Desunificação Nominal via Ponto Fixo

Leonardo Batista[1], Daniele Nantes-Sobrinho[1]

[1]Departamento de Matemática – Universidade de Brasília (UnB)
Brasília- Brasil

L.M.Batista@mat.unb.br, dnantes@unb.br

Abstract. *This is a work-in-progress about solving equations and disequations between nominal terms, called the* nominal disunification problem. *Instead of using the standard nominal techniques that use freshness constraints (i.e., expressions of the form $a\#t$ that means "atom a is fresh for the nominal term t") to implement α-equivalence, we follow an alternative approach that involves fixed-point equations, that is, equations of the form $\pi \cdot t \approx_{\alpha}^{?} t$, where t is a nominal term and π is a permutation. This approach will be convenient for future extensions of the problem involving equational theories.*

Resumo. *Este é um trabalho em andamento sobre a resolução de equações e diferenças entre termos nominais, chamado de* problema de desunificação nominal. *Ao invés de usarmos as técnicas nominais padrões que envolvem restrições de freshness (i.e., expressões da forma $a\#t$ que significa "o átomo a não ocorre livre em t") para implementar α-equivalência, seguiremos uma abordagem alternativa que envolve equações de ponto fixo, i.e., equações da forma $\pi \cdot t \approx_{\alpha}^{?} t$, onde t é um termo nominal e π uma permutação. Essa abordagem será conveniente a futuras extensões do problema envolvendo teorias equacionais.*

1. Introdução

Este trabalho trata do problema de resolver equações ($s \approx_{\alpha}^{?} t$) e diferenças/disequações ($s \not\approx_{\alpha} t$) entre termos nominais, conhecido como o problema da *desunificação nominal* [Ayala-Rincón et al. 2020b], que tem a forma $\langle s \approx_{\alpha}^{?} t, u \not\approx_{\alpha}^{?} v\rangle$, e consiste em decidir se existe uma substituição σ tal que $s\sigma \approx_{\alpha} t\sigma$ mas $u\sigma \not\approx_{\alpha} v\sigma$. Por exemplo, a substituição $\sigma = \{Z \mapsto \mathsf{f}(W)\}$ é uma solução para o problema de desunificação nominal $\langle \forall x P(x, Z) \approx_{\alpha}^{?} \forall y P(y, \mathsf{f}(W)), \exists x \mathsf{f}(x) \not\approx_{\alpha}^{?} \mathsf{f}(Z)\rangle$, onde f é um símbolo de função unário, P é um predicado binário, x, y são variáveis ligadas e Z, W são variáveis livres. Basta observar que trocando Z por $\mathsf{f}(W)$ faz os dois lados da equação iguais (módulo renomeamento das variáveis ligadas), e $\exists x \mathsf{f}(x) \not\approx_{\alpha} \mathsf{f}(\mathsf{f}(W))$.

Técnicas nominais são úteis para o tratamento de linguagens que envolvem ligadores [Gabbay and Pitts 2002]. Nessa abordagem, ligações são implementadas através da abstração de átomos, e o renomeamento deles, através de permutações. Para isto, são considerados os predicados de *freshness* (que tem a forma $a\#t$) e α-equivalência (que tem a forma $s \approx_{\alpha} t$). Intuitivamente, $a\#t$ significa que o átomo a não pode ocorrer livre no termo t. Este conceito foi formalizado em [Pitts 2013] utilizando o quantificador *new* (N) que, na lógica nominal quantifica sobre nomes novos. Tal formalização é expressa pela seguinte sentença: $a\#x \Leftrightarrow (\mathsf{N}a')(a\ a') \cdot x = x$, isto é, a ocorre ligado em x se, e somente se, para qualquer átomo novo a', a permutação $(a\ a')$ fixa x. Por exemplo, considere a fórmula $\phi = \forall a P(a)$. Nesse caso, a é uma variável que ocorre ligada pelo quantificador $\forall$, portanto $a\#\phi$, o que equivale a dizer que o renomeamento de a por uma variável nova ainda preserva ϕ, ou seja, $(\text{И}a')(a\ a') \cdot \phi(a) \approx_\alpha \phi(a)$.

Em [Ayala-Rincón et al. 2020a] foi proposta uma nova axiomatização para a relação de α-equivalência em termos nominais utilizando pontos fixos, isto é, expressões da forma $\pi \cdot t \overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha t$ (lê-se: "a permutação π fixa o termo t"). Ou seja, ao invés de utilizarmos os predicado de *freshness* que absorve o ponto fixo, exploramos esta última propriedade, e tratamos de uma linguagem puramente equacional. Em unificação nominal o uso da relação de *freshness* e de ponto fixo coincidem, mas é na presença de teorias equacionais que essas abordagens se diferem, e o método via ponto fixo se destaca.

Observamos o caso $\approx_{\alpha,\mathsf{C}}$ (α-equivalência módulo comutatividade): por exemplo, uma equação do tipo $(a\ b) \cdot X \approx^?_{\alpha,\mathsf{C}} X$, usando a abordagem usual de *freshness*, teria uma solução $\langle a, b\#X, \sigma\rangle$ (qualquer substituição σ desde que a, b não ocorram livres em $X\sigma$)[Urban et al. 2004]. Observe que as substituições $\{X \mapsto \mathsf{f}(e)\}, \{X \mapsto \forall a(P(a) \vee Q(a))\}, \ldots$ são soluções, no entanto, infinitas soluções ($\{X \mapsto a+b\}, \{X \mapsto (a+b)+(a+b)\}, \{X \mapsto \mathsf{f}(a+b)\}, \ldots$) são perdidas. De fato, note que $(a\ b)\cdot(a+b) = b+a \approx_{\alpha,\mathsf{C}} a+b$, logo a permutação $(a\ b)$ fixa o termo $a+b$, apesar dos átomos a e b ocorrerem livres em $a+b$. Com a abordagem de ponto fixo, a completude do algoritmo de unificação nominal (módulo comutatividade) é recuperada [Ayala-Rincón et al. 2020b].

