

# Construindo Tableaux para Lógica Linear Intuicionista

Hugo Hoffmann Borges<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Filosofia – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)  
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

hugoborges130@hotmail.com

***Abstract.** The purpose of this article is to build a sound and complete Tableaux for Intuitionist Linear Logic through a process of translating the Sequent Calculus rules.*

***Resumo.** O objetivo deste artigo é construir um Tableaux correto e completo para Lógica Linear Intuicionista por meio de um processo de tradução das regras do Cálculo de Sequentes.*

## 1. Introdução

A Lógica Linear pertence a um grupo de lógicas chamadas de lógica sub-estruturais, ou seja, lógicas que abrem mão de uma ou mais regras estruturais<sup>1</sup>. O diferencial da Lógica Linear, frente a outras lógicas sub-estruturais, é que ela permite a recuperação das regras estruturais por meio da adição de operadores modais chamados de operadores exponenciais.

Ao longo deste artigo construímos um tableau ao estilo Fitting para Lógica Linear Intuicionista, traduzindo as regras do Cálculo de Sequentes de [Okada 1998] em regras de Tableaux, utilizando a estratégia apresentada por [M. D'Agostino and Broda 1999]. Embora hoje já existam interpretações para *Full Intuitionistic Linear Logic*, optamos por adotar uma estratégia mais conservadora e apresentar as regras de tableau sem os operadores  $\wp$  e  $?$ . A remoção do  $\wp$  é justificada pelo fato da semântica para a disjunção multiplicativa ser considerada problemática do ponto de vista de alguns lógicos intuicionistas. A remoção do operador exponencial  $?$ , por sua vez, se dá, pois, no cálculo de sequentes intuicionista usual, a cardinalidade do conseqüente é restrita a no máximo uma fórmula, o que elimina a necessidade do operador exponencial no lado direito do seqüente.

Embora os sistemas de cálculo dos sequentes e tableaux sejam sistemas muito próximos, a apresentação de um sistema de tableaux possui certas vantagens. A principal vantagem, que motiva a construção do sistema do presente artigo, é de caráter pedagógico. Do ponto de vista do aluno/leitor que inicia seus estudos sobre sistemas dedutivos, o aprendizado das regras de um sistema de tableaux é mais intuitivo do que o aprendizado das regras de cálculo de sequentes.

Iremos utilizar, ao longo do artigo, **Cs**, **Tx**,  $L_{Lc}$  e  $L_{Li}$  como abreviatura para Cálculo de Sequentes, Tableaux, Lógica Linear Clássica e Lógica Linear Intuicionista respectivamente.

---

<sup>1</sup>A Lógica da Relevância, por exemplo, abre mão da regra de atenuação, enquanto a Lógica Linear abre mão das regras de atenuação e contração

## 2. Cálculo de Sequentes

Os Teoremas de Corretude e Completude do Tableaux que são apresentados na próxima seção são demonstrados indiretamente via um processo de tradução entre derivações de **Cs** e **Tx**. O sistema de **Cs** utilizado pelas traduções é uma versão adaptada do sistema de [Okada 1998]. O **Cs** originalmente proposto por Okada é definido para  $L_{Lc}$ , precisaremos, então, adaptar as regras de **Cs** para obter um cálculo para  $L_{Li}$ . É importante notar que a adaptação do sistema para  $L_{Li}$  não altera os resultados apresentados de corretude e completude demonstrados em [Okada 1998]. O sistema adaptado é o que segue abaixo:

**Axioma e Corte:**

$$\frac{}{A \Rightarrow A} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Sigma \Rightarrow D}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow D}$$

**Regras Lógicas:**

Conjunção Aditiva:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow D}{\Gamma, A \& B \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma, B \Rightarrow D}{\Gamma, A \& B \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \& B}$$

Conjunção Multiplicativa:

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow D}{\Gamma, A \otimes B \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow A \otimes B}$$

