Implicações Representáveis por Funções Overlap e Grouping

Cecilia Botelho[1], Alessandra Galvão[1],
Adenauer Yamin [1], Helida Santos [2], Renata Reiser [1]

[1]PPGC/CDTEC/UFPEL, Pelotas – RS – Brasil
[2]C3/FURG, Rio Grande – RS – Brasil

{argalvao,cscbotelho,reiser,adenauer}@inf.ufpel.edu.br
helida@furg.br

Abstract. *QL- and D-implications are usually generated by strong negations together with t-norms and t-conorms, which are restrictive, as they demand properties such as associativity and the neutral element. In order to simplify and provide more flexibility in the conditions defining constructive methods to generate such implications, we consider dual aggregations as overlap and grouping functions. Some examples illustrate the proposal methods.*

Resumo. *As implicações de QL e D são geralmente geradas por negações fortes e t-normas e t-conormas, agregadores que exigem propriedades como associatividade e elemento neutro. A fim de simplificar e dar mais flexibilidade nas condições que definem os métodos construtivos para gerar tais implicações, consideramos a negação fuzzy máxima e as construções duais de funções overlap e grouping. Alguns exemplos ilustram os métodos propostos.*

1. Introdução

No âmbito da lógica fuzzy, funções de implicação são um elemento importante de sua constituição. Definir e utilizar funções de implicação que consigam representar diferentes cenários em sistemas de inferência fuzzy é um desafio ainda em aberto, existindo diferentes classes de implicações representáveis. Dentre elas, destacam-se as classes QL- e D-implicações [Dimuro et al. 2019]. O objetivo desse artigo é explorar métodos construtivos de gerar implicações via conceitos de funções overlap e grouping, focando nas QL- e D-implicações, com vistas a simplificar e aportar mais flexibilidade a sua estrutura.

Este artigo apresenta na Seção 2 o conceito de negação e exemplos. Na Seção 3, estudam-se funções de agregação. E, na sequência descrevem-se as QL- e D-implicações, bem como os métodos de construir tais conectivos a partir de negações, funções grouping e overlap. Ao final, tem-se a conclusão e descrição da continuidade da pesquisa.

2. Negação fuzzy

Definição 1. *Uma função* $N\colon [0,1] \to [0,1]$ *é uma negação fuzzy se:* $\mathbf{N1}$ *é decrescente, i.e.,* $N(x) \leq N(y), \forall y \leq x$*, e* $\mathbf{N2}$ *satisfaz* $N(0) = 1$ *e* $N(1) = 0$ *(condições de fronteira).*

E ainda, N é forte se é involutiva ($N(N(x)) = x, \forall x \in [0,1]$), como a negação padrão $N_S(x) = 1 - x$. Mas, um contra-exemplo para a involução é a negação máxima:

$$N_{\top}(x) = \begin{cases} 0, \text{se } x = 0; \\ 1, \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

Sejam $F\colon [0,1]^n \to [0,1]$ e a negação forte $N\colon [0,1] \to [0,1]$. A função N-dual de F, indicada por $F^N : [0,1]^n \to [0,1]$, é definida pela expressão:

$$F^N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = N(F(N(x_1), N(x_2), \ldots, N(x_n))). \tag{2}$$

3. Funções de Agregações

Na Teoria dos Conjuntos, um operador de agregação caracteriza-se por agregar uma tupla de objetos que pertençam a um determinado conjunto, em um único objeto desse mesmo conjunto. No contexto da Lógica Fuzzy, os n valores em cada tupla são números reais valorados em $[0,1]$. Frequentemente, deve-se impor condições sobre uma função de agregação A, compatíveis com as aplicações na área. Recentemente, [Mesiar and Komornikova 1997] propuseram propriedades para operadores de agregação.