Recentemente, em [Ayala-Rincón et al. 2020b], foi proposto um método para decidir o problema da desunificação nominal, que trata-se de uma extensão do problema de desunificação de primeira-ordem definido em [Buntine and Bürckert 1994, Comon and Lescanne 1989], onde a relação de α-equivalência é construída usando permutações e *freshness*. No entanto, o algoritmo de decisão para desunificação nominal proposto depende de que o problema de unificação nominal correspondente seja finitário. Enquanto que o problema de unificação nominal (puro) é finitário [Urban et al. 2004], quando teorias equacionais são envolvidas, esta propriedade é perdida, como foi provado em [Ayala-Rincón et al. 2017].

Contribuições. Neste trabalho definimos o problema de *desunificação nominal via ponto fixo* (Definição 4.1) e estendemos para esta abordagem vários conceitos necessários para o estudo da sua decidibilidade: uma nova noção de *solução* para esse problema (Definição 4.4) que depende do conceito de *par com exceções* (Definição 4.2) bem como sua consistência (Definição 4.3). Provamos resultados de consistência (Corolário 4.1), apresentamos o algoritmo (Algoritmo 2) para obter um conjunto completo de soluções (Teorema 4.1). Este é um primeiro passo para o desenvolvimento de extensões do problema de desunificação nominal que envolvam teorias equacionais.

Organização. A Seção 2 contém noções básicas de sintaxe nominal bem como as construções via ponto fixo. A Seção 3 introduz o problema da unificação nominal via ponto fixo bem como o algoritmo de decisão. Na Seção 4 introduzimos o conceito de desunificação nominal via ponto fixo, bem como os resultados obtidos com esta técnica. Finalmente, na Seção 5 apresentamos a conclusão e discutimos o trabalho futuro.

2. Preliminares

Seja $\mathbb{A}$ um conjunto infinito e enumerável de elementos a, b, $c, \ldots$, que serão chamados *átomos* (ou nomes atômicos) e $\mathcal{X} = \{X, Y, Z, \ldots\}$ um conjunto infinito enumerável de *variáveis*. Fixamos um conjunto finito de símbolos de função $\mathcal{F} = \{\mathsf{f}, \mathsf{g}, \ldots\}$ – disjunto de $\mathbb{A}$ e $\mathcal{X}$ – tal que cada $\mathsf{f} \in \mathcal{F}$ é associado a um único inteiro não-negativo n tal que $\mathsf{f} : n$, a sua aridade. Uma permutação π em $\mathbb{A}$ é uma bijeção em $\mathbb{A}$ com domínio finito, isto é, $\mathtt{dom}(\pi) = \{a \in \mathbb{A} \mid \pi(a) \neq a\}$ é finito. Escrevemos Id para permutação identidade, denotamos por π^{-1} a permutação *inversa* de π e $\pi \circ \pi'$ denota a composição de π e π'.

Termos nominais são gerados pela gramática: $t := a \mid [a]t \mid \mathsf{f}(t_1, \ldots, t_n) \mid \pi \cdot X$, onde a é um *átomo*, $[a]t$ denota a *abstração* do átomo a no termo t, $\mathsf{f}(t_1, \cdots, t_n)$ denota a *aplicação* de f em termos $t_1, \ldots, t_n$, com $\mathsf{f} \in \mathcal{F}$ e $\mathsf{f} : n$, e $\pi \cdot X$ é uma *variável moderada* ou uma *suspensão*, onde π é uma permutação de átomos. Abreviaremos a sequência ordenada $t_1, \ldots, t_n$ por $(\widetilde{t})_n$. Denotamos por $\mathtt{Var}(t)$ o conjunto das variáveis que ocorrem em t. Termos *básicos* são aqueles sem ocorrência de variáveis, ou seja, $\mathtt{Var}(t) = \emptyset$.

As *permutações* de átomos serão representadas por listas finitas de *transposições*, cuja notação $(a\ b)$ indica a troca de a por b e vice-versa. Assim, uma permutação π é gerada pela gramática: $\pi := Id \mid (a\ b) \circ \pi$, onde Id é geralmente omitida na representação de uma permutação π. A *ação de uma permutação π em um termo t* é definida indutivamente por: $\pi \cdot a = \pi(a), \pi \cdot (\pi' \cdot X) = (\pi \circ \pi') \cdot X, \pi \cdot ([a]t) = [\pi(a)](\pi \cdot t)$ e $\pi \cdot \mathsf{f}(t_1, \ldots, t_n) = \mathsf{f}((\pi \cdot t_1, \ldots, \pi \cdot t_n)$. Uma variável moderada da forma $Id \cdot X$ será escrita apenas como X. *Substituições* são geradas pela gramática: $\sigma := id \mid [X \mapsto s]\sigma$. A *ação de uma substituição em um termo t*, denotada por $t\sigma$, é definida indutivamente por: $a\sigma = a, (\pi \cdot X)\sigma = \pi \cdot (X\sigma), ([a]t)\sigma = [a](t\sigma)$ e $(\mathsf{f}(t_1, \ldots, t_n))\sigma = \mathsf{f}(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$. O símbolo $\circ$ também será utilizado para composição de substituições: $t(\sigma \circ \sigma') = (t\sigma)\sigma'$. Substituições e permutações comutam [Fernández and Gabbay 2007]: $\pi \cdot (s\sigma) = (\pi \cdot s)\sigma$.

