o alinhamento de imagens de uma mesma cena [1], que podem ter sido capturadas em momentos diferentes, de pontos de vista diferentes e/ou por câmeras diferentes. Ele é amplamente utilizado em sensoriamento remoto, imagens médicas, super-resolução e visão computacional [1].

Os métodos de registro baseados no domínio da frequência se destacam devido a robustez a variações de intensidade entre

as imagens que estão sendo registradas e à eficiência computacional. Pioneiro nessa abordagem, o método da Correlação de Fase [2] é fundamentado no Teorema do Deslocamento de Fourier (*Fourier Shift Theorem*) e foi originalmente proposto para o alinhamento de imagens transladadas entre si. Posteriormente, uma extensão do método de Correlação de Fase foi introduzida para compreender, além da translação, transformações geométricas de rotação [3]. Mais adiante, o método foi evoluído para abarcar também diferenças de escala (*zoom*) entre as imagens [4]. Essa evolução do método é baseada em uma combinação do mapeamento log-polar da magnitude do espectro das imagens e a Correlação de Fase. A proposta de [4] é consideravelmente mais eficiente em termos de custo computacional que o método proposto em [3]. Por esse motivo, o método em [4] é amplamente adotado como base em técnicas de registro de imagens que utilizam a transformada de Fourier [5].

Na revisão da literatura apresentada em [5] é possível observar uma cronologia da evolução do método de Correlação de Fase. Os fatores que degradam o desempenho da estimativa da rotação pelo método [4] foram investigados em [6], onde o *aliasing* dependente de rotação foi apontado como um dos principais fatores que prejudicam esse desempenho, criando correlações falsas em múltiplos de 90° . Esse problema foi aparentemente contornado em [4], pré-processando-se as imagens por um filtro passa-altas. Essa filtragem é ignorada em [6], onde é proposto remover as baixas frequências e janelar a imagem para reduzir o espalhamento espectral, alegando melhoria de desempenho. Trabalhos subsequentes sugerem que o problema das falsas correlações tem origem na interpolação demandada pelo mapeamento cartesiano-(log-)polar. Entretanto, apenas em [7] é demonstrada a razão das falsas correlações em múltiplos de 90° , como função das interpolações, e que, portanto, elas não advêm propriamente do espalhamento espectral ou do *aliasing* de rotação. Apesar do trabalho se dedicar a identificar a causa desse problema, nenhuma solução é apontada em [7].

Neste trabalho, levando em consideração o problema do mapeamento cartesiano-polar analisado em [7], é proposta uma abordagem ótima, do ponto de vista de consumo de memória, preservando-se a informação dos sinais envolvidos, para determinar os parâmetros de discretização usados no ma-

peamento. Essa solução não só reduz o consumo de memória como também reduz o fator que causa as correlações espúrias reportado em [7].

O trabalho está organizado como se segue. Na Seção II são apresentados os fundamentos do registro de imagens por Correlação de Fase, sendo destacado o problema do mapeamento de coordenadas intrínseco a esse método. Na Seção III é apresentado o método proposto. Na Seção IV são apresentados os detalhes de implementação e resultados. Por fim, na Seção V são apresentadas as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

II. O REGISTRO DE IMAGENS POR CORRELAÇÃO DE FASE

O método de Correlação de Fase é baseado no Teorema do Deslocamento de Fourier e foi originalmente proposto para o registro de imagens transladadas [2]. Sejam \mathbf{F} e \mathbf{G} duas imagens digitais com seus respectivos elementos definidos por $f(x, y)$ e $g(x, y)$, em que o par ordenado (x, y) corresponde ao par de coordenadas dos elementos (*pixels*) na imagem, e que \mathbf{G} seja uma versão transladada de \mathbf{F} dada por

$$g(x, y) = f(x + x_0, y + y_0), \quad (1)$$

no qual x_0 e y_0 são o deslocamento no sentido das colunas e linhas, respectivamente. Aplicando-se a transformada de Fourier em ambos os lados de (1), seguindo a propriedade do deslocamento, tem-se que

$$\tilde{g}(\xi, \eta) = e^{j2\pi(x_0\xi + y_0\eta)} \tilde{f}(\xi, \eta), \quad (2)$$

em que ξ e η correspondem às componentes de frequência no domínio transformado e $\tilde{f}(\cdot, \cdot)$ e $\tilde{g}(\cdot, \cdot)$ correspondem aos elementos das transformadas de \mathbf{F} e de \mathbf{G} , respectivamente. Por meio de (2) consegue-se determinar o deslocamento relativo x_0 e y_0 isolando-se a exponencial. Entretanto, isso recai em uma abordagem determinística, conhecida como *deconvolução* [7], pouco robusta para o processamento de sinais aleatórios.

