Representabilidade de Operadores via Ordens Admissíveis

Lidiane da Silva [1], Guilherme Schneider [1], Adenauer Yamin [1], Helida Santos [2], Benjamin Bedregal [3], Renata Reiser [1]

[1]PPGC/CDTEC/UFPEL, Pelotas – RS – Brasil
[2]C3/FURG, Rio Grande – RS – Brasil
[3]DIMAP/UFRN, Natal – RN – Brasil

{lcdsilva,gbschneider,adenauer,reiser}@inf.ufpel.edu.br
helida@furg.br
bedregal@dimap.ufrn.br

Abstract. *Este trabalho apresenta um estudo sobre a representabilidade de conectivos fuzzy valorados intervalarmente considerando ordens parciais e admissíveis. Nossa abordagem considera aquelas ordens baseadas em funções de agregação injetivas que permitem a construção de operadores fuzzy valorados intervalarmente. Um resultado imediato é a construção da implicação usada na Lógica Quântica, conhecida como QL-implicação, que em nossa proposta é generalizada para abordagem intervalar, via classe de ordem admissíveis.*
Keywords: *Operadores fuzzy valorados intervalarmente, Lógica fuzzy valorada intervalarmente, QL-implicações, ordens admissíveis.*

1. Introdução

A lógica fuzzy valorada intervalarmente (IvFL) [Zadeh 1975], vista no sentido estrito, tem a capacidade de lidar com a incerteza e também agrega precisão na representação dos graus de pertinência que definem os conjuntos fuzzy.

A análise de conectivos representáveis na IvFL se fundamenta no princípio de extensão e representabilidade dos conjuntos fuzzy [Zadeh 1965]. Sendo assim, uma ordem parcial, considera as representações canônica, intervalar e ainda a pseudo-representação, na interpretação dos graus de pertinência de uma implicação fuzzy relacionada à regra condicional em sistemas de inferência baseados em lógica fuzzy, modelando o (a falta de) conhecimento sobre o valor de uma variável. Nesse sentido, a melhor representação de um conectivo fuzzy, resulta na correta interpretação de uma variável que agrega tanto a incerteza como a imprecisão nos possíveis conjuntos considerados no sistema de inferência fuzzy [Hickey et al. 2001].

Para atingir nossos objetivos, focamos nosso estudo na representabilidade de vários operadores fuzzy, considerando ordens parciais e introduzindo uma classes de ordens admissíveis. Nesse contexto, estudamos algumas funções intervalares como t-(co)normas, negações fuzzy e implicações, incluindo a classe de QL-implicações, que foi estendida para abordagem intervalar considerando as classes de ordens admissíveis.

Este artigo está organizado da seguinte forma: As Seções 2 e 3 estudamos as possíveis formas de ordenação (parcial e total) dos conjuntos fuzzy valorados intervalarmente e a representabilidade dos conectivos pertencentes a estes conjuntos. A proposta de uma nova forma de representação com respeito a ordens admissíveis, juntamente com a nova família de ordens admissíveis é apresentada na Seção 4. Nossas conclusões estão na Seção 5.

2. Ordens Parciais e Admissíveis em $L([0,1])$

Este estudo considera as principais classes de conectivos fuzzy valorados intervalarmente, analisando as propriedades relacionadas à representabilidade.

Consideramos $L([0,1]) = \{[x,y] \mid 0 \le x \le y \le 1\}$ como a família de todos os valores fuzzy intervalares. As projeções $l, r : L([0,1]) \to [0,1]$ são definidas respectivamente, por $l([x_1,x_2]) = x_1$ e $r([x_1,x_2]) = x_2$. Para $X \in L([0,1])$, $l(X)$ e $r(X)$ podem também ser denotadas respectivamente, por $\underline{X}$ e $\overline{X}$. E, seja $D(L([0,1])) = \{[x,y] \in L([0,1]) | x = y\}$ o conjunto de todos os intervalos degenerados, denotando um elemento degenerado como $[x,x] = \mathbf{x}$, para $x \in [0,1]$. Sejam as ordens parciais em $L([0,1])$:
O1 *Ordem de Inclusão*: $X \subseteq Y$ sss $\underline{X} \geqslant \underline{Y}$ e $\overline{X} \leqslant \overline{Y}$;
O2 *Ordem Produto (Usual)*: $X \le Y$ sss $\underline{X} \leqslant \underline{Y}$ e $\overline{X} \leqslant \overline{Y}$.
Os intervalos degenerados $[0,0] = \mathbf{0}, [1,1] = \mathbf{1} \in \mathbb{D}(L([0,1]))$ são, respectivamente, o menor e o maior elementos em $(L([0,1], \le)$.

A seguir, tem-se as ordens admissíveis [Bustince et al. 2013, Santana et al. 2020].