2.1. Suporte

Seja S um conjunto equipado com uma ação do grupo $\mathtt{Perm}(\mathbb{A})$, o grupo das permutações finitas de $\mathbb{A}$. Um conjunto $A \subset \mathbb{A}$ é um *suporte* para um elemento $x \in S$ se para todo $\pi \in \mathtt{Perm}(\mathbb{A})$, vale $((\forall a \in A)\ \pi(a) = a) \Rightarrow \pi \cdot x = x$. Um *conjunto nominal* S é um conjunto equipado com uma ação do grupo $\mathtt{Perm}(\mathbb{A})$ e que todos os seus elementos possuem suporte finito. Denotamos por $\mathtt{supp}_S(x)$ o menor suporte finito de $x \in S$, que coincide com $\mathtt{supp}_S(x) := \bigcap\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \mid A \text{ é um suporte finito para } x\}$, como mostrado em [Pitts 2013]. Escrevemos $\mathtt{supp}(x)$ quando S está claro pelo contexto.

Note que $\mathbb{A}$ é um conjunto nominal: sob a ação natural de $\mathtt{Perm}(\mathbb{A})$, cada $a \in \mathbb{A}$ tem suporte finito dado pelo conjunto unitário que o contém $\{a\}$, portanto $\mathtt{supp}(a) = \{a\}$.

Exemplo 2.1. Para determinar o suporte de uma permutação π, relembramos que $\mathtt{Perm}(\mathbb{A})$ age sobre si mesmo por *conjugação*, onde a noção de conjugação é a seguinte: dados a e b elementos de um grupo G, dizemos que *b é o conjugado de a* se existe $g \in G$ tal que $gag^{-1} = b$. No caso de $\mathtt{Perm}(\mathbb{A})$, o conjugado de π com respeito a ρ é a composição $\rho \circ \pi \circ \rho^{-1}$ denotada por π^ρ, e será o resultado da ação $\rho \cdot \pi$. Segue da definição suporte que $\mathtt{supp}(\pi) = \mathtt{dom}(\pi)$. Logo $\mathtt{Perm}(\mathbb{A})$ é um conjunto nominal.

2.2. Ponto Fixo para α-equivalência

Pontos fixos de uma permutação terão um papel importante na definição de α-equivalência entre termos nominais. Definimos, então, a relação de ponto fixo.

Definição 2.1 (Ponto Fixo)**.** Seja S um conjunto nominal. A *relação de ponto fixo* $\curlywedge \subseteq \mathtt{Perm}(\mathbb{A}) \times S$ é definida como: $\pi \curlywedge x \Leftrightarrow \pi \cdot x = x$. Lê-se "$\pi$ fixa x".

Observamos que se $\mathtt{dom}(\pi) \cap \mathtt{supp}(x) = \emptyset$, então $\pi \curlywedge x$ vale, o que segue diretamente da definição de suporte. Entretanto, a contrapartida dessa implicação não é válida em geral. Por exemplo, considere expressões construídas usando átomos e um operador binário comutativo $+$; a permutação $\pi = (a\ b)$ fixa a classe de equivalência módulo comutatividade do termo nominal $a + b$, isto é, fixa os termos em $\{a + b, b + a\}$, apesar do fato de seu suporte coincidir com $\mathtt{dom}(\pi)$.

Definição 2.2. Uma *restrição de ponto fixo* é um par $\pi \curlywedge t$ de uma permutação π e um termo t. Uma *restrição de α-equivalência* é um par de termos da forma $s \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha t$.

Considerando s e t termos básicos, a restrição $s \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha t$ significa que s e t são α-equivalentes, ou seja, equivalentes módulo renomeamento de átomos abstraídos/ligados. Já a restrição $\pi \curlywedge t$ significa que a permutação π fixa o termo t, isto é, $\pi \cdot t \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha t$. Em outras palavras, π não tem efeito sobre t exceto pelo renomeamento de átomos ligados, por exemplo, $(a\ b) \curlywedge [a]\mathsf{g}(a, \mathsf{g}(c, d))$ mas não $(a\ b) \curlywedge \mathsf{g}(a, \mathsf{g}(c, d))$. No caso de termos não-básicos, ambas as restrições precisam ser avaliadas sob um *contexto*, que fornecerá informações sobre permutações que fixam variáveis.

Um *contexto (de ponto fixo)* é um conjunto finito de *restrições* primitivas de ponto fixo, isto é, restrições da forma $\pi \curlywedge X$ ou $\pi \curlywedge a$. Usaremos as letras maiúsculas $\Upsilon, \Psi, \Phi, \Delta, \ldots$ para representar contextos. Um contexto é *consistente* quando não possui restrições do tipo $\pi \curlywedge a$, onde $a \in \mathtt{dom}(\pi)$. Um *sequente de ponto fixo* (resp. de α-equivalência) é um par $\Upsilon \vdash \pi \curlywedge t$ composto por um contexto consistente Υ e uma restrições de ponto fixo (resp. de α-equivalência). Dizemos que Υ ou Ψ *implicam* essas restrições, ou que as restrições são *deriváveis* dos respectivos contextos. Se uma restrições C não pode ser derivada do contexto Δ, escrevemos $\Delta \not\vdash C$. Essa noção de implicação é naturalmente extendida para conjuntos de restrições. Os sequentes de ponto fixo e α-equivalência válidos são definidos pelas regras de dedução presentes na Tabela 1. Notações nas regras $(\curlywedge\mathbf{v})$ e $(\stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha \mathbf{v})$: $\mathtt{supp}(\mathtt{perm}(\Upsilon|_X)) := \cup_{\pi \in \mathtt{perm}(\Upsilon|_X)} \mathtt{supp}(\pi)$, onde $\mathtt{perm}(\Upsilon|_X) = \{\pi \mid \pi \curlywedge X \in \Upsilon\}$; e $\pi \curlywedge \mathtt{Var}(t) := \{\pi \curlywedge X \mid X \in \mathtt{Var}(t)\}$.