De outra forma, o método de Correlação de Fase proposto em [2] leva ao espectro de potência cruzada normalizado, uma ferramenta estatística mais robusta a condições reais de aplicação, dado por

$$\frac{\tilde{f}(\xi, \eta) \tilde{g}^*(\xi, \eta)}{|\tilde{f}(\xi, \eta) \tilde{g}^*(\xi, \eta)|} = e^{-j2\pi(x_0\xi + y_0\eta)}, \quad (3)$$

em que $\tilde{g}^*(\xi, \eta)$ é o complexo conjugado de $\tilde{g}(\xi, \eta)$.

Quando o movimento entre as imagens a serem registradas, além de uma translação, contém uma rotação, também é possível realizar a estimação de movimento com base na propriedade do deslocamento [4]. Considerando-se então duas imagens digitais \mathbf{F} e \mathbf{G} , sendo que \mathbf{G} é uma versão transladada e rotacionada de \mathbf{F} , determina-se os elementos de \mathbf{G} a partir das transformações de coordenadas:

$$g(x, y) = f(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 - x_0, -x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 - y_0), \quad (4)$$

em que θ_0 corresponde ao deslocamento angular. Os elementos das transformadas de \mathbf{F} e \mathbf{G} são relacionados por

$$\tilde{g}(\xi, \eta) = e^{-j2\pi(x_0\xi + y_0\eta)} \times \tilde{f}(\xi \cos \theta_0 + \eta \sin \theta_0, -\xi \sin \theta_0 + \eta \cos \theta_0). \quad (5)$$

Em concordância com o discutido acerca de (2), o deslocamento espacial (x_0, y_0) resulta no termo $e^{-j2\pi(x_0\xi + y_0\eta)}$, ou seja, em uma alteração de fase. Segue direto de (5) que os efeitos da rotação podem ser obtidos isoladamente no espectro de magnitude, conforme

$$|\tilde{g}(\xi, \eta)| = |\tilde{f}(\xi \cos \theta_0 + \eta \sin \theta_0, -\xi \sin \theta_0 + \eta \cos \theta_0)|, \quad (6)$$

de onde é possível notar que as magnitudes dos espectros são iguais, embora sejam versões espacialmente rotacionadas uma em relação à outra [4]. Todavia, note-se que o movimento de rotação entre os sinais em (6), representados em um sistema de coordenadas cartesiano, pode ser convertido em um movimento translacional em um sistema de referência polar, sendo

$$M_f(\rho, \theta) = M_g(\rho, \theta - \theta_0), \quad (7)$$

em que $M_f(\cdot, \cdot) = |\tilde{f}(\cdot, \cdot)|$, $M_g(\cdot, \cdot) = |\tilde{g}(\cdot, \cdot)|$, ρ e θ correspondem às coordenadas de módulo e ângulo, respectivamente, no sistema de coordenadas polares. A partir da aplicação da Correlação de Fase sobre (7), a estimativa do ângulo de rotação θ_0 pode ser encontrada.

A. O Problema do Mapeamento

Conforme discutido em [7], a conversão de coordenadas que leva a (7) provoca um problema de amostragem. Por exemplo, a primeira linha do plano polar se relaciona apenas com o elemento central do plano cartesiano (módulo zero), tendo, portanto, todos os seus valores idênticos. A segunda linha do plano polar se relaciona, na melhor hipótese, com os oito elementos vizinhos do elemento central do plano cartesiano, sendo eles, portanto, superamostrados de acordo com a resolução angular adotada no plano polar.

De maneira mais formal, esse mapeamento consiste na transformação das coordenadas de um plano cartesiano discreto \mathcal{C} , $(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}^2$, para coordenadas de um plano polar também discreto, \mathcal{P} , $(\rho, \theta) \in \mathbb{Z}^2$, dado por

$$(\rho, \theta) = T(\xi, \eta), \quad (8)$$

em que $T(\cdot)$ indica a função de transformação. Entretanto, determinar (8) para cada coordenada (ξ, η) de \mathcal{C} tipicamente proporciona valores $(\rho, \theta) \notin \mathbb{Z}^2$. Para contornar isso, a solução mais simples é fazer o arredondamento das coordenadas (ρ, θ) para o inteiro mais próximo, mas isso não garante que cada coordenada (ρ, θ) de \mathcal{P} receba um valor proveniente do plano \mathcal{C} . Uma prática comum para evitar isso é realizar o *mapeamento inverso*