Um operador de agregação é uma função $A : [0,1]^n \to [0,1]$, que satisfaz:

A1 $A(x) = x, \forall x \in [0,1]$ (Identidade);
A2 $A(0,0,\ldots,0) = 0$ e $A(1,1,\ldots,1) = 1$ (Condições de Contorno);
A3 $A(x_1,\ldots,x_n) \leq A(x'_1,\ldots,x'_n)$ se $x_i \leq x'_i, \forall x_i, x'_i \in [0,1], i \in \mathbb{N}_n$. (Crescente).

Por **A1**, se A tem aridade-1, então coincide com a função identidade. Nas condições de contorno, atenta-se para o comportamento do agregador no pior e no melhor caso. Em **A2** parece ser fundamental na definição de operadores de agregação. Em [Mayor and Trillas 1986] foi proposta uma extensão para essa condição básica, apresentando condições fundamentais para um operador de agregação:

$$A(x,0) = A(1,0) \cdot x, \text{ e } A(x,1) = (1 - A(1,0)) \cdot x + A(1,0), \forall x \in [0,1].$$

Seguem outras propriedades para agregações fuzzy [Grabisch et al. 2011].

A4 $A(A(x_1,x_2),x_3) = A(x_1, A(x_2,x_3)), \forall x_1,x_2,x_3 \in [0,1]$ (Associatividade).

A5 $A(x_1,\ldots,x_n) \leq A(x'_1,\ldots,x'_n)$ se $x_i \geq x'_i$, $\forall i \in \mathbb{N}_n$, $x_i \in [0,1]$ (Decrescente).

A6 Seja $N_n = \{1,2,\ldots,n\}$ e $\sigma : N_n \to N_n$ uma σ-permutação, então:

$$A(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = A(x_1,x_2,\ldots,x_n), \forall x_i \in [0,1], i \in \mathbb{N}_n\text{(Simetria)}.$$

A7 $\exists e \in [0,1]\colon A(x_1,\ldots,x_{i-1},e,x_{i+1},\ldots,x_n) = A(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n), \forall x_i \in [0,1], i \in \mathbb{N}_n$ (e-Neutralidade).

A8 Seja $\{x_{1i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente, então

$$\lim_{n\to\infty} A(x_{1i}, x_2, \ldots, x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_{1i}, x_2, \ldots x_n), \forall x_i \in [0,1], i \in \mathbb{N}_n\text{(Continuidade)}.$$

A9 $A(A(x_1,x_2), A(x_3,x_4)) = A(A(x_1,x_3), A(x_2,x_4)), \forall x_i \in [0,1], i \in \mathbb{N}_4$ (Bissimetria).

A10 $\exists a \in [0,1]\colon A(x_1,\ldots,a,\ldots,x_n) = a, \forall x_i \in [0,1], i \in \mathbb{N}_n$ (a-Absorvência).

A11 $\exists x \in [0,1]\colon A(x,x,\ldots,x) = x$ (Idempotência).

A12 $\min_{i=1}^n(x_i) \leq A(x_1,x_2,...,x_n) \leq \max_{i=1}^n(x_i), \forall x_i \in [0,1], i \in \mathbb{N}_n$ (Compensação).

A13 $A(\alpha x_1,\ldots,x_n) = \ldots = A(x_1,\ldots,\alpha x_n)$, $\alpha \in [0,1]$, $x_i \in [0,1]$, $i \in \mathbb{N}_n$ (α-Migrativa).

3.1. Normas e Conormas Triangulares

A seguir, seguem conceitos, propriedades e exemplos de (co)normas triangulares [Klement and Navara 1999].

Definição 2. *Uma norma triangular (t-norma) é uma função* $T\colon [0,1]^n \to [0,1]$*, monotônica, associativa, simétrica e tem elemento* 1*-neutro.*

Definição 3. *Uma conorma triangular (t-conorma) é uma função* $S\colon [0,1]^n \to [0,1]$*, monotônica, associativa, simétrica e tem elemento* 0*-neutro.*

Exemplo 1. *Seguem exemplos de t-normas e t-conormas duais.*

As funções $T_M, S_M\colon [0,1]^2 \to [0,1]$*,* $T_M(x,y) = \min(x,y)$ *e* $T_M(x,y) = \max(x,y)$ *são denominadas* ***t-norma do mínimo*** *e* ***t-conorma do máximo****, respectivamente.*