$$\frac{\pi(a) = a}{\Upsilon \vdash \pi \curlywedge a}\ (\curlywedge\mathbf{a}) \qquad \frac{\mathtt{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \subseteq \mathtt{supp}(\mathtt{perm}(\Upsilon|_X))}{\Upsilon \vdash \pi \curlywedge \pi' \cdot X}\ (\curlywedge\mathbf{v}) \qquad \frac{\Upsilon \vdash \pi \curlywedge t_i \quad i = 1, \ldots, n}{\Upsilon \vdash \pi \curlywedge \mathsf{f}(\widetilde{t})_n}\ (\curlywedge\mathsf{f})$$

$$\frac{\Upsilon, (c_1\ c_2) \curlywedge \mathtt{Var}(t) \vdash \pi \curlywedge (a\ c_1) \cdot t}{\Upsilon \vdash \pi \curlywedge [a]t}\ (\curlywedge\mathbf{ab}) \qquad \frac{}{\Upsilon \vdash a \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha a}\ (\stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$$

$$\frac{\mathtt{supp}((\pi')^{-1} \circ \pi) \subseteq \mathtt{supp}(\mathtt{perm}(\Upsilon|_X))}{\Upsilon \vdash \pi \cdot X \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha \pi' \cdot X}\ (\stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha \mathbf{v}) \qquad \frac{\Upsilon \vdash t_i \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha t_i' \quad i = 1, \ldots, n}{\Upsilon \vdash \mathsf{f}(\widetilde{t})_n \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha \mathsf{f}(\widetilde{t'})_n}\ (\stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha \mathbf{f})$$

$$\frac{\Upsilon \vdash t \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha t'}{\Upsilon \vdash [a]t \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha [a]t'}\ (\stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha [\mathbf{a}]) \qquad \frac{\Upsilon \vdash s \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha (a\ b) \cdot t \quad \Upsilon, (c_1\ c_2) \curlywedge \mathtt{Var}(t) \vdash (a\ c_1) \curlywedge t}{\Upsilon \vdash [a]s \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha [b]t}\ (\stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$$

Tabela 1. Regras de Dedução para $\curlywedge$ e $\stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha$. Os átomos c_1 e c_2 são nomes novos.

A seguir descrevemos as regras mais interessantes: na regra $(\curlywedge\mathbf{v})$ a condição $\mathtt{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \subseteq \mathtt{supp}(\mathtt{perm}(\Upsilon|_X))$ impõe que a permutação $\pi^{\pi'^{-1}}$ tenha efeito apenas em átomos já afetados pelas permutações que fixam X. Com isso, a permutação em questão também fixará a variável. A regra $(\stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ estabelece que para duas abstrações $[a]t$ e $[b]s$ serem equivalentes, devemos obter duas condições: os termos s e t devem ser equivalentes se renomearmos em t o átomo abstraído b por a; e, além disso, a troca de a por um átomo novo c_1 deve fixar t, garantindo assim a ocorrência ligada de a também em t. Nas regras

($\curlywedge$**ab**) e ($\stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha$ **ab**), a presença do conjunto $(c_1\ c_2) \curlywedge \mathtt{Var}(t)$ nos sequentes das premissas tem por objetivo certificar que c_1 seja realmente um nome atômico novo.

Exemplo 2.2. O termo $[a]\mathsf{f}(a)$ é fixado pela permutação $(a\ b)$, visto que $(a\ b) \cdot [a]\mathsf{f}(a) = [b]\mathsf{f}(b)$, que é α-equivalente a $[a]\mathsf{f}(a)$. Podemos derivar o sequente $\vdash (a\ b) \curlywedge [a]\mathsf{f}(a)$. Entretanto, não podemos deduzir $\vdash (a\ b) \curlywedge \mathsf{f}(a)$, e $\mathsf{f}(a)$ não é ponto fixo de $(a\ b)$, como esperado.

3. Unificação Nominal via Ponto Fixo

Esta seção trata de unificação nominal via ponto fixo ([Ayala-Rincón et al. 2020a]), que consiste em verificar se, dados dois termos nominais s e t, existe uma substituição σ tal que $s\sigma \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha t\sigma$, que difere da noção usual de unificação nominal [Urban et al. 2004].
Definição 3.1. Um *problema de unificação nominal* $\mathtt{Pr}$ é um par $\mathtt{Pr} = (\Upsilon, P)$ onde Υ é um contexto consistente e P consiste em um conjunto finito de restrições de igualdade e de ponto fixo da forma $s \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha^{?} t$ e $\pi \curlywedge^{?} t$, respectivamente.

Para contextos consistentes Υ e Ψ e uma substituição σ, denotamos por $\Psi\sigma$ o conjunto $\{\pi \curlywedge X\sigma \mid \pi \curlywedge X \in \Psi\}$, e $\Upsilon \vdash \Psi\sigma$ denota $\Upsilon \vdash \pi \curlywedge X\sigma$, para todo $\pi \curlywedge X \in \Psi$.
Definição 3.2. Uma *solução* para um problema $\mathtt{Pr} = (\Upsilon, P)$ é um par $\langle \Phi, \sigma \rangle$ que satisfaz as seguintes condições: (i) $\Phi \vdash \Upsilon\sigma$; (ii) $\Phi \vdash \pi \curlywedge t\sigma$, se $\pi \curlywedge^{?} t \in P$; e (iii) $\Phi \vdash s\sigma \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha t\sigma$, se $s \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha^{?} t \in P$.