$$(\xi, \eta) = T^{-1}(\rho, \theta). \quad (9)$$

Dessa forma, para cada elemento (ρ, θ) de \mathcal{P} , a coordenada correspondente (ξ, η) de \mathcal{C} é determinada e, quando $(\xi, \eta) \notin \mathbb{Z}^2$, as coordenadas (ξ, η) são arredondadas para o inteiro mais próximo. Este mapeamento, então, garante que um valor de \mathcal{C} seja atribuído para todo elemento de \mathcal{P} .

Na Figura 1a é apresentada a ilustração de um espectro de magnitude e na Figura 1b é apresentada a transformação desse espectro para o plano polar utilizando (9). As regiões que

aparecem na cor preta na Figura 1b correspondem às regiões de \mathcal{P} que estão fora do domínio dos elementos no plano \mathcal{C} . Essas regiões são estáticas perante uma translação no sinal em \mathcal{P} , que resulta de uma rotação do sinal em \mathcal{C} . Sendo estáticas, caso fossem consideradas para a estimação dos parâmetros de rotação, contribuiriam substancialmente para um desempenho insatisfatório da Correlação de Fase, isto é, resultariam muitas vezes na estimativa de um deslocamento nulo, que representa a ausência de rotação em \mathcal{C} . O problema é mostrado na Figura 2, onde na Figura 2a é mostrada uma versão rotacionada da Figura 1a e na Figura 2b é mostrado o mapeamento da Figura 2a para o plano polar. Embora as regiões de cor cinza claro na Figura 2b tenham sofrido uma translação em relação às da Figura 1b, as regiões pretas permaneceram na mesma posição em ambas as imagens. Considerando-se que a Transformada Discreta de Fourier lida com sinais periódicos, essas regiões estáticas podem inclusive causar estimativas incorretas de 90° , 180° , ou 270° .

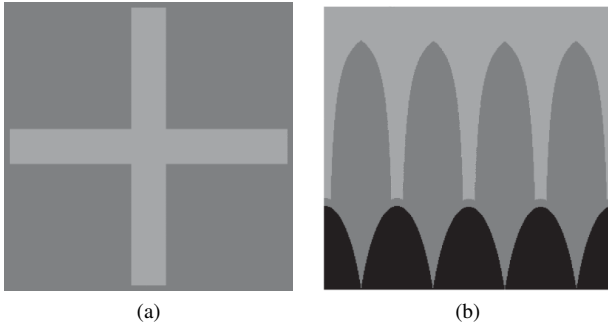


Fig. 1. (a) Ilustração de um espectro de magnitude representado no plano cartesiano. (b) O espectro (a) representado no plano polar, utilizando o *mapeamento inverso*. Adaptado de [7].

Mesmo desconsiderando-se as regiões estáticas, ainda há o problema da superamostragem na conversão cartesiano-polar, que provoca um padrão de comportamento dos elementos de \mathcal{P} . Para verificar-se esse efeito, é avaliada a transformação para o plano polar através do *mapeamento direto*. A Figura 3 mostra o mapeamento da imagem na Figura 1a para o plano polar por meio de (8). No topo da imagem na Figura 3 é possível notar uma malha de pontos pretos. Esses elementos, que não têm correspondência (ξ, η) atribuída pelo *mapeamento direto*, são aqueles cujas intensidades terão valores fortemente correlacionados com seus vizinhos (com correspondência) no *mapeamento inverso*.

A malha de pontos pretos está localizada na área onde estão mapeadas as baixas frequências do espectro de Fourier. A região de baixa frequência do espectro vai, portanto, produzir valores altos de correlação, mesmo para imagens com conteúdos diferentes. Essas correlações, fruto das características do mapeamento, são a razão para as estimativas errôneas de deslocamentos em múltiplos de 90° , reportadas em [6].