Disjunção Aditiva:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow D \quad \Gamma, B \Rightarrow D}{A \oplus B, \Gamma \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B}$$

Implicação Multiplicativa:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Sigma, B \Rightarrow D}{\Gamma, \Sigma, A \multimap B \Rightarrow D} \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B}$$

Negação Linear:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, A^\perp \Rightarrow} \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A^\perp}$$

Bang:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow D}{\Gamma, !A \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow D}{\Gamma, !A \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow D}{\Gamma, !A \Rightarrow D} \quad \frac{! \Gamma \Rightarrow A}{! \Gamma \Rightarrow !A}$$

## 3. Estruturas de Árvores e Tradução de Regras

Para garantir que os tableaux que iremos construir correspondam a teoremas (e não-teoremas) de  $L_{Li}$ , devemos apresentar algumas definições preliminares:

**Definição 1:** Dizemos que uma fórmula foi *utilizada* se uma regra lógica foi aplicada a ela ou se ao menos uma vez ela fecha um ramo. A fórmula que for utilizada será sinalizada com  $\checkmark$ .

**Definição 2:** Um ramo é dito *fechado* quando, para uma fórmula A, tanto A T quanto sua negação A F estão contidos no mesmo ramo e todas as fórmulas contidas no

ramo foram utilizadas. Caso contrário, o ramo é dito *aberto*. Uma árvore de derivação é dita *fechada* se todos os ramos estão fechados. Caso contrário, a árvore é *aberta*.

**Definição 3:** Dizemos que B é derivável a partir  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  se existe uma árvore fechada construída com os nós iniciais  $A_1T, A_2T, \dots, A_nT$  e  $BF$ .

**Definição 4:** Uma fórmula A é um teorema se existe uma árvore fechada construída com A F.

As regras do **Tx** serão obtidas por meio de uma função de tradução de **Cs** em **Tx**. Na tradução que se segue, assim como em [M. D'Agostino and Broda 1999], reformularemos as regras à direita do sistema de [Okada 1998] passando todas as fórmulas do consequente para o antecedente adicionando a negação. Esse método de tradução auxilia na visualização da correspondência das regras à direita de **Cs** e as regras para fórmulas F de **Tx**.

**Conjunção Aditiva:** As regras para a conjunção aditiva funcionam da seguinte maneira. No caso da ocorrência de um nós com  $A \& B T$ , temos a propriedade da projeção da conjunção, ou seja, dado que  $A \& B$  é demonstrável, então podemos apresentar uma prova de A e uma prova de B, porém sem apresentar ambas as provas simultaneamente. No caso de  $A \& B F$ , temos que ao menos um dos componentes não é demonstrável.

$$\frac{\Gamma, A, D^\perp \Rightarrow}{\Gamma, A \& B, D^\perp \Rightarrow} \mapsto \frac{(A \& B) T}{AT} \quad \frac{\Gamma, B, D^\perp \Rightarrow}{\Gamma, A \& B, D^\perp \Rightarrow} \mapsto \frac{(A \& B) T}{B T}$$

$$\frac{\Gamma, A^\perp \Rightarrow \quad \Gamma, B^\perp \Rightarrow}{\Gamma, (A \& B)^\perp \Rightarrow} \mapsto \frac{(A \& B) F}{\begin{array}{c} A F \quad B F \\ | \quad | \\ \Gamma T \quad \Gamma T \end{array}}$$

Em que  $\Gamma$  são fórmulas que não foram usadas acima do nós no qual a regra foi aplicada. A repetição das fórmulas corresponde ao *context-sharing*.