$\mathcal{U}(\mathtt{Pr})$ denota o conjunto de soluções do problema $\mathtt{Pr}$. Soluções em $\mathcal{U}(\mathtt{Pr})$ podem ser comparadas usando a relação de ordem a seguir.
Definição 3.3. Sejam Φ_1, Φ_2 contextos consistentes de ponto fixo , e σ_1, σ_2 substituições. Dizemos que $\langle \Phi_2, \sigma_2 \rangle$ é uma *instância* de $\langle \Phi_1, \sigma_1 \rangle$, e denotamos $\langle \Phi_1, \sigma_1 \rangle \leq \langle \Phi_2, \sigma_2 \rangle$, quando existe alguma substituição σ' tal que $\Phi_2 \vdash X\sigma_1\sigma' \stackrel{\curlywedge}{\approx}_\alpha X\sigma_2$ e $\Phi_2 \vdash \Phi_1\sigma'$, para todo X. De modo mais específico, podemos escrever $\langle \Phi_1, \sigma_1 \rangle \leq_{\sigma'} \langle \Phi_2, \sigma_2 \rangle$.
Definição 3.4. Uma *solução principal* (ou *mais geral*) para um problema $\mathtt{Pr}$ é o menor elemento de $\mathcal{U}(\mathtt{Pr})$ com relação a $\leq$.

As regras de simplificação[1] apresentadas na Tabela 2 implementam um *algoritmo de unificação nominal* ($\mathtt{Unif}$): aplicamos as regras de simplificação em um problema $\mathtt{Pr}$ até que sua forma normal $\langle \mathtt{Pr} \rangle_{\mathtt{nf}}$ seja alcançada[2]. Escrevemos $\mathtt{Pr} \Longrightarrow \mathtt{Pr}'$ quando $\mathtt{Pr}'$ é obtido a partir de $\mathtt{Pr}$ aplicando uma regra de simplificação, e $\stackrel{*}{\Longrightarrow}$ denota o fecho reflexivo-transitivo da relação $\Longrightarrow$. A terminação e confluência dessa relação são provadas em [Ayala-Rincón et al. 2020a]. Se $\mathtt{Pr} \stackrel{*}{\Longrightarrow} \mathtt{Pr}'$ e $\mathtt{Pr}'$ é irredutível (nenhuma regra pode ser aplicada), dizemos que $\mathtt{Pr}'$ é uma forma normal de $\mathtt{Pr}$ e escrevemos $\mathtt{Pr}' = \langle \mathtt{Pr} \rangle_{\mathtt{nf}}$.

Se $\langle \mathtt{Pr} \rangle_{\mathtt{nf}}$ *falha* ou contém restrições equacionais reduzidas (que não podem ser simplificadas), dizemos que $\mathtt{Pr}$ é *insolúvel*; caso contrário, $\langle \mathtt{Pr} \rangle_{\mathtt{nf}}$ é *solúvel* e sua solução, denotada por $\langle \mathtt{Pr} \rangle_{sol} = \langle \Phi, \sigma \rangle$, é composta pela composição σ de substituições aplicadas nos passos de simplificação e pelo contexto de ponto fixo $\Phi = \{\pi \curlywedge X \mid \pi \curlywedge^{?} X \in \langle \mathtt{Pr} \rangle_{\mathtt{nf}}\}$.
Teorema 3.1 ([Ayala-Rincón et al. 2020a])**.** Seja $\mathtt{Pr}$ um problema de unificação, e suponha que $\langle \mathtt{Pr} \rangle_{sol} = \langle \Phi, \sigma \rangle$. Então: (1) $\langle \Phi, \sigma \rangle \in \mathcal{U}(\mathtt{Pr})$; e (2) $\langle \Phi, \sigma \rangle \leq \langle \Phi', \sigma' \rangle$ para todo outro par $\langle \Phi', \sigma' \rangle \in \mathcal{U}(\mathtt{Pr})$. Isto é, $\langle \mathtt{Pr} \rangle_{sol}$ também é uma solução principal.

[1] Para um conjunto S: $\overline{\pi \curlywedge S} = \{\pi \curlywedge X \mid X \in S\}$.
[2] Em [Ayala-Rincón et al. 2020a], foi provado que este algoritmo retorna soluções idempotentes.