Uma solução possível para esse problema seria ignorar as linhas superiores do plano polar, assim como as linhas

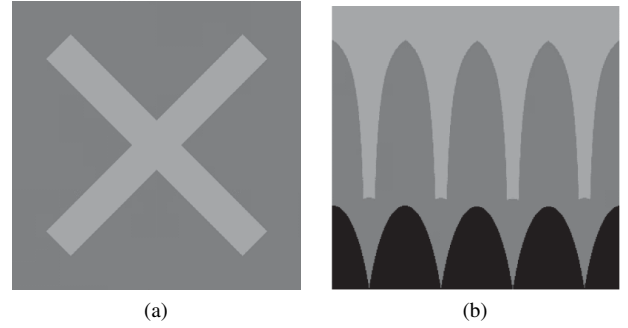


Fig. 2. (a) Ilustração de um espectro (rotacionado) de magnitude representado no plano plano cartesiano. (b) O espectro (a) representado no plano polar utilizando o *mapeamento inverso*. Adaptado de [7].

inferiores. Além disso, pode-se realizar uma filtragem passa-altas como sugere [4]. Entretanto, as baixas frequências podem conter informações importantes para um registro acurado e desprezar essa parte do espectro pode causar substancial perda de robustez no método de Correlação de Fase.

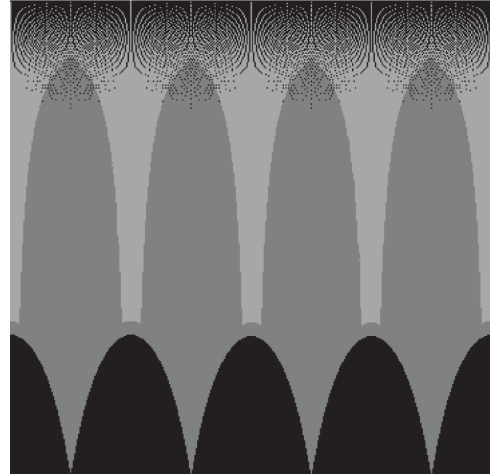


Fig. 3. Exemplo de conversão cartesiano-polar utilizando *mapeamento direto*. Adaptado de [7].

III. MÉTODO PROPOSTO

A conversão de coordenadas cartesianas para (log-)polares necessita a alocação de um espaço de memória *a priori*. Para isso, as resoluções do módulo e do ângulo devem ser previamente definidas, levando em conta que essas escolhas impactam o consumo de memória, o custo computacional e a acurácia da estimativa do ângulo. A seleção de um período de amostragem no sentido das linhas (associado à resolução do módulo) e no sentido das colunas (associado à resolução angular) relativamente grande pode causar a perda da informação, enquanto valores pequenos aumentam o número de elementos interpolados no plano polar, possivelmente reduzindo o desempenho do estimador. O desenvolvimento que se segue, por questões didáticas, aborda o caso cartesiano-polar (que contempla o registro de imagens transladadas e rotacionadas), mas pode ser aplicado de

forma equivalente ao caso cartesiano-log-polar, que contempla também transformações de reescala.

Conforme discutido, a transformação de coordenadas, dada por

$$\theta = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) \quad (10)$$

e

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad (11)$$

em que $(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}^2$, leva a $(\rho, \theta) \notin \mathbb{Z}^2$. Para que não haja perda de informação ao discretizar-se as variáveis (ξ, η) , ou seja, para que dois elementos do plano cartesiano não sejam mapeados para um mesmo elemento do plano polar é suficiente estabelecer que o período de amostragem espacial $\Delta = [\Delta_\rho \ \Delta_\theta]$ seja menor, em qualquer dimensão, que a menor distância entre dois pontos quaisquer $\mathbf{p}_k = [\rho_k \ \theta_k]$ e $\mathbf{p}_l = [\rho_l \ \theta_l]$, dada por

$$d(l, k) = \sqrt{(\rho_k - \rho_l)^2 + (\theta_k - \theta_l)^2}. \quad (12)$$

Para tanto, sendo a discretização espacial uniforme e retangular, precisa-se garantir que a diagonal do período de amostragem, d_s , atenda a

$$d_s = \sqrt{\Delta_\rho^2 + \Delta_\theta^2} < d_{\min}, \quad (13)$$

em que

$$d_{\min} = \min d(l, k) \quad \forall \quad l \neq k. \quad (14)$$

Sendo que o domínio a ser mapeado é fixo, ou seja, $0 \leq \theta \leq \Theta$, em que $\Theta = 180^\circ$ dada a propriedade de simetria do espectro de magnitude, e $0 \leq \rho \leq P$, em que P é definido pela resolução das imagens sob registro, a área do plano cartesiano (contínuo) a ser mapeado corresponde a

$$A = P\Theta. \quad (15)$$

Minimizar o consumo de memória alocada para o plano polar significa minimizar o número de elementos necessários para a discretização do domínio A . Para tanto, busca-se maximizar a área de cada elemento, Δ ,

$$A_\Delta = \Delta_\rho \Delta_\theta, \quad (16)$$

respeitando a condição em (13).