As funções $T_P, S_P\colon [0,1]^2 \to [0,1]$*, dadas por* $T_P(x,y) = x.y$ *e* $S_P(x,y) = x + y - xy$ *são denominadas* ***t-norma do produto*** *e* ***t-norma da soma algébrica****, respectivamente.*

As funções $T_L, S_L\colon [0,1]^2 \to [0,1]$*, dadas por* $T_L(x,y) = \max(x+y-1,0)$ *e* $S_L(x,y) = \min(x+y,1)$ *são denominadas* ***t-norma e t-conorma de Łukasiewicz****, respectivamente.*

3.2. Funções Overlap

Considera-se a generalização de funções overlap binárias [Bedregal et al. 2013] e [Bustince et al. 2010], para o contexto n-dimencional.

Definição 4. *[Gómez et al. 2016, Def 3.1] Uma função overlap n-dimensional* $O\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *satisfaz, além das propriedades* $\mathbf{A3}$*,* $\mathbf{A6}$ *e* $\mathbf{A7}$*, as seguintes condições:*

(A14) $O(x_1,\ldots,x_n) = 0$ *se, e somente se* $\prod_{i=1}^n x_i = 0$*;*

(A15) $O(x_1,\ldots,x_n) = 1$ *se, e somente se* $\prod_{i=1}^n x_i = 1$*;*

Observe que na Definição 4, uma função overlap $O\colon [0,1]^n \to [0,1]$ satisfaz $\mathbf{A14}$, e de forma equivale, satisfaz a propriedade $\mathbf{A10}$ para 0-absorvência. Ou seja, a função overlap O tem 0 como elemento absorvente. E, a seguir, funções 0-overlap e 1-overlap são também estendidas para o cont]exto n-dimensional.

A Tabela 1 reporta da literatura, uma listagem das expressões de funções $O\colon [0,1]^n \to [0,1]$, e sua classe dentro dos operadores overlap.

Definição 5. *Considere uma função* $O\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *que verifica todas as condições da Definição 4, exceto a* $\mathbf{A14}$*, a qual substituída por:*

(A14') $O(x_1,\ldots,x_n) = 0$ *se* $\prod_{i=1}^n x_i = 0$*;*

então, tem-se que O é uma ***função*** 0***-overlap*** n***-dimensional****. Ainda, se a função* $O\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *verifica todas as condições da Def. 4, exceto* $\mathbf{A15}$*, a qual é substituída pela seguinte expressão:*

(A15') $O(x_1,\ldots,x_n) = 1$ *se* $\prod_{i=1}^n x_i = 1$*;*

então, tem-se que O é uma ***função*** 1***-overlap*** n***-dimensional****.*

Ao ampliar e combinar os conceitos de funções 0-overlap e 1-overlap, o conceito de funções overlap geral é definido como segue:

Definição 6. *[Miguel et al. 2019] Uma função* $O_G\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *que, além das propriedades* $\mathbf{A3}$*,* $\mathbf{A6}$ *e* $\mathbf{A7}$*, também satisfaz as condições* $\mathbf{A14'}$ *e* $\mathbf{A15'}$*, é denominada uma* ***função geral-overlap*** *(*g*-overlap).*