Definição 1. *[Bustince et al. 2013] Uma ordem $\preceq_{L([0,1])}$ é admissível em $L([0,1])$ se:*
(i) $\preceq_{L([0,1])}$ é uma ordem linear em $L([0,1])$, e
(ii) $\preceq_{L([0,1])}$ refina uma ordem parcial $\le$, i.e., $\forall X_1, X_2 \in L([0,1])$, $X_1 \le X_2 \Rightarrow X_1 \preceq_{L([0,1])} X_2$.

Os intervalos degenerados $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ também são respectivamente, o menor e o maior elementos para qualquer intervalo $\langle L([0,1]), \preceq_{L([0,1])}\rangle$.
Exemplo 1. *Principais ordens admissíveis consideradas neste estudo:*

(i) $X \preceq_{Lex1} Y \Leftrightarrow \underline{X} < \underline{Y} \vee (\underline{X} = \underline{Y} \wedge \overline{X} \le \overline{Y})$;
(ii) $X \preceq_{Lex2} Y \Leftrightarrow \overline{X} < \overline{Y} \vee (\overline{X} = \overline{Y} \wedge \underline{X} \le \underline{Y})$;
(iii) $X \preceq_{XY} Y \Leftrightarrow \underline{X} + \overline{X} < \underline{Y} + \overline{Y} \vee (\underline{X} + \overline{X} = \underline{Y} + \overline{Y} \wedge \overline{X} - \underline{X} \le \overline{Y} - \underline{Y})$

E, a classe de ordens admissíveis em $\langle L([0,1]), \preceq_A\rangle$ via funções injetivas A.
Teorema 2. *Seja $A\colon L([0,1]) \to [0,1]$ uma função crescente com respeito a ordem parcial $\le$, $A(\mathbf{0}) = 0$ e $A(\mathbf{1}) = 1$. A relação $\preceq_A$ em $L([0,1])$ definida por*

$$X \preceq_A Y \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y, \text{ ou} \\ A(X) < A(Y), \end{cases} \tag{1}$$

é uma ordem admissível em $L([0,1])$, quando A for injetiva.

Prova. A relação $\preceq_A$ é reflexiva e antissimétrica. Seja $X, Y, Z \in L([0,1])$ tal que $X \preceq_A Y$ e $Y \preceq_A Z$. Então, consideramos os seguintes casos: (i) Se $X = Y$ ou $Y = Z$, temos que $X \preceq_A Z$; (ii) Se $X \ne Y$ e $Y \ne Z$ então $A(X) < A(Y)$ e $A(Y) < A(Z)$ e portanto $A(X) < A(Z)$. Logo, $X \preceq_A Z$. (iii) Se $X \ne Y$ e $Y = Z$ então $A(X) < A(Y)$ e $A(Y) = A(Z)$, significa que $A(X) < A(Z)$. Assim, $X \preceq_A Z$. (iv) Se $X = Y$ e $Y \ne Z$, $A(X) = A(Y)$ e $A(Y) < A(Z)$, então $A(X) < A(Z)$. Assim, $X \preceq_A Z$. Com base nos casos vistos, tem-se uma relação transitiva $\langle L([0,1]), \preceq_A\rangle$. Para cada $X, Y \in L([0;1])$, vemos que: (i) No caso $A(X) < A(Y)$, isso implica que $X \preceq_A Y$; (ii) No caso $A(Y) < A(X)$, implica que $Y \preceq_A X$; e ainda, (iii) Se $A(X) = A(Y)$, desde que

A seja uma função injetiva, resulta em $X = Y$. Então, também temos uma relação total $\langle L([0,1]), \preceq_A\rangle$. Portanto, temos uma ordem linear $\langle L([0,1]), \preceq_A\rangle$. Demonstrando que $\preceq_A$ é uma ordem linear. Quando temos $X, Y \in L([0,1])$, tal que $X \leq Y$. Se $X = Y$ então $X \preceq_A Y$. Para a $\leq$-ordem parcial, $X < Y$ implica $A(X) < A(Y)$, desde que A seja injetiva e crescente. Portanto, $X \preceq_A Y$ e a ordem $\preceq_A$ refina a ordem usual $\leq$. Logo, a $\preceq_A$-ordem é admissível em $L([0,1])$. $\square$

A seguir, definimos a ordem $\preceq_{\mathbf{A}}$, baseada na função $\mathbf{A}$ obtida pela expansão decimal infinita dos extremos de um intervalo $X = \left[\underline{X}, \overline{X}\right] \subseteq [0,1]$, indicado como: $\left[\underline{X}, \overline{X}\right] = \left[0.\underline{X}^{[1]}\underline{X}^{[2]}\ldots, 0.\overline{X}^{[1]}\overline{X}^{[2]}\ldots\right]$. Neste contexto, $1{=}0.99\ldots$ e $0 = 0.00\ldots$.