Segue direto da igualdade em (13) que

$$\Delta_\rho = \sqrt{d_s^2 - \Delta_\theta^2}. \quad (17)$$

Substituindo-se (17) em (16), tem-se que

$$A_\Delta = \Delta_\theta \sqrt{d_s^2 - \Delta_\theta^2}. \quad (18)$$

Derivando-se (18) em relação a Δ_θ e igualando-se o resultado a zero, chega-se em

$$\frac{-2\Delta_\theta^2 + d_s^2}{\sqrt{d_s^2 - \Delta_\theta^2}} = 0, \quad (19)$$

o que resulta em um valor ótimo para Δ_θ de

$$\Delta_{\theta_o} = \frac{d_s \sqrt{2}}{2}. \quad (20)$$

Substituindo-se (20) em (17), tem-se que

$$\Delta_{\rho_o} = \Delta_{\theta_o}. \quad (21)$$

Conclui-se a partir do exposto que a discretização do plano polar deve ser feita com elementos quadrados, com dimensões $(d_s 0,5\sqrt{2} \times d_s 0,5\sqrt{2})$, em que $d_s < d_{\min}$.

IV. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nas simulações que se seguem, d_{\min} foi determinada numericamente. Os parâmetros avaliados foram: d_{\min} , período de amostragem ótimo $\Delta_o = [\Delta_{\rho_o} \ \Delta_{\theta_o}]$ e número M de elementos resultante da discretização do plano polar (consumo de memória). Esses parâmetros foram avaliados assumindo imagens quadradas, sem perda de generalidade, com $N \times N$ pixels, sendo N ímpar, e considerando-se cinco valores distintos para N . Em todas as simulações foi verificada a preservação de 100% da informação no processo de mapeamento (nenhum elemento do plano cartesiano foi sobreposto a outro no plano polar).

Na Tabela I e na Tabela II são apresentados os parâmetros obtidos, como uma função de N . A Tabela I considera a conversão cartesiano-polar com unidade de medida angular dada em radianos, enquanto a Tabela II em graus. Comparando-se a coluna M dessas tabelas, fica evidente que um mapeamento com escala em graus requer uma alocação de memória consideravelmente menor (de uma a duas ordens de grandeza, para os valores avaliados) que um mapeamento em radianos. Para imagens de dimensões 1001×1001 , por exemplo, um mapeamento em radianos necessita de aproximadamente 7 GB de memória para alocação do plano polar, enquanto um mapeamento em graus demanda aproximadamente 150 MB, considerando que cada elemento do mapa é representado por uma palavra do tipo *double*.

TABELA I
PARÂMETROS OBTIDOS CONSIDERANDO A CONVERSÃO
CARTESIANO-POLAR COM UNIDADE DE MEDIDA ANGULAR DADA EM
RADIANOS

$N \times N$	d_{\min}	$\Delta_\rho = \Delta_\theta$	M
101×101	0,022	0,016	$8,903 \times 10^5$
201×201	0,011	0,008	$7,121 \times 10^6$
501×501	0,004	0,003	$1,111 \times 10^8$
1001×1001	0,002	0,002	$8,886 \times 10^8$

TABELA II
PARÂMETROS OBTIDOS CONSIDERANDO A CONVERSÃO
CARTESIANO-POLAR COM UNIDADE DE MEDIDA ANGULAR DADA EM
GRAUS

$N \times N$	d_{\min}	$\Delta_\rho = \Delta_\theta$	M
101×101	0,911	0,644	31.080
201×201	0,573	0,405	$1,562 \times 10^5$
501×501	0,229	0,162	$2,425 \times 10^6$
1001×1001	0,115	0,081	$1,939 \times 10^7$

Assumindo-se valores de $\Delta_\rho = |\rho_k - \rho_l|$ e $\Delta_\theta = |\theta_k - \theta_l|$, em que k e l correspondem aos pontos mais próximos do

plano polar, desconsiderando-se a maximização proposta, já assumindo a unidade angular mais conveniente (graus), o consumo de memória fica consideravelmente maior, como pode ser visto na Tabela III. Neste caso, para imagens com dimensão de 1001×1001 pixels, o consumo de memória chega a 8 GB, cerca de duas ordens de grandeza maior que com a otimização proposta.