$(\curlywedge a)$	$\mathtt{Pr} \uplus \{\pi \curlywedge^{?} a\}$	$\Longrightarrow$	$\mathtt{Pr}$, if $\pi(a) = a$
$(\curlywedge f)$	$\mathtt{Pr} \uplus \{\pi \curlywedge^{?} \mathsf{f}(\widetilde{t})_n\}$	$\Longrightarrow$	$\mathtt{Pr} \cup \{\pi \curlywedge^{?} t_1, \ldots, \pi \curlywedge^{?} t_n\}$
$(\curlywedge abs)$	$\mathtt{Pr} \uplus \{\pi \curlywedge^{?} [a]t\}$	$\Longrightarrow$	$\mathtt{Pr} \cup \{\pi \curlywedge^{?} (a\, c_1) \cdot t, \overline{(c_1\, c_2) \curlywedge^{?} \mathtt{Var}(t)}\}$
$(\curlywedge var)$	$\mathtt{Pr} \uplus \{\pi \curlywedge^{?} \pi' \cdot X\}$	$\Longrightarrow$	$\mathtt{Pr} \cup \{\pi^{(\pi')^{-1}} \curlywedge^{?} X\}$, if $\pi' \neq Id$
$(\overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha\, a)$	$\mathtt{Pr} \uplus \{a \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha a\}$	$\Longrightarrow$	$\mathtt{Pr}$
$(\overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha\, t)$	$\mathtt{Pr} \uplus \{\mathsf{f}(\widetilde{t})_n \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha \mathsf{f}(\widetilde{t'})_n\}$	$\Longrightarrow$	$\mathtt{Pr} \cup \{t_1 \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha t'_1, \ldots, t_n \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha t'_n\}$
$(\overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha\, ab1)$	$\mathtt{Pr} \uplus \{[a]t \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha [a]t'\}$	$\Longrightarrow$	$\mathtt{Pr} \cup \{t \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha t'\}$
$(\overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha\, ab2)$	$\mathtt{Pr} \uplus \{[a]t \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha [b]s\}$	$\Longrightarrow$	$\mathtt{Pr} \cup \{t \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha (a\, b) \cdot s, (a\, c_1) \curlywedge^{?} s, \overline{(c_1\, c_2) \curlywedge^{?} \mathtt{Var}(s)}\}$
$(\overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha\, var)$	$\mathtt{Pr} \uplus \{\pi \cdot X \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha \pi' \cdot X\}$	$\Longrightarrow$	$\mathtt{Pr} \cup \{(\pi')^{-1} \circ \pi \curlywedge^{?} X\}$
$(\overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha\, inst1)$	$\mathtt{Pr} \uplus \{\pi \cdot X \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha t\}$	$\overset{[X \mapsto \pi^{-1}.t]}{\Longrightarrow}$	$\mathtt{Pr}\{X \mapsto \pi^{-1}.t\}$, if $X \notin \mathtt{Var}(t)$
$(\overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha\, inst2)$	$\mathtt{Pr} \uplus \{t \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha \pi \cdot X\}$	$\overset{[X \mapsto \pi^{-1}.t]}{\Longrightarrow}$	$\mathtt{Pr}\{X \mapsto \pi^{-1}.t\}$, if $X \notin \mathtt{Var}(t)$

Tabela 2. Regras de Simplificação. Os átomos c_1 e c_2 são nomes novos.

4. Desunificação Nominal via Ponto Fixo

Esta seção contém as contribuições que estendem [Ayala-Rincón et al. 2020b]. A seguir, definimos o problema de desunificação nominal via ponto fixo.

Definição 4.1. Um *problema de desunificação nominal* $\mathcal{P}_\curlywedge$ é um par $\mathcal{P}_\curlywedge = \langle E_\curlywedge \,||\, D_\curlywedge \rangle$, onde $E_\curlywedge$ é um conjunto não-vazio de *equações nominais sob contexto* $\Upsilon \vdash s \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha t$ e $D_\curlywedge$ é um conjunto (possivelmente vazio) de *diferenças nominais sob contexto* $\Omega \vdash p \overset{\curlywedge}{\not\approx}{}^{?}_\alpha q$:

$$E_\curlywedge = \{\Upsilon \vdash s_1 \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha t_1, ..., s_n \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha t_n, \}, D_\curlywedge = \{\Omega \vdash p_1 \overset{\curlywedge}{\not\approx}{}^{?}_\alpha q_1, ..., p_m \overset{\curlywedge}{\not\approx}{}^{?}_\alpha q_m\}.$$

Os conjuntos Υ e Ω são contextos consistentes e serão chamados de condições iniciais de ponto fixo impostas ao problema $\mathcal{P}_\curlywedge$.

O próximo exemplo ilustra o que se espera de uma solução para um problema de desunificação nominal: um par $\langle \Phi, \sigma \rangle$ que será solução para a parte equacional do problema, porém, com a restrição de que ele não pode solucionar as *equações associadas* às diferenças presentes na outra parte.

Exemplo 4.1. Considere o problema $\mathcal{P}_\curlywedge = \langle \vdash X \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha (a\, b) \cdot Y \,||\, \vdash [a]X \overset{\curlywedge}{\not\approx}{}^{?}_\alpha [b]Y \rangle$. A equação associada a ele é $[a]X \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha [b]Y$. Usando a regra $(\overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha\, ab2)$ da Tabela 2, temos: $\{[a]X \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha [b]Y\} \Longrightarrow \{X \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha (a\, b) \cdot Y,\ (a\, c_1) \curlywedge^{?} Y, (c_1\, c_2) \curlywedge^{?} Y\}$. Se considerarmos um contexto sem adicionar as restrições $(a\ c_1) \curlywedge Y$ e $(c_1\ c_2) \curlywedge Y$, e escolhendo uma substituição de modo que a parte equacional seja satisfeita, a equação associada não será resolvida. Portanto, uma solução para $\mathcal{P}_\curlywedge$ será o par $\langle \Phi, \sigma \rangle = \langle \emptyset, [X \mapsto (a\ b) \cdot Y] \rangle$.

Definição 4.2 (Par com exceções)**.** Um *par com exceções*, denotado por $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta$, consiste em um par $\langle \Phi, \sigma \rangle$ e uma família indexada de pares $\Theta = \{\langle \nabla_l, \theta_l \rangle \mid l \in I\}$.