**Conjunção Multiplicativa:** O caso da conjunção multiplicativa é bem simples. Se temos uma ocorrência de  $A \otimes B T$ , então temos, simultaneamente, uma prova de A e uma prova de B. No caso de  $\otimes$ -F, sabemos que não temos uma prova para pelo menos um dos conjuntos. As fórmulas que ocorrem acima de  $A \otimes B F$  devem ser divididas arbitrariamente entre os dois ramos em  $\Gamma$  e  $\Sigma$ . A divisão entre fórmulas em  $\Gamma$  e  $\Sigma$  corresponde ao *Context-Sharing*.

$$\frac{\Gamma, A, B, D^\perp \Rightarrow}{\Gamma, A \otimes B, D^\perp \Rightarrow} \mapsto \frac{(A \otimes B) T}{\begin{array}{c} | \\ A T \\ | \\ B T \end{array}} \quad \frac{\Gamma, A^\perp \Rightarrow \quad \Sigma, B^\perp \Rightarrow}{\Gamma, \Sigma, (A \otimes B)^\perp \Rightarrow} \mapsto \frac{(A \otimes B) F}{\begin{array}{c} / \quad \backslash \\ A F \quad B F \\ | \quad | \\ \Gamma T \quad \Sigma T \end{array}}$$

**Disjunção Aditiva:** O caso da disjunção aditiva é espelhado ao caso da conjunção aditiva. Vemos que a propriedade do silogismo disjuntivo é satisfeita no caso de  $\oplus$  - T, ou seja, caso  $A \oplus B$  seja demonstrável, então ou A ou B são demonstráveis. Já no caso de  $\oplus$ -F, sabemos que não temos uma prova de A ou não temos uma prova de B, porém não simultaneamente.

$$\frac{\Gamma, A, D^\perp \Rightarrow \quad \Gamma, B, D^\perp \Rightarrow}{\Gamma, A \oplus B, D^\perp \Rightarrow} \mapsto \begin{array}{c} (A \oplus B) T \\ / \quad \backslash \\ A T \quad B T \\ | \quad | \\ \Gamma T \quad \Gamma T \end{array}$$

Em que  $\Gamma$  são fórmulas que não foram usadas acima do nós no qual a regra foi aplicada.

$$\frac{\Gamma, A^\perp \Rightarrow}{\Gamma, (A \oplus B)^\perp \Rightarrow} \mapsto \begin{array}{c} (A \oplus B) F \\ | \\ A F \end{array} \quad \frac{\Gamma, B^\perp \Rightarrow}{\Gamma, (A \oplus B)^\perp \Rightarrow} \mapsto \begin{array}{c} (A \oplus B) F \\ | \\ B F \end{array}$$

**Implicação Linear:** O caso da implicação demanda um pouco mais de atenção. A leitura da implicação do ponto de vista intuicionista nos explica, intuitivamente, que estamos certos em afirmar  $A \rightarrow B$  se e somente se possuímos um método de construção capaz de transformar uma prova (hipotética) de A em uma prova de B. Considerando essa definição da implicação, se uma implicação linear intuicionista  $A \multimap B$  T ocorre em uma árvore, podemos tomar como certo que possuímos um método capaz de converter qualquer prova de A em uma prova de B. Entretanto, o fato de possuímos tal método não nos garante que exista, no momento atual, uma prova de A. A regra para a implicação linear intuicionista deve então refletir nosso momento epistêmico atual, ou não possuímos uma prova efetiva de A, ou possuímos uma prova de A e a convertemos em uma prova de B. Dessa forma, a regra para  $A \multimap B$  T bifurca em A F e B T, assim como a regra clássica [Fitting 1999].

$$\frac{\Gamma, A^\perp \Rightarrow \quad \Sigma, B, D^\perp \Rightarrow}{\Gamma, \Sigma, A \multimap B, D^\perp \Rightarrow} \mapsto \begin{array}{c} (A \multimap B) T \\ / \quad \backslash \\ A F \quad B T \\ | \quad | \\ \Gamma T \quad \Sigma T \end{array}$$