TABELA III
PARÂMETROS OBTIDOS CONSIDERANDO A CONVERSÃO
CARTESIANO-POLAR COM UNIDADE DE MEDIDA ANGULAR DADA EM
GRAUS, DESCONSIDERANDO-SE A OTIMIZAÇÃO PROPOSTA

$N \times N$	d_{\min}	Δ_ρ	Δ_θ	M
101×101	0,911	0,704	0,579	31.824
201×201	0,573	0,005	0,573	$8,910 \times 10^6$
501×501	0,229	0,002	0,229	$1,390 \times 10^8$
1001×1001	0,115	0,001	0,115	$1,111 \times 10^9$

A posição dos dois elementos do plano cartesiano cujo mapeamento para o plano polar está associado à menor distância d_{\min} é apresentada na Tabela IV, para os diferentes valores de N . Nota-se, a partir dessa tabela, que esses pontos encontram-se sempre o mais distante possível do centro do espectro. Com exceção da simulação para dimensões de 101×101 , que tem um dos pontos a 45° e outro imediatamente abaixo, todas as demais dimensões avaliadas têm um dos pontos a 0° e o outro imediatamente acima. Isso sugere que para imagens quadradas com dimensões igual ou maiores que 201×201 , os dois pontos necessários para determinar d_{\min} são $(0, (N-1)/2)$ e $(1, (N-1)/2)$.

TABELA IV
COORDENADAS CARTESIANAS DISCRETAS QUE PROPORCIONAM
ENCONTRAR A MENOR DISTÂNCIA DE MAPEAMENTO NO PLANO POLAR

$N \times N$	ξ_k	η_k	ξ_l	η_l
101×101	50	49	50	50
201×201	100	0	100	1
501×501	250	0	250	1
1001×1001	500	0	500	1

V. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi proposto um método de parametrização ótima para o registro por Correlação de Fase que agrega como principais contribuições:

- 1) Garante-se que toda a informação presente nos espectros seja preservada após a conversão cartesiano-(log-)polar;
- 2) Restrito à preservação da informação, minimiza-se o consumo de memória;
- 3) Com a otimização do número de elementos do plano (log-)polar, reduzem-se as interpolações necessárias, que causam as falsas correlações, conforme abordado em [7];
- 4) Foi mostrado que, realizando o mapeamento em graus, em vez de radianos, é possível reduzir o consumo de memória.

Por fim, ultrapassando a contribuição para o método de Correlação de Fase, a parametrização proposta potencialmente contribui com todo processamento de sinais que dependa de um mapeamento cartesiano-polar discreto-discreto sem perda de informação.

Como trabalhos futuros, aponta-se as seguintes necessidades:

- Demonstração analítica de que o a parametrização proposta leva a um ponto de máximo;
- Determinação analítica das coordenadas do plano cartesiano que resultam nos pontos mais próximos nos planos polar e log-polar;
- Avaliar os efeitos da discretização (arredondamento de coordenadas) quando o período de amostragem foi maior que o ótimo;
- Avaliação do impacto da parametrização proposta no desempenho do método de Correlação de Fase, com relação às falsas estimativas causadas pelas interpolações.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Instituto Hercílio Randon (IHR) e ao CNPq (processo 302828/2023-0), pelo suporte financeiro a esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] B. Zitová and J. Flusser, "Image registration methods: a survey," *Image and Vision Computing*, vol. 21, no. 11, pp. 977–1000, 2003. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0262885603001379>
- [2] C. D. Kuglin and D. C. Hines, "The phase correlation image alignment method," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Cybernetics and Society*, New York, NY, USA, 1975, pp. 163–165.
- [3] E. De Castro and C. Morandi, "Registration of translated and rotated images using finite fourier transforms," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. PAMI-9, no. 5, pp. 700–703, 1987.
- [4] B. Reddy and B. Chatterji, "An fft-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 5, no. 8, pp. 1266–1271, 1996.
- [5] X. Tong, Z. Ye, Y. Xu, S. Gao, H. Xie, Q. Du, S. Liu, X. Xu, S. Liu, K. Luan, and U. Stilla, "Image registration with fourier-based image correlation: A comprehensive review of developments and applications," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 12, no. 10, pp. 4062–4081, 2019.
- [6] H. S. Stone, B. Tao, and M. McGuire, "Analysis of image registration noise due to rotationally dependent aliasing," *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 14, no. 2, pp. 114–135, 2003. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1047320303000026>
- [7] G. de Camargo and G. H. Costa, "The unnoticed mapping problem in phase correlation image registration," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 20, pp. 1–5, 2023.