Definição 3. *A função* $\mathbf{A}\colon L([0,1]) \to [0,1]$ *dada por*

$$\mathbf{A}(X) = \begin{cases} 0.\underline{X}^{[1]}\overline{X}^{[1]}\underline{X}^{[2]}\overline{X}^{[2]}\ldots, & \textit{if } 0 \leq \underline{X} \leq \overline{X} < 1; \\ 0.\underline{X}^{[1]}9\underline{X}^{[2]}9\ldots, & \textit{se } 0 \leq \underline{X} \leq \overline{X} = 1; \\ 1, & \textit{se } X = \mathbf{1}; \end{cases} \tag{2}$$

é uma função crescente com respeito a ordem parcial usual $\leq$ em $L([0,1])$ que satisfaz as condições de contorno $\mathbf{A}(\mathbf{0}) = 0$ e $\mathbf{A}(\mathbf{1}) = 1$.

Proposição 4. *A função $\mathbf{A}\colon L([0,1]) \to [0,1]$ dada pela Eq. (2) é uma função injetiva tal que $X \leq Y \Rightarrow \mathbf{A}(X) \leq \mathbf{A}(Y)$, pela ordem usual $\leq$.*

Prova. Prova direta a partir dos resultados de [Santana et al. 2020]. $\square$

Corolario 1. *A ordem $\preceq_{\mathbf{A}}$ dada por:*

$$X \preceq_{\mathbf{A}} Y \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y, \textit{ or} \\ \mathbf{A}(X) < \mathbf{A}(Y), \end{cases} \tag{3}$$

é uma ordem admissível $\preceq_{\mathbf{A}}$ com respeito a ordem parcial usual $\leq$-ordem em $L([0,1])$.

Prova. Diretamente a partir do Teorema 2 e Prop. 4. $\square$

Exemplo 2. *Seja $X = [0.15, 0.88], Y = [0.16, 0.86] \in L([0,1])$. Temos que:*
(i) $X \preceq_{Lex1} Y$, $Y \preceq_{Lex2} X$ e $Y \preceq_{XY} X$;
(ii) $\mathbf{A}(X) = 0.1858 < 0.1866 = \mathbf{A}(Y)$, então $X \preceq_{\mathbf{A}} Y$.

Definição 5. *Seja $\mathbf{A}\colon L([0,1]) \to [0,1]$ dada na Def. 3. Para $x = 0.x^{[1]}x^{[2]}\cdots = (0.x^{[i]})_{i\in\mathbb{N}_+} \in [0,1]$, $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$, a função $\mathbf{A}^{(-1)}\colon [0,1] \to L([0,1])$ é dada por:*

$$\mathbf{A}^{(-1)}(x) = \begin{cases} \mathbf{1} \textit{ se } x = 1; \\ [(0.x^{[2i-1]})_{i\in\mathbb{N}_+}, (0.x^{[2i]})_{i\in\mathbb{N}_+}] \textit{ se} \\ \quad (0.x^{[2i-1]})_{i\in\mathbb{N}_+} \leq (0.x^{[2i]})_{i\in\mathbb{N}_+}; \textit{ e} \\ \inf\{X \in L([0,1]) : A(X) \geq x\} = [x, x], \textit{ c.c.} \end{cases} \tag{4}$$

Lema 1. *A função $\mathbf{A}^{(-1)}\colon [0,1] \to L([0,1])$ definida pela Eq. (4) verifica as condições:*

1. *para cada $X \in L([0,1])$, tal que $\mathbf{A}(X) \neq 1$, $\mathbf{A}^{(-1)}(\mathbf{A}(X)) = X$;*
2. *para cada $x \in [0,1]$, $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{(-1)}(x)) \leq x$;*
3. *se $x, y \in [0,1]$ e $x \leq y$, $\mathbf{A}^{(-1)}(x) \preceq_{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{(-1)}(y)$;*
4. *para cada $x \in [0,1]$, $\mathbf{A}^{(-1)}(x) = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = 0$ e $\mathbf{A}^{(-1)}(x) = \mathbf{1} \Leftrightarrow x = 1$.*

Prova. Prova direta. $\square$

3. Representabilidade em $\langle L([0,1]), \leq\rangle$

Seja $\langle L([0,1])), \leq\rangle$ o conjunto de todos os valores fuzzy intervalares. Em [Deschrijver 2008], um intervalo $X \in L([0,1])$ é a representação intervalar de um número real α sempre que $\alpha \in X$. Considerando dois intervalos representáveis X e Y de um número real α, X é dito uma melhor representação de α que Y se $X \subseteq Y$.

Definição 6. *[Santiago et al. 2006] Uma função $F\colon L([0,1])^n \rightarrow L([0,1])$ é a representação intervalar de uma função $f\colon [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ se, para cada $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in L([0,1])^n$ e $\vec{x} \in \vec{X}$, $f(\vec{x}) \in F(\vec{X})$.*

Além disso, uma função intervalar $F\colon L([0,1])^n \rightarrow L([0,1])$ é uma representação intervalar melhor de $f\colon L([0,1])^n \rightarrow L([0,1])$ que $G\colon L([0,1])^n \rightarrow L([0,1])$, denotada por $G \sqsubseteq F$, se para cada $\vec{X} \in L([0,1])^n$, a inclusão $F(\vec{X}) \subseteq G(\vec{X})$. Neste contexto, a melhor representação intervalar (representação canônica) de uma função real $f\colon [0,1]^n \rightarrow [0,1]$, é a função $\widehat{f}\colon L([0,1])^n \rightarrow L([0,1])$ definida por

$$\widehat{f}(\vec{X}) = [\inf\{f(\vec{x}) | \vec{x} \in \vec{X}\}, \sup\{f(\vec{x}) | \vec{x} \in \vec{X}\}]. \tag{5}$$

E, quando f é contínua no sentido usual, $\widehat{f}(\vec{X}) = \{f(\vec{x}) | \vec{x} \in \vec{X}\} = f(\vec{X}), \forall \vec{X} \in L([0,1])^n$. Além disso, $\mathbb{F}\colon L([0,1])^n \rightarrow L([0,1])$ é chamada de função valorada intervalarmente decomposta, se existem $F_1, F_2 : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$, tal que

$$\mathbb{F}(X_1, \ldots, X_n) = [F_1(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n), F_2(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n)], \forall X_1, \ldots, X_n \in L([0,1]).$$

3.1. Conectivos Fuzzy Representáveis$\langle L([0,1]), \leq\rangle$

Um conectivo fuzzy valorado intervalarmente pode ser considerado como um conectivo fuzzy valorado intervalarmente representável [Bedregal and Takahashi 2006]. Essa generalização se ajusta ao princípio fuzzy e, o grau de pertinência com valor de intervalo pode ser considerado como uma aproximação do grau exato. As agregações em $L([0,1])$, importantes operadores nas aplicações de tomada de decisão, são revisadas logo a seguir.

Definição 7. *Uma função $\mathbb{M}\colon L([0,1])^n \rightarrow L([0,1])$ é uma função de agregação valorada intervalarmente (IvA), relativa a ordem parcial $\leq$, se satisfaz as condições:*
$\mathbb{M}1$*:* $X_i \leq Y_i \Rightarrow \mathbb{M}(X_1, ..., X_n) \leq \mathbb{M}(Y_1, ..., Y_n)$, $\forall i \in \mathbb{N}_n$ *e* $\forall X_i, Y_i \in L([0,1])$*;*
$\mathbb{M}2$*:* $\mathbb{M}(\mathbf{0}, ..., \mathbf{0}) = 0$ *e* $\mathbb{M}(\mathbf{1}, ..., \mathbf{1}) = 1$.

Seja $\mathbb{M}\colon L([0,1])^n \rightarrow L([0,1])$ uma IvA. $\mathbb{M}$ é $\langle L([0,1]), \leq\rangle$-representável se, existir agregações $M_1, M_2\colon [0,1]^n \rightarrow [0,1]$, com $M_1 \leq M_2$ e tal que:

$$\mathbb{M}(X_1, \ldots, X_n) = [M_1(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n), M_2(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n)], \forall X_1, \ldots, X_n \in L([0,1]). \tag{6}$$

Segue a extensão de t-(co)normas em $L([0,1])$ [Bedregal and Takahashi 2006].

Definição 8. *Uma função $\mathbb{T}(\mathbb{S})\colon L([0,1])^2 \rightarrow L([0,1])$ é uma **t-norma valorada intervalarmente (t-conorma)** IvT (IvS), se for uma função comutativa, associativa, monotônica com respeito a ordem produto, e tem $\mathbf{1}$ ($\mathbf{0}$) como elemento neutro.*

Pela Eq. (6), as funções $\mathbb{T}_{T,T'}(\mathbb{S}_{S,S'})\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$, são chamadas $\langle L([0,1]),\leq\rangle$-representáveis t-(co)norm dadas por

$$\mathbb{T}_{T,T'}(X,Y)=[T(\underline{X},\underline{Y}),T'(\overline{X},\overline{Y})], \mathbb{S}_{S,S'}(X,Y)=[S(\underline{X},\underline{Y}),S'(\overline{X},\overline{Y})], \tag{7}$$

se, e somente se, $T(x,y)\leq T'(x,y)$ $(S(x,y)\leq S'(x,y)), \forall x,y\in[0,1]$. Neste caso, temos que $T_{T,T'}([0,1],[0,1])=[0,1]$ $(S_{S,S'}([0,1],[0,1])=[0,1])$. E ainda, se $T=T'(S=S')$, aplica-se a notação $\mathbb{T}_T(\mathbb{S}_S)$. Observa-se que, $\mathbb{T}_T=\widehat{T}$ $(\mathbb{S}_S=\widehat{S})$.

Exemplo 3. *Veja ilustrações de t-(co)normas representáveis em* $\langle L([0,1]),\leq\rangle$.

$\mathbb{T}_M(X,Y)=[\min(\underline{X},\underline{Y}),\min(\overline{X},\overline{Y})]$; $\mathbb{S}_M(X,Y)=[\max(\underline{X},\underline{Y}),\max(\overline{X},\overline{Y})]$;

$\mathbb{T}_P(X,Y)=[\underline{XY},\overline{XY}]$; $\mathbb{S}_P(X,Y)=[\underline{X}+\underline{Y}-\underline{XY},\overline{X}+\overline{Y}-\overline{XY}]$;

$\mathbb{T}_{LK}(X,Y)=[\max(0,\underline{X}+\underline{Y}-1),\max(0,\overline{X}+\overline{Y}-1)]$; $\mathbb{S}_{LK}(X,Y)=[\min(\underline{X}+\underline{Y},1),\min(\overline{X}+\overline{Y},1)]$.

Logo, uma IvT(IvS) é representável, sss for monotônica referente a ordem parcial $\subseteq$ [Deschrijver 2008]. Mas, nem todas as t-(co)norms em $L([0,1])$ são t-representáveis.

Sejam $T(S)$ uma t-(co)norm. As funções $\mathbb{T}^\star_S(\mathbb{S}^\star_T)\colon L([0,1])^2\to L([0,1])$

$$\begin{aligned}\mathbb{T}^\star_T(X,Y)&=[T(\underline{X},\underline{Y}),\max(T(\underline{X},\overline{Y}),T(\overline{X},\underline{Y}))];\\ \mathbb{S}^\star_S(X,Y)&=[\min(S(\underline{X},\overline{Y}),S(\overline{X},\underline{Y})),S(\overline{X},\overline{Y})]\end{aligned} \tag{8}$$

são denominadas como pseudo $\langle L([0,1]),\leq\rangle$-representáveis t-(co)norm. E, nesta classe, tem-se satisfeista a condição: $\mathbb{T}^\star_T([0,1],[0,1])=\mathbf{0}$ $(\mathbb{S}^\star_S([0,1],[0,1])=\mathbf{1})$.

Exemplo 4. *Ilustram-se t-(co)normas pseudo* $\langle L([0,1]),\leq\rangle$*-representáveis.*

$\mathbb{T}^\star_M(X,Y)=[\min(\underline{X},\underline{Y}),\max(\min(\underline{X},\overline{Y}),\min(\overline{X},\underline{Y}))]$ $\mathbb{S}^\star_M(X,Y)=[\min(\max(\overline{X},\underline{Y}),\max(\underline{X},\overline{Y})),\max(\overline{X},\overline{Y})]$

$\mathbb{T}^\star_P(X,Y)=[\underline{XY},\max(\underline{X}\overline{Y},\overline{X}\underline{Y})]$ $\mathbb{S}^\star_P(X,Y)=[\min(\overline{X}+\underline{Y}-\overline{X}\underline{Y},\underline{X}+\overline{Y}-\underline{X}\overline{Y}),\overline{X}+\overline{Y}-\overline{XY}]$

$\mathbb{T}^\star_{LK}(X,Y)=[\max(0,\underline{X}+\underline{Y}-1),\max(0,\underline{X}+\overline{Y}-1,\overline{X}+\underline{Y}-1)]$ $\mathbb{S}^\star_{LK}(X,Y)=[\min(\overline{X}+\underline{Y},\underline{X}+\overline{Y},1),\min(1,\overline{X}+\overline{Y})]$

Sejam T (S) uma t-(co)norm em $L([0,1])$. Em [Deschrijver 2008], a função $\mathbb{T}'_T(\mathbb{S}'_S)(X,Y)\colon L([0,1])^2\to L([0,1])$, dada por:

$$\mathbb{T}'_T(X,Y)=[\min(T(\underline{X},\overline{Y}),T(\overline{X},\underline{Y})),T(\overline{X},\overline{Y})]; \tag{9}$$

$$\mathbb{S}'_S(X,Y)=[S(\underline{X},\underline{Y}),\max(S(\underline{X},\overline{Y}),S(\overline{X},\underline{Y}))], \tag{10}$$

não é uma t-representável t-(co)norm, sempre que tem-se $T\neq\min$ $(S\neq\max)$.

Exemplo 5. *Apresentamos alguns exemplos na classe de* $\mathbb{T}'_T$ *(*$\mathbb{S}'_S$*).*

$\mathbb{T}'_M(X,Y)=[\min(\min(\underline{X},\overline{Y}),min(\overline{X},\underline{Y})),\min(\overline{X},\overline{Y})]$
$\mathbb{S}'_M(X,Y)=[\max(\underline{X},\underline{Y}),\max(\max(\underline{X},\overline{Y}),\max(\overline{X},\underline{Y}))]$

$\mathbb{T}'_P(X,Y)=[\min(\underline{X}\overline{Y},\overline{X}\underline{Y}),\overline{XY}]$;
$\mathbb{S}'_P(X,Y)=[\underline{X}+\underline{Y}-\underline{XY},\max(\underline{X}+\overline{Y}-\underline{X}\overline{Y},\overline{X}+\underline{Y}-\overline{X}\underline{Y})]$

$\mathbb{T}'_{LK}(X,Y)=[\min(\max(0,\underline{X}+\overline{Y}-1),\max(0,\overline{X}+\underline{Y}-1)),\max(0,\overline{X}+\overline{Y}-1)]$
$\mathbb{S}'_{LK}(X,Y)=[\min(\underline{X}+\underline{Y},1),\max(\min(\underline{X}+\overline{Y},1),\min(\overline{X}+\underline{Y},1))]$

Definição 9. *[Bedregal and Takahashi 2006] Uma função* $\mathbb{N}\colon L([0,1])\to L([0,1])$ *é uma negação fuzzy valorada intervalarmente (IvN) se,* $\forall X,Y\in L([0,1])$*, temos que:*

$\mathbb{N}1$*:* $\mathbb{N}(\mathbf{0})=\mathbf{1}$ *e* $\mathbb{N}(\mathbf{1})=\mathbf{0}$*;*

$\mathbb{N}2$*: Se* $X\geq Y$*, então* $\mathbb{N}(X)\leq\mathbb{N}(Y)$*;*

E, uma IvN $\mathbb{N}$ forte satisfaz a involutividade: $\mathbb{N}3$**:** $\mathbb{N}(\mathbb{N}(X))=X, \forall X\in L([0,1])$.

De acordo com [Bedregal and Takahashi 2006, Deschrijver and Cornelis 2007], podemos construir uma IvN forte $\mathbb{N}$ a partir de uma negação fuzzy forte **N**, que é dada por $\mathbb{N}(X)=[N(\overline{X}),N(\underline{X})]$. Exemplo: $N_C(x)=1-x$, $\mathbb{N}_C(X)=[1-\overline{X},1-\underline{X}]$.

As propriedades mínimas de implicações fuzzy podem ser naturalmente estendidas para a abordagem de intervalar. Conforme [Reiser et al. 2007], uma função $\mathbb{I}\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ é uma implicação fuzzy valorada intervalarmente (IvI), se satisfaz $\mathbb{I}1$, condições de contorno (lógica clássica), $\mathbb{I}2$ antitonicidade no primeiro argumento e $\mathbb{I}3$ isotonicidade no segundo argumento. É sempre possível obter, a representação canônica de uma IvI a partir de qualquer implicação fuzzy, que também preserve as mesmas propriedades satisfeitas pela implicação fuzzy.

Proposição 10. *[Bedregal et al. 2010] Uma implicação $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ satisfaz as propriedades* **I1** *e* **I2** *se e somente se $\widehat{I}$ for expressa como: $\widehat{I}(X,Y) = [I(\overline{X},\underline{Y}), I(\underline{X},\overline{Y})]$.*

Uma IvF é uma **QL-implicação valorada intervalarmente** se houver uma IvS $\mathbb{S}$, uma IvN $\mathbb{N}$ e uma IvT $\mathbb{T}$, tal que:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N},\mathbb{T}}(X,Y) = \mathbb{S}(\mathbb{N}(X), \mathbb{T}(X,Y)). \tag{11}$$

Teorema 11. *[Reiser et al. 2007, Theo. 4] Seja S uma t-conorma, N uma negação fuzzy e T uma t-norma. Então, temos que: $\mathbb{I}_{\widehat{S},\widehat{N},\widehat{T}} = \widehat{I_{S,N,T}}$.*

Exemplo 6. *Veja a QL-implicação de Łukasiewski $\mathbb{I}_{\mathbb{S}_{LK},\mathbb{N}_C,\mathbb{T}_M}(X,Y) = \mathbb{I}_{LK}(X,Y)$.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{LK}(X,Y) &= \big[\min(1-\overline{X}+min(\underline{X},\underline{Y}),1), min(1-\underline{X}+min(\overline{X},\overline{Y}),1)\big]\\
\mathbb{I}^{\star}_{LK}(X,Y) &= \big[\min\big(\min(1-\overline{X}+\max(\min(\underline{X},\overline{Y}),\min(\overline{X},\underline{Y})),1),\\
&\quad \max\big(\min(1-\overline{X}+min(\underline{X},\underline{Y}),1)\big), \min\big(1-\underline{X}+\max(\min(\underline{X},\overline{Y}),\min(\overline{X},\underline{Y}))\big),1\big)\big]\\
\mathbb{I}'_{LK}(X,Y) &= \big[min\big(1-\overline{X}+\min\big(\min(\underline{X},\overline{Y}),\min(\overline{X},\underline{Y})\big)\big),1\big),\\
&\quad \max\big(\min(1-\overline{X}+\min(\overline{X},\overline{Y}),1),\min(1-\underline{X}+\min(\min(\underline{X},\overline{Y}),\min(\overline{X},\underline{Y})),1)\big)\big]
\end{aligned}$$

Além disso, algumas implicações são exclusivamente QL-implicações (o que significa que não pertencem a outras classes, como implicações S ou implicações R). Como exemplo, consideramos $\mathbb{I}_{\mathbb{S}_{LK},\mathbb{N}_K,\mathbb{T}_P}(X,Y) = \mathbb{I}_{KP}(X,Y)$. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 7. *Veja uma ilustração de QL-implicações:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{KP}(X,Y) &= \big[\min(1-\overline{X}^2+\underline{XY},1), \min(1-\underline{X}^2+\overline{XY},1)\big]\\
\mathbb{I}^{\star}_{KP}(X,Y) &= [\min\big(\min(1-\overline{X}^2+\max(\underline{X}\overline{Y},\overline{X}\underline{Y}),1), \min(1-\underline{X}^2+\underline{XY},1)\big),\\
&\quad \min(1-\underline{X}^2+\max(\underline{X}\overline{Y},\overline{X}\underline{Y}),1)]\\
\mathbb{I}'_{KP}(X,Y) &= [\min\big(1-\underline{X}^2+\max(\underline{X}\overline{Y},\overline{X}\underline{Y}),1\big),\\
&\quad \max\big(\min(1-\overline{X}^2+\overline{XY},1),\min(1-\underline{X}^2+\min(\underline{X}\overline{Y},\overline{X},\underline{Y}),1)\big)]
\end{aligned}$$

4. Representabilidade em $\langle L([0,1], \preceq_A\rangle$

O conceito de $\langle L([0,1]), \preceq_A\rangle$-conectivos é apresentado, para uma $\preceq_A$-ordem admissível.

Proposição 12. *Sejam $M\colon [0,1]^n \to [0,1]$ uma agregação estritamente crescente, e A uma função nas condições do Teorema 2. A função $\mathbb{M}^A\colon L([0,1])^n \to L([0,1])$, dada por*

$$\mathbb{M}^A(X_1,\ldots,X_n) = A^{(-1)}\left(M(A(X_1),\ldots,A(X_n))\right) \tag{12}$$

é uma IvA (estritamente crescente) relativa à $\preceq_A$-ordem.

Prova. Diretamente, as condições de contorno são alcançadas: $\mathbb{M}^A(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}) = A^{(-1)}(M(A(\mathbf{0}),\ldots,A(\mathbf{0}))) = A^{\ (-1)}(M(0,\ldots,0)) = \mathbf{0}$. E, $\mathbb{M}^A(\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1}) = A_1^{(-1)}(M(A(\mathbf{1}),\ldots,A(\mathbf{1}))) = A_1^{(-1)}(M(1,\ldots,1)) = \mathbf{1}$. Seja $X_1,\ldots,X_n,Y \in L([0,1])$, tal que $X_i \preceq_A Y$, para $i \in \mathbb{N}_n$. Logo, $A(X_i) \leq A(Y)$ e porque M é estritamente crescente, $M(A(X_1),\ldots,A(X_n)) \leq M(A(X_1),\ldots,A(X_{i-1}),A(Y),A(X_{i+1}),\ldots,A(X_n))$, e pelo Lema 1, $\mathbb{M}^A(X_1,\ldots,X_n) \preceq_A \mathbb{M}^A(X_1,\ldots,X_{i-1},Y,X_{i+1},\ldots,X_n)$. Além disso, se A é injetiva e M é estritamente crescente, então $\mathbb{M}^A$ é também estritamente crescente. Portanto, a Proposição 12 é verificada. $\square$

Teorema 13. *Seja $N\colon [0,1] \to [0,1]$ uma negação fuzzy estritamente decrescente, $A\colon L([0,1]) \to [0,1]$, A e $A^{(-1)}$ sejam funções que verificam as condições do Teorema 2, conforme Lema 1. A $\langle L([0,1]), \preceq_A \rangle$-negação, $\mathbb{N}^A\colon L([0,1]) \to L([0,1])$, é definida por*

$$\mathbb{N}^A(X) = A^{(-1)}(N(A(X))). \tag{13}$$

Prova. Trivialmente, $\mathbb{N}^{\mathbf{A}}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ e $\mathbb{N}^{\mathbf{A}}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$. Quando $X \preceq_{\mathbf{A}} Y$, desde que N seja estritamente decrescente, pelo Lema 1, $A(X) < A(Y) \Leftrightarrow N(A(Y)) < N(A(X))) \Leftrightarrow A^{(-1)}(N(A(Y))) < A^{(-1)}(N(A(X))) \Leftrightarrow \mathbb{N}^A(Y) \preceq_A \mathbb{N}^A(X)$. □

Exemplo 8. *Ilustramos a $\langle L([0,1]), \preceq_{\mathbf{A}} \rangle$-representabilidade de t-(co)normas:*

$$\mathbb{T}^{\mathbf{A}}_M(X,Y) = \mathbf{A}^{(-1)}(\min(\mathbf{A}(X), \mathbf{A}(Y))) \qquad \mathbb{S}^{\mathbf{A}}_M(X,Y) = \mathbf{A}^{(-1)}(\max(\mathbf{A}(X), \mathbf{A}(Y)))$$
$$\mathbb{T}^{\mathbf{A}}_P(X,Y) = \mathbf{A}^{(-1)}(\mathbf{A}(X) \cdot \mathbf{A}(Y)) \qquad \mathbb{S}^{\mathbf{A}}_P(X,Y) = \mathbf{A}^{(-1)}(\mathbf{A}(X) + \mathbf{A}(Y) - \mathbf{A}(X) \cdot \mathbf{A}(Y))$$
$$\mathbb{T}^{\mathbf{A}}_{LK}(X,Y) = \mathbf{A}^{(-1)}(\max(0, \mathbf{A}(X) + \mathbf{A}(Y) - 1)) \qquad \mathbb{S}^{\mathbf{A}}_{LK}(X,Y) = Aa^{(-1)}(\min(\mathbf{A}(X) + \mathbf{A}(Y), 1))$$

Uma $\langle L([0,1]]), \preceq_{\mathbf{A}} \rangle$-negação $\mathbb{N}\colon L([0,1]) \to L([0,1])$ é uma função que verifica $(\mathbb{N}1)$ e a propriedade: $(\mathbb{N}_{\mathbf{A}} b)$: Se $X \preceq_{\mathbf{A}} Y$, $\mathbb{N}(Y) \preceq_{\mathbf{A}} \mathbb{N}(X)$, $\forall X, Y \in L([0,1])$.
Corolario 2. *Sempre que $N\colon [0,1] \to [0,1]$ for uma negação fuzzy forte, $\mathbb{N}^A$ verifica a propriedade $\mathbb{N}^A(\mathbb{N}^A(X)) \succeq_A X$.*

Prova. Através do Lema 1, nós temos que $\mathbb{N}^A(\mathbb{N}^A(X)) \succeq_A A^{(-1)}(N^2(A(X)))$. Portanto, $\mathbb{N}^A(\mathbb{N}^A(X)) \succeq_A X$. □

Exemplo 9. *A $\langle L([0,1]), \preceq_{\mathbf{A}} \rangle$- negação, gerada por uma negação padrão N_C é dada por $\mathbb{N}_C{}^{\mathbf{A}}(X) = \mathbf{A}^{(-1)}(N_C(\mathbf{A}(X))), \forall X \in L([0,1])$. Através do Exemplo 2, $\mathbb{N}_C{}^{\mathbf{A}}(X) = \mathbf{A}^{(-1)} N_C(0.1858) = \mathbf{A}^{(-1)}(0.8142) = [0.8, 0.8]$ e $\mathbb{N}_C{}^{\mathbf{A}}(Y) = [0.8, 0.8]$. Logo, $X \preceq_{\mathbf{A}} Y$, $\mathbb{N}^{\mathbf{A}}_C(Y) \preceq_{\mathbf{A}} \mathbb{N}^{\mathbf{A}}_C(X)$. E, portanto, $\mathbb{N}^{\mathbf{A}}_S$ não é uma negação forte.*

Uma $\langle L([0,1]), \preceq_{\mathbf{A}} \rangle$-implicação $\mathbb{I}\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ é uma função que