Tabela 1. Funções Overlap n-dimensionais

Expressões Analíticas	Tipo
$O_{EP}(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{1+\prod_{i=1}^{n}x_i(1-x_i)}$	overlap
$O_{mM}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\min\left(x_1,\ldots,x_n\right)\max\left(x_1^2,\ldots,x_n^2\right)$	overlap
$O_s(x_1,\ldots,x_n)=\sin\frac{\pi}{2}(\prod_{i=1}^{n}x_i)^p, p>0$	overlap
$O_m(x_1,\ldots,x_n)=\min_{1\leq i\leq n}x_i^p, p>0$	overlap
$O_{GM}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}x_i^p, p>0$	overlap
$O_{HM}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\begin{cases}\frac{n}{\frac{1}{x_i}+\ldots+\frac{1}{x_n}}, \text{ se } x_i>0,\\ 0, \text{caso contrário.}\end{cases}$	overlap
$O_L\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\max((\Sigma_{i=1}^{n}x_i)-(n-1),0)$	0-overlap
$O_U\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\begin{cases}n\prod_{i=1}^{n}x_i, \text{ se } \prod_{i=1}^{n}x_i\leq\frac{1}{n},\\ 1, \text{caso contrário.}\end{cases}$	1-overlap
$O_G\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\begin{cases}nO_L(x_1,\ldots,x_n), \text{ se } O_L(x_1,\ldots,x_n)\leq\frac{1}{n},\\ 1, \text{caso contrário.}\end{cases}$	g-overlap

Vale ressaltar a diferença entre a classe de funções overlap n-dimensionais e a classe de funções geral-overlap. Sendo que a primeira tem condições de contorno suficientes e necessárias ($\mathbf{A14}$ e $\mathbf{A15}$), enquanto a última tem apenas condições suficientes ($\mathbf{A14}'$ e $\mathbf{A15}'$). Isso significa que a classe de funções g-overlap pode resultar em 0 para alguns vetores $(x_1,...,x_n)$, tais que $x_i\neq 0$, $\forall i\in\mathbb{N}_n$. Da mesma forma, pode resultar em 1 para os vetores $(x_1,...,x_n)$, tais que $x_i\neq 1$, para algum $i\in\mathbb{N}_n$. Matematicamente, isso significa que a classe de funções g-overlap pode ter divisores zero e divisores de um.

Como consequência imediata da Definição 6, segue a proposião:

Proposição 1. *Seja $O\colon[0,1]^n\to[0,1]$ uma função overlap n-dimensional, 0-overlap ou 1-overlap, então O também é uma função geral-overlap.*

Proposição 2. *A função $G\colon[0,1]^n\to[0,1]$ é uma função geral-overlap se e somente se, pode ser definida pela expressão: $G(x_1,\ldots,x_n)=\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{f(x_1,\ldots,x_n)+g(x_1,\ldots,x_n)}$ sempre que $f\colon[0,1]^n\to[0,1]$ é uma função crescente ($\mathbf{A3}$) e $g\colon[0,1]\to[0,1]$ é uma função decrescente ($\mathbf{A5}$) e, ambas além de verificar as propriedades $\mathbf{A4}$, $\mathbf{A8}$ também satisfazem as seguintes condições:*

A14” *Se $\prod_{i=1}^{n}x_i=0$ então $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$;*

A15” *Se $\prod_{i=1}^{n}x_i=1$ então $g\left(x_1,\ldots,x_n\right)=1$;*

A16 $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)+g\left(x_1,\ldots,x_n\right)\neq 0$.

Remark 1. *[Paiva et al. 2021] Dadas duas funções Overlap $O_1,O_2\colon[0,1]^n\to[0,1]$, podemos construir exemplos interessantes de funções overlap, a partir de operados de máximo, mínimo e somas conexas, como:*

1. $(O_1\wedge O_2)(x_1,\ldots,x_n)=\min(O_1(x_1,\ldots,x_n),O_2(x_1,\ldots,x_n))$;
2. $(O_1\vee O_2)(x_1,\ldots,x_n)=\max(O_1(x_1,\ldots x_n),O_2(x_1,\ldots,x_n))$;
3. $O_{SC}(x,y)=wO_1(x_1,\ldots,x_n)+(1-w)O_2(x_1,\ldots,x_n)$, $\forall w\in[0,1]$.

3.3. Funções Grouping

Nesta sessão, focamos no conceito de funções grouping, como complemento natural de funções overlap, apresentado por [Bustince et al. 2012, Miguel et al. 2019].