O caso da implicação negada é um pouco mais complicado. Suponha uma ocorrência de  $(A \multimap B) F$  em uma árvore de derivação. Seguindo a definição de Heyting, sabemos que, uma vez que a fórmula é falsa, não possuímos um método para converter provas de A em provas de B, mas isso não diz nada sobre a existência ou não de uma prova para A. A falsidade da implicação nos diz apenas que existe um estado de coisas, não necessariamente atual, em que possuímos uma prova de A e não possuímos uma prova de B. Podemos perceber aqui a introdução de um aspecto temporal na implicação, podemos

inferir, a partir da falsidade de  $(A \multimap B)$ , que no futuro haverá uma situação em que somos capazes de construir uma prova para  $A$  sem construir uma prova para  $B$ . Devemos nos perguntar agora o que acontece com as hipóteses que ocorrem acima de  $(A \multimap B)$   $F$  quando damos esse "salto" para o futuro. As hipóteses com rótulos  $T$  devem continuar disponíveis, pois uma vez que uma fórmula é demonstrada, ela continua demonstrada para sempre. As hipóteses  $F$ , por sua vez, devem ser descartadas (na terminologia que estamos empregando a fórmula deve ser utilizada e sinalizada com  $\surd$ ), pois o fato de uma fórmula  $A$  não possuir uma prova no momento atual não garante que não teremos uma prova de  $A$  no futuro.

$$\frac{\Gamma, A, B^\perp \Rightarrow}{\Gamma, (A \multimap B)^\perp \Rightarrow} \mapsto \begin{array}{c} (A \multimap B) \ F \\ | \\ A \ T \\ | \\ B \ F \end{array}$$

**Negação:** As regras para negação são um caso particular da implicação. Dado que  $A^\perp$  é definido como  $A \multimap \perp$ , a regra  $A^\perp T$  replica a regra de  $\multimap$ -T, bifurcando em  $A F$  e  $\perp T$ . Porém, o ramo gerado com  $\perp T$  deve ser excluído, pois o  $\perp$  sempre é falso. A regra para  $^\perp$ -F, por sua vez, replica a regra para  $\multimap$ -F. Obtemos  $A T$  e todas as fórmulas acima com rótulos  $F$  são descartadas (utilizadas).

$$\frac{\Gamma, A^\perp \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A} \mapsto \begin{array}{c} A^\perp \ T \\ | \\ A \ F \end{array} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A^\perp}{\Gamma, A \Rightarrow} \mapsto \begin{array}{c} A^\perp \ F \\ | \\ A \ T \end{array}$$

**Bang:** As regras para operador bang também são bem simples. No caso de uma ocorrência de uma fórmula  $!A T$ , podemos utilizar a fórmula  $A$  quantas vezes forem necessário, inclusive nenhuma vez como no caso do weakening com o bang, contornando a restrição linear sobre a utilização das fórmulas. No caso de  $!A$  acompanhado do rótulo  $F$ , apenas eliminamos o operador modal e mantemos o rótulo e gerando uma "barreira modal" que só pode ser ultrapassada por fórmulas exponenciais. A introdução da barreira corresponde às restrições da regra de  $Cs$  em que as fórmulas do contexto devem estar acompanhadas de outras fórmulas com exponenciais [R. Meyer and Belnap 1995]. O caso da regra para contração do Bang nos permite recuperar a contração, gerando duas cópias da fórmula a qual a regra de contração foi aplicada.