A definição de par com exceções será importante para representar soluções de um problema de desunificação que tem restrições sobre como elas podem ser instanciadas. Por exemplo, se temos o problema $\langle \vdash X \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha Y \,||\, \vdash X \overset{\curlywedge}{\not\approx}{}^{?}_\alpha [b]\mathsf{f}(b) \rangle$, as soluções para a equação $\vdash X \overset{\curlywedge}{\approx}{}^{?}_\alpha Y$ podem ser instanciadas livremente, com exceção das instâncias que levam X para $[b]\mathsf{f}(b)$ ou termos α-equivalentes.

Definição 4.3. Dizemos que :

(i) um par $\langle \Phi, \sigma \rangle$ é uma instância de uma família $\Theta = \{\langle \nabla_l, \theta_l \rangle \mid l \in I\}$ se, e somente se, toda instância de $\langle \Phi, \sigma \rangle$ é uma instância de algum $\langle \nabla_l, \theta_l \rangle \in \Theta$; e

(ii) um par $\langle \Delta, \lambda \rangle$ é uma instância de um par com exceções $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta$ se, e somente se, $\langle \Delta, \lambda \rangle$ é uma instância de $\langle \Phi, \sigma \rangle$ mas não de Θ.

(iii) Um par com exceções $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta$ é consistente se, e somente se, possui pelo menos uma instância.

Exemplo 4.2. Considere o problema $\mathcal{P}'_{\curlywedge}$, uma modificação do Exemplo 4.1: $\mathcal{P}'_{\curlywedge} = \langle\ \{(a\ c_1) \curlywedge Y, (c_1\ c_2) \curlywedge Y\} \vdash X \overset{\curlywedge ?}{\approx}_\alpha (a\ b) \cdot Y \mid\mid\ \vdash [a]X \overset{\curlywedge ?}{\not\approx}_\alpha [b]Y \rangle$. Nesse caso não há solução, pois sempre que solucionamos a parte equacional, solucionamos também a equação associada à disequação. Obtemos, assim, par com exceções inconsistente: $\langle \Phi, [X \mapsto (a\ b) \cdot Y] \rangle - \{\langle \Phi, [X \mapsto (a\ b) \cdot Y] \rangle\}$, onde $\Phi = \{(a\ c_1) \curlywedge Y, (c_1\ c_2) \curlywedge Y\}$.

Lema 4.1 (Lema da Inconsistência)**.** Um par com exceções $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta$ é inconsistente se, e somente se, $\langle \Phi, \sigma \rangle$ é uma instância de Θ.

O seguinte corolário nos permite construir um algoritmo para testar a consistência de pares com exceção (Algoritmo 1), uma vez que tenhamos resolvido, para todas as variáveis em $\mathcal{P}_{\curlywedge}$, o problema de *matching-in-context* $(\Phi \vdash X\sigma) \overset{\curlywedge}{\approx}_{\alpha ?} (\Phi \vdash X\theta)$, onde $X\sigma$ é o lado que não pode ser instanciado (ver [Ayala-Rincón et al. 2020b]), cuja solução seria uma substituição δ tal que $\Phi \vdash X\sigma \overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha X\theta\delta$.

Corolário 4.1. Seja $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta$ um par com exceções. Se há um par $\langle \nabla_l, \theta_l \rangle \in \Theta$ tal que exista uma substituição δ satisfazendo $\Phi \vdash X\sigma \overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha X\theta_l\delta$, para todo $X \in \mathtt{Var}(\mathcal{P}_{\curlywedge})$. Então, $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta$ é inconsistente sse $\mathtt{supp}(\mathtt{Perm}(\langle \nabla_l \delta \rangle_{\mathtt{nf}})) \subseteq \mathtt{supp}(\mathtt{Perm}(\Phi))$[3].

Algoritmo 1 Teste de Consistência

---

entrada: $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta$ um par com exceções finito
saída: `sucesso` se a entrada é consistente `falha` caso contrário
para $\langle \nabla_l, \theta_l \rangle \in \Theta$ **faça**
  se $\delta = \mathtt{matching}(\Phi,\ X_1\sigma \overset{\curlywedge}{\approx}_{\alpha ?} X_1\theta_l, \cdots,\ X_n\sigma \overset{\curlywedge}{\approx}_{\alpha ?} X_n\theta_l)$ **então**
    se $\mathtt{supp}(\mathtt{Perm}(\langle \nabla_l \delta \rangle_{\mathtt{nf}})) \subseteq \mathtt{supp}(\mathtt{Perm}(\Phi))$ **então retorne** `falha` e **pare**
    fim se
  fim se
fim para **retorne** `sucesso`

Definição 4.4. Seja $\mathcal{P}_{\curlywedge} = \langle \Upsilon \vdash \{s_1 \overset{\curlywedge ?}{\approx}_\alpha t_1, ..., s_n \overset{\curlywedge ?}{\approx}_\alpha t_n\} \mid\mid \Omega \vdash \{p_1 \overset{\curlywedge ?}{\not\approx}_\alpha q_1, ..., p_m \overset{\curlywedge ?}{\not\approx}_\alpha q_m\} \rangle$ um problema de desunificação nominal. Uma *solução* para $\mathcal{P}_{\curlywedge}$ é um par $\langle \Phi, \sigma \rangle$ onde Φ é um contexto consistente e σ uma substituição satisfazendo as seguintes condições: (i) $\langle \Phi, \sigma \rangle$ é uma solução da parte equacional $E_{\curlywedge}$ de $\mathcal{P}_{\curlywedge}$; (ii) $\langle \Phi, \sigma \rangle$ satisfaz as diferenças em $D_{\curlywedge}$ de $\mathcal{P}_{\curlywedge}$, isto é: a) $\Phi \not\vdash \Omega\sigma$, ou b) $\Phi \not\vdash p\sigma \overset{\curlywedge}{\approx}_\alpha q\sigma$, para toda $p \overset{\curlywedge ?}{\not\approx}_\alpha q$ em $D_{\curlywedge}$.