Definição 7. *[Gómez et al. 2016] Uma função $G\colon [0,1]^n \to [0,1]$ é uma função grouping n-dimensional se verifica $\mathbf{A3}$, $\mathbf{A6}$ e $\mathbf{A8}$ e as seguintes condições:*

A17 $G(x_1,\ldots,x_n) = 0$ *se, e somente se,* $x_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}_n$;

A18 $G(x_1,\ldots,x_n) = 1$ *se, e somente se,* $\exists i \in \mathbb{N}_n$ *tal que* $x_i = 1$.

Definição 8. *[Dimuro et al. 2019, Def 9] Uma função $G_g\colon [0,1]^n \to [0,1]$ é uma função geral-grouping (indicada por G_g) se verifica $\mathbf{A3}$, $\mathbf{A6}$ e $\mathbf{A8}$ e as seguintes condições:*

A17' $O(x_1,\ldots,x_n) = 0$ *se* $\sum_{i=1}^n x_i = 0$;

A18' $G(x_1,\ldots,x_n) = 1$ *se* $\exists i \in \mathbb{N}_n$ *tal que* $x_i = 1$.

Exemplo 2. *Na Tabela 2, veja as funções grouping, como construções N_S-duais referentes às funções overlaping n-dimensionais da Tabela 1.*

Tabela 2. Funções grouping n-dimensionais

Expressões Analíticas	Tipo
$G_{EP}(x_1,\ldots,x_n) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^n(1-x_i)}{1+\prod_{i=1}^n x_i(1-x_i)}$	grouping
$G_{mM}(x_1,\ldots,x_n) = 1 - \min(1-x_1,\ldots,1-x_n)\max\left((1-x_1)^2,\ldots,(1-x_n)^2\right)$	grouping
$G_s(x_1,\ldots,x_n) = 1 - \sin\frac{\pi}{2}(\prod_{i=1}^n(1-x_i))^p, p>0$	grouping
$G_O(x_1,\ldots,x_n) = \min_{1\le i\le n}(1-x_i)^p, p>0$	grouping
$G_{GM}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^n(1-x_i)^P, p>0$	grouping
$G_{HM}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{\frac{1}{1-x_i}+\ldots+\frac{1}{1-x_n}}, \text{ se } x_i < 1, \\ 1, \text{caso contrário.} \end{cases}$	grouping
$G_L(x_1,\ldots,x_n) = \max((1-\Sigma_{i=1}^n x_i), 0)$	1-grouping
$G_U(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n x_i, \text{ se } \prod_{i=1}^n x_i \le \frac{n^2-1}{n}, \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$	0-grouping
$G_G(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} nG_L(x_1,\ldots,x_n), \text{se } G_L(x_1,\ldots,x_n) \le \frac{n^2-1}{n}, \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$	g-grouping

Proposição 3. *[Dimuro et al. 2019, Prop 1] Seja $G\colon [0,1]^n \to [0,1]$ uma função grouping n-dimensional, então F também é uma função geral-grouping.*

4. Implicações Fuzzy

Na sequência, estudamos as propriedades de implicações fuzzy, considerando duas classes de implicações representáveis: QL-implicações e D-implicações.

Definição 9. *[Fodor 1995] Uma implicação fuzzy $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ verifica as condições:*

I1 *Se* $x \le z$ *então* $I(x,y) \ge I(z,y)$ *(antitonicidade no primeiro argumento);*
I2 *Se* $y \le z$ *então* $I(x,y) \le I(x,z)]$ *(isotonicidade no segundo argumento);*
I3 $I(1,1) = 1$;
I4 $I(0,0) = 1$;

I5 $I(1,0)=0$;

Pela Definição 9, uma implicação fuzzy $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ satisfaz as condições:

I6 $I(x,1)=1, \forall x \in [0,1]$; (dominância da verdade do consequente);
I7 $I(0,y)=1, \forall y \in [0,1]$ (dominância da falsidade do antecedente).

E, neste contexto, também satisfaz a seguinte condição:

I8 $I(0,1)=1$ (condição de normalidade).

Logo, uma implicação fuzzy estende a implicação clássica. E, tem-se condições extras:

I9 $I(1,y)=y, \forall y \in [0,1]$ (princípio da neutralidade);
I9' $I(1,y)\leq y, \forall y \in [0,1]$;
I10 $I(x,y)=I(N(y),N(x)), \forall x,y \in [0,1]$ (simetria contrapositiva).

4.1. QL-implicações e D-implicações

Esta seção reporta as definições e principais propriedades de QL-implicações e D-implicações [Baczyński and Jayaram 2010].
Definição 10. *Uma função $I_{S,N,T}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ é uma QL-implicação se existir uma t-conorma $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, uma de negação fuzzy forte $N\colon [0,1]\to[0,1]$ e uma t-norma $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, tais que*

$$I_{S,N,T}(x,y)=S(N(x),T(x,y)), \forall x,y,z \in [0,1]. \tag{3}$$

Definição 11. *Uma função $I_{S,T,N}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ é uma D-implicação, sempre que existir uma t-conorma $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, uma t-norma $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ e, uma negação fuzzy forte $N\colon [0,1]\to[0,1]$, tais que:*

$$I_{S,T,N}(x,y)=S(T(N(x),N(y)),y), \forall x,y,z \in [0,1]. \tag{4}$$

QL-implicadores $I_{S,N,T}$ e D-implicadores $I_{S,T,N}$ estão relacionados pela simetria contrapositiva ($\mathbf{A10}$) com respeito à negação forte N, ou seja:

$$I_{S,T,N}(N(y),N(x)) = I_{S,N,T}(x,y) \text{ e } I_{S,N,T}(N(y),N(x)) = I_{S,T,N}(x,y).$$

4.2. Implicações Explicitamente Definidas por Funções Overlap e Grouping

A seguir, estendemos resultados apresentados em [Shi et al. 2008, Prop. 3.1].
Proposição 4. *Seja $N\colon [0,1]\to[0,1]$ uma negação fuzzy, considere $O\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma função overlap bivariante, verificando a condição*

A10(i) $O(1,y)\leq y$, *$\forall y \in [0,1]$;*

e, dada $G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma função grouping bivariante, verificando a condição

A10(ii) $G(0,y)\leq y$, *$\forall y \in [0,1]$.*

Então, o operador $I_{G,N,O}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ definido pela expressão

$$I_{G,N,O}(x,y)=G(N(x),O(x,y)), \forall x,y \in [0,1], \tag{5}$$

verifica as propriedades $\mathbf{I2}-\mathbf{I5}$ *e ainda,* $\mathbf{I7}$*,* $\mathbf{I8}$ *e* $\mathbf{I9}'$*.*

Prova. *Se N é uma negação fuzzy, O uma função overlap verificando $\mathbf{A10(i)}$ e G uma função grouping verificando $\mathbf{A10(ii)}$, tem-se então os seguintes resultados:*

I2 *Se* $y \leq y'$, $I_{G,N,O}(x,y) = G(N(x), O(x,y)) \leq G(N(x), O(x,y')) = I_{G,N,O}(x,y')$.
I3 $I_{G,N,O}(1,1) = G(N(1), O(1,1)) = G(0, O(1,1)) = G(0,1) = 1$;
I4 $I_{G,N,O}(0,0) = G(N(0), O(0,0)) = G(1, O(0,0)) = G(1,0) = 1$;
I5 $I_{G,N,O}(1,0) = G(N(1), O(1,0)) = G(0, O(1,0)) = G(0,0) = 0$;
I7 $I_{G,N,O}(0,y) = G(N(0), O(0,y)) = G(1,0) = 1$;
I8 $I_{G,N,O}(0,1) = G(N(0), O(0,1)) = G(1,1) = 1$;
I9' $I_{G,N,O}(1,y) = G(N(1), O(1,y)) \leq G(0,y) \leq y$, *por* $\mathbf{A10(i)}$ *e* $\mathbf{A10(ii)}$.

Proposição 5. *Sejam $N\colon [0,1] \to [0,1]$ uma negação fuzzy, $O\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma função overlap e $G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma função grouping verificando a condição $\mathbf{A10(ii)}$. Então, o operador $I_{G,O,N} : [0,1]^2 \to [0,1]$ definido por*

$$I_{G,O,N}(x,y) = G(O(N(x), N(y)), y), \forall x, y \in [0,1], \tag{6}$$

é uma D-Implicação que verifica as propriedades $\mathbf{I1}$, $\mathbf{I3} - \mathbf{I6}$ *e ainda,* $\mathbf{I8}$ *e* $\mathbf{I9'}$.
Prova. *Se N é uma negação fuzzy, O uma função overlap verificando $\mathbf{A10(i)}$ e G uma função grouping verificando $\mathbf{A10(ii)}$. Tem-se então os seguintes resultados:*

I1 *Se* $x \leq x'$, $I_{G,O,N}(x,y) = G(O(N(x), N(y)), y) \geq G(O(N(x'), N(y)), y) = I_{G,O,N}(x',y)$.
I3 $I_{G,O,N}(1,1) = G(O(N(1), N(1)), 1) = G(O(0,0), 1) = G(0,1) = 1$;
I4 $I_{G,O,N}(0,0) = G(O(N(0), N(0)), 0) = G(O(1,1), 0) = G(1,0) = 1$;
I5 $I_{G,O,N}(1,0) = G(O(N(1), N(0)), 0) = G(O(0.1), 0) = G(0,0) = 0$;
I6 $I_{G,O,N}(x,1) = G(O(N(x), N(1)), 1) = G(O(N(x), 0), 1) = G(0,1) = 1$;
I8 $I_{G,O,N}(0,1) = G(O(N(0), N(1)), 1) = G(O(1,0), 1) = G(0,1) = 1$;
I9' $I_{G,O,N}(1,y) = G(O(N(1), N(y)), y) = G(O(0, N(y)), y) = G(0,y) \leq y$, *por* $\mathbf{A10(ii)}$.

As funções overlap e grouping bivariantes, na Tabela 3, ilustram os resultados das Proposições 4 e 5, consideram-se os operadores $I_{G,N,O}$ e $I_{G,O,N}$ explicitamente definidas considerando a função negação $N_{\top}$ dada na Eq.(1).

Tabela 3. Construções $N_{\top}$-duais de pares grouping e overlap bivariantes

Funções Grouping	Funções Overlaping
$G_2^V(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-(1-x)^2(1-y)^2), \text{se } x,y \in [0,\frac{1}{2}]; \\ \max\{x,y\}, \text{ caso contrário.} \end{cases}$	$O_2^V(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+(2x-1)^2(2y-1)^2, \text{se } x,y \in [0,0.5[\\ \min\{x,y\}, \text{caso contrário.} \end{cases}$
$G_{DB}(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y-2xy}{2-(x+y)} & \text{se } x+y \neq 2; \\ 0, & \text{se } x+y = 2. \end{cases}$	$O_{DB}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x+y} & \text{se } x+y \neq 0; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$
$G_{m\frac{1}{2}}(x,y) = 1 - \min\{\sqrt{1-x}, \sqrt{1-y}\}$	$O_{m\frac{1}{2}}(x,y) = \min\{\sqrt{x}, \sqrt{y}\}$

5. Conclusão

Neste artigo estudamos a aplicação de funções de overlap e grouping para construção de QL- e D-implicações. A proposta recupera as características destas funções propondo um modelo construtivo para a geração de implicações fuzzy. Exemplos de classes são apresentados de forma a validar os métodos. O artigo está estruturado em seções, as quais apresentam inicialmente as definições teóricas do trabalho, seguido da proposta e, finalmente, apresenta exemplos de aplicação da metodologia estudada.

Tabela 4. Implicações geradas por funções grouping G e overlap O

Funções $I_{G,N,O}$	Funções $I_{G,O,N}$
$I_{G_2^V,N_T,O_2^V}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1+(2y-1)^2\right), \text{se } x=1 \text{ e } y\geq 0.5;\\ \frac{1}{2}\left(1-(1-y)^2\right), \text{se } x=1 \text{ e } y<0.5;\\ 1, \text{ caso contrário.}\end{cases}$	$I_{G_2^V,O_2^V,N_T}(x,y)=\begin{cases}y, \text{se } x=1\text{e } y\geq 0.5;\\ \frac{1}{2}\left(1-(1-y)^2\right), \text{se } x=1\text{e } y<0.5;\\ 1, \text{caso contrário.}\end{cases}$
$I_{G_{DB},N_T,O_{DB}}(x,y)=\begin{cases}y, \text{se } x=1;\\ 1, \text{caso contrário.}\end{cases}$	$I_{G_{DB},O_{DB},N_T}(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{2-y}, \text{se } x=1;\\ 1, \text{caso contrário.}\end{cases}$
$I_{Gm_{\frac{1}{2}},N_T,Om_{\frac{1}{2}}}(x,y)=\begin{cases}1-\sqrt{1-\sqrt{y}}, \text{se } x=1;\\ 1, \text{ caso contrário.}\end{cases}$	$I_{Gm_{\frac{1}{2}},Om_{\frac{1}{2}},N_T}(x,y)=\begin{cases}1-\sqrt{1-y}, \text{se } x=1;\\ 1, \text{ caso contrário.}\end{cases}$

Referências

Baczyński, M. and Jayaram, B. (2010). QL-implications: Some properties and intersections. *Fuzzy Sets Syst.*, 161:158–188.

Bedregal, B., Dimuro, G. P., Bustince, H., and Barrenechea, E. (2013). New results on overlap and grouping functions. *Information Sciences*, 249:148–170.

Bustince, H., Fernandez, J., Mesiar, R., Montero, J., and Orduna, R. (2010). Overlap functions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, 72(3):1488–1499.

Bustince, H., Pagola, M., Mesiar, R., Hullermeier, E., and Herrera, F. (2012). Grouping, overlap, and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparisons. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(3):405–415.

Dimuro, G. P., Santos, H. S., Bedregal, B. R. C., Borges, E. N., Palmeira, E. S., Fernández, J., and Bustince, H. (2019). On D-implications derived by grouping functions. In *2019 IEEE Intl Conf. on Fuzzy Systems, LA, USA, June 23-26, 2019*, pages 1–6. IEEE.

Fodor, J. C. (1995). Contrapositive symmetry of fuzzy implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 69(2):141–156.

Gómez, D., Rodríguez, J. T., Montero, J., Bustince, H., and Barrenechea, E. (2016). n-dimensional overlap functions. *Fuzzy Sets Syst.*, 287:57–75.

Grabisch, M., Marichal, J., Mesiar, R., and Pap, E. (2011). Aggregation functions: Construction methods, conjunctive, disjunctive and mixed classes. *Inf. Sci.*, 181(1):23–43.

Klement, E. P. and Navara, M. (1999). A survey on different triangular norm-based fuzzy logics. *Fuzzy Sets and Systems*, 101(2):241–251.

Mayor, G. and Trillas, E. (1986). On the representation of some aggregation functions. In *Proceeding of ISMVL*, pages 111–114.

Mesiar, R. and Komornikova, M. (1997). Aggregation operators. *Proceeding of the XI Conference on applied Mathematics PRIM 96*, pages 193–211.

Miguel, L. D., Gómez, D., Rodríguez, J. T., Montero, J., Bustince, H., Dimuro, G. P., and Sanz, J. A. (2019). General overlap functions. *Fuzzy Sets Syst.*, 372:81–96.

Paiva, R., Santiago, R. H. N., Bedregal, B. R. C., and Palmeira, E. S. (2021). Lattice-valued overlap and quasi-overlap functions. *Inf. Sci.*, 562:180–199.

Shi, Y., Van Gasse, B., Ruan, D., and Kerre, E. (2008). On the first place antitonicity in ql-implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(22):2988–3013. Theme: Logic and Algebra.