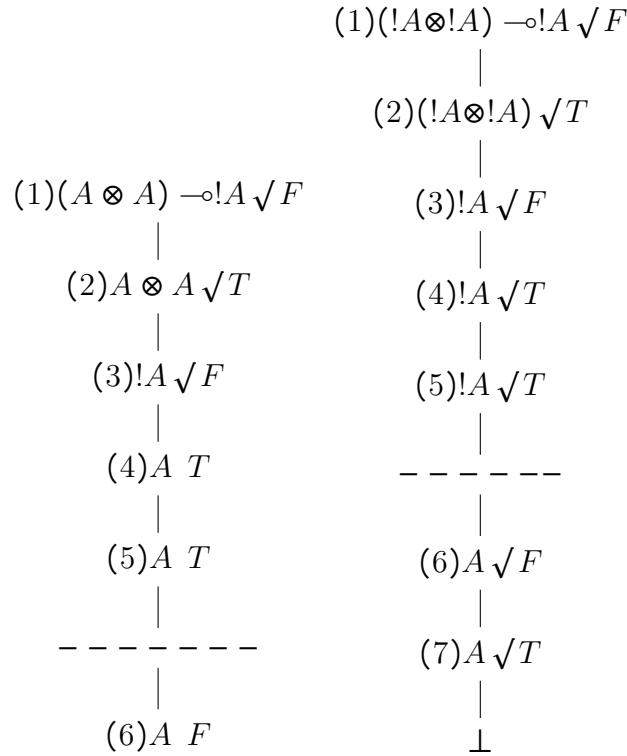
$$\frac{\Gamma, A, D^\perp \Rightarrow}{\Gamma, !A, D^\perp \Rightarrow} \mapsto \begin{array}{c} !A \ T \\ A \ T \end{array} \quad \frac{\Gamma, D^\perp \Rightarrow}{\Gamma, !A, D^\perp \Rightarrow} \mapsto \begin{array}{c} !AT \ \surd \\ \pi \end{array}$$

$$\frac{! \Gamma, A^\perp \Rightarrow}{! \Gamma, !A^\perp \Rightarrow} \mapsto \begin{array}{c} !A \ F \\ \text{---} \\ A \ F \end{array} \quad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow D}{\Gamma, !A \Rightarrow D} \mapsto \begin{array}{c} !A \ T \\ \pi \\ !A \ T \\ !A \ T \end{array}$$

#### 4. Exemplos de Árvores

Apresentemos agora dois exemplos de árvores do nosso sistema. A árvore da esquerda é uma árvore aberta para a fórmula  $(A \otimes A) \multimap !AF$ . Começamos aplicando a regra  $\multimap$ -F, utilizando (1) e gerando (2) e (3). Então aplicamos a regra para  $\otimes$ -T, utilizando (2) e

gerando (4) e (5). Em seguida aplicamos a regra para o  $!-F$ , gerando (6) e adicionando uma barreira entre (5) e (6). Como podemos ver, a árvore é aberta, pois a barreira não permite que o ramo seja fechado com (4) ou (5) e (6). A árvore da direita é uma árvore fechada para  $(!A \otimes !A) \multimap !A$ . Começamos aplicando a regra  $\multimap-F$ , utilizando (1) e gerando (2) e (3). Em seguida aplicamos a regra para  $\otimes-T$ , utilizando (2) e gerando (4) e (5). Então aplicamos a regra  $!-F$ , gerando uma barreira e o nós (6). Usamos (4) para ultrapassar a barreira e gerar (7), fechando o ramo. A árvore é fechada, pois o nós (5) é utilizado vacuamente.



## 5. Corretude e Completude

Os teoremas de corretude e completude funcionam como certificados de qualidade para os sistemas dedutivos. Enquanto o teorema de corretude garante que as derivações possuem um bom comportamento semântico ao demonstrar que o sistema dedutivo gera provas apenas para fórmulas válidas, o teorema de completude, por sua vez, garante que todas as fórmulas válidas possuem uma prova dentro do sistema dedutivo.

Usualmente, o teorema de corretude ( $\vdash A \Rightarrow \models A$ ) é demonstrado por indução no comprimento da derivação, enquanto o teorema de completude ( $\models A \Rightarrow \vdash A$ ) é tipicamente <sup>2</sup> demonstrado pela estratégia de Henkin. Neste artigo, porém, iremos adotar uma estratégia de prova indireta. Nesta estratégia, iremos apresentar uma tradução entre derivações de tableaux e cálculo de sequentes, aproveitando as provas de corretude e completude apresentada por [Okada 1998] para um cálculo de sequentes para  $L_{Lc}$ . Portanto, a corretude e completude do nosso tableau é relativa a corretude e completude do cálculo do sequentes adaptado de Okada.

<sup>2</sup>Existem outras formas de provar diretamente a corretude, como a estratégia de Beth ou a de Kálmar.

**Teorema 1 (Completeness):** Se existe uma prova para o sequente  $\Gamma \Rightarrow D$ , então existe pelo menos uma árvore de dedução para  $\Gamma \vdash D$  que é fechada.

Prova por indução no comprimento da derivação. Devemos definir uma função de tradução  $f_1[\pi]$  capaz de transformar as derivações de **Cs** em árvores de **Tx**. A função é definida pela análise de cada operador. Segue abaixo um caso como exemplo, os outros casos funcionam de maneira análoga<sup>3</sup>:

**Caso I: Bang à direita**

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\pi_1}{\Gamma, A^\perp \Rightarrow} \frac{}{\Gamma, !A^\perp \Rightarrow}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash T \\ | \\ A \vdash F \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nós  $!A^\perp$  ao topo da derivação e incluir a "barreira" acima da fórmula negada. Obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c} !A \vdash F \\ | \\ \Gamma \vdash T \\ | \\ \hline A \vdash F \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

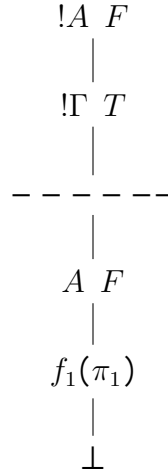
**Teorema 2 (Correctness):** Se temos uma árvore fechada para  $\Gamma \vdash D$  e  $D \Rightarrow \Gamma$ , então existe uma prova para o sequente  $\Gamma \Rightarrow D$  em **Cs**.

Prova por indução no comprimento da derivação. Devemos definir uma função de tradução  $f_2[\pi]$  capaz de transformar as árvores de **Tx** em provas de **Cs**. A função é definida pela análise de cada operador. Segue abaixo um exemplo, os outros casos funcionam de maneira análoga e serão apresentados na versão completa do artigo:

<sup>3</sup>A prova completa pode ser encontrada em <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/58715/58715.PDF>

### Caso I: Negação do bang

Suponha a seguinte árvore fechada:



Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{\pi_1}{!\Gamma \Rightarrow A}$$

Basta aplicar a regra para negação do bang e obtemos:

$$\frac{\frac{\pi_1}{!\Gamma \Rightarrow A}}{!\Gamma \Rightarrow !A}$$

## 6. Conclusão

Neste artigo apresentamos um **Tx** correto e completo para a Lógica Linear intuicionista. O sistema apresentado corresponde a versão intuicionista do **Tx** para  $L_{Lc}$  de [R. Meyer and Belnap 1995]. O **Tx** apresentado possui duas principais vantagens em relação a outros **Tx** encontrados na literatura (e.g. [Mantel and Otten 1999]), nominalmente: i) possui regras para os operadores aditivos; ii) o sistema apresentado neste artigo é estritamente mais simples, uma vez que usa apenas rótulos de Fitting no lugar de noções algébricas mais complexas.

## Referências

- Fitting, M. (1999). General introduction. In M. D'Agostino, D. G. and Hähnle, R., editors, *Handbook of Tableau Methods*. Springer.
- M. D'Agostino, D. G. and Broda, K. (1999). Tableau methods for substructural logic. In M. D'Agostino, D. G. and Hähnle, R., editors, *Handbook of Tableau Methods*. Springer.
- Mantel, H. and Otten, J. (1999). lintap: A tableau prover for linear logic. In *TABLEAUX*.
- Okada, M. (1998). Introduction to linear logic: Expressiveness and phase semantics. In M. Dezani-Ciancaglini, M. O. and Takahashi, M., editors, *Mathematical Society of Japan Memories vol.2*.
- R. Meyer, M. M. and Belnap, N. (1995). Linear analytic tableaux. In P. Baumgarten, R. H. and Possega, J., editors, *Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods*. Springer.