Definição 4.5. Dizemos que um conjunto S de pares com exceções é uma *representação completa* das soluções para o problema $\mathcal{P}_{\curlywedge}$ se, e somente se, S satisfaz as seguintes condições: (i) se $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta \leq \langle \Delta, \lambda \rangle$ para algum $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta$ em S, então $\langle \Delta, \lambda \rangle$ é solução para $\mathcal{P}_{\curlywedge}$; (ii) se o par $\langle \Delta, \lambda \rangle$ é solução para $\mathcal{P}_{\curlywedge}$, então ele é uma instância de algum $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta$ em S; (iii) $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta$ é consistente para todo $\langle \Phi, \sigma \rangle - \Theta$ em S.

---

[3] Notação: $\mathtt{supp}(\mathtt{Perm}(\Upsilon)) := \cup_{\pi \in \mathtt{Perm}(\Upsilon)} \mathtt{supp}(\pi)$, onde $\mathtt{Perm}(\Upsilon) := \cup_{X \in \mathtt{Var}(\Upsilon)} \mathtt{perm}(\Upsilon|_X)$.

Teorema 4.1 (Teorema da Representação)**.** Seja $\mathcal{P}_{\curlywedge} = \langle \Upsilon \vdash \{s_1 \overset{\curlywedge\,?}{\approx}_\alpha t_1, ..., s_n \overset{\curlywedge\,?}{\approx}_\alpha t_n\} \mid\mid \Omega \vdash \{p_1 \overset{\curlywedge\,?}{\not\approx}_\alpha q_1, ..., p_m \overset{\curlywedge\,?}{\not\approx}_\alpha q_m\}\rangle$ um problema de desunificação nominal. Defina a família $\Theta := \bigcup_{p_i \overset{\curlywedge\,?}{\not\approx}_\alpha q_i \in D_{\curlywedge}} \mathcal{U}(\Omega, p_i \overset{\curlywedge\,?}{\approx}_\alpha q_i)$. Então o conjunto $S = \{\langle \Phi, \sigma\rangle - \Theta \mid \langle \Phi, \sigma\rangle \in \mathcal{U}(E_{\curlywedge})$ e $\Theta \not\lesssim \langle \Phi, \sigma\rangle\}$ é uma representação completa de soluções para o problema $\mathcal{P}_{\curlywedge}$.

Algoritmo 2 Construção de uma Representação Completa de Soluções

---

entrada: Um problema de desunificação $\mathcal{P}_{\curlywedge} = \langle E_{\curlywedge} \mid\mid D_{\curlywedge}\rangle$.
saída: Um conjunto finito S de pares com exceções (possivelmente vazio).
seja $\langle \Phi, \sigma\rangle := \texttt{unif}(E_{\curlywedge})$
seja $\Theta := \bigcup_{p_i \overset{\curlywedge\,?}{\not\approx}_\alpha q_i \in D_{\curlywedge}} \{\langle \nabla_i, \theta_i\rangle = \texttt{unif}(\nabla_i, p_i \overset{\curlywedge\,?}{\approx}_\alpha q_i)\}$
se $\texttt{consistente}(\langle \Phi, \sigma\rangle - \Theta)$ **então retorne** $\langle \Phi, \sigma\rangle - \Theta$
se não retorne $\emptyset$
fim se

---

5. Conclusão e Trabalhos Futuros

Este trabalho fez uso da relação de ponto fixo, intrínseca à definição da relação de *freshness*, com o intuito de estender os conceitos da sintaxe já definidos na desunificação nominal usual. A abordagem via ponto fixo se mostrou útil para lidar com teorias equacionais que envolvem comutatividade justamente por considerar opções ignoradas sob a relação de *freshness*. Por isso, como trabalho futuro, pretendemos finalizar a análise semântica dessa nossa extensão e usufruir de sua representação finitária de soluções para investigar problemas envolvendo teorias equacionais.

Referências

Ayala-Rincón, M., de Carvalho Segundo, W., Fernández, M., and Nantes-Sobrinho, D. (2017). On solving nominal fixpoint equations. In *Front. of Combining Systems - 11th Int. Symp., FroCoS 2017, Proc.*, volume 10483 of *LNCS*, pages 209–226. Springer.

Ayala-Rincón, M., Fernández, M., and Nantes-Sobrinho, D. (2020a). On nominal syntax and permutation fixed points. *Log. Methods Comput. Sci.*, 16(1).

Ayala-Rincón, M., Fernández, M., Nantes-Sobrinho, D., and Vale, D. (2020b). On solving nominal disunification constraints. In *Proc. of the 14th Work. on Logical and Semantic Frameworks with Applications, LSFA 2019*, volume 348 of *ENTCS*, pages 3–22.

Buntine, W. L. and Bürckert, H. (1994). On solving equations and disequations. *J. ACM*, 41(4):591–629.

Comon, H. and Lescanne, P. (1989). Equational problems and disunification. *J. Symb. Comput.*, 7(3/4):371–425.

Fernández, M. and Gabbay, M. (2007). Nominal rewriting. *Inf. Comput.*, 205(6):917–965.

Gabbay, M. and Pitts, A. M. (2002). A new approach to abstract syntax with variable binding. *Formal Aspects Comput.*, 13(3-5):341–363.

Pitts, A. M. (2013). *Nominal Sets: Names and Symmetry in Computer Science*. CUP.

Urban, C., Pitts, A. M., and Gabbay, M. (2004). Nominal unification. *Theor. Comput. Sci.*, 323(1-3):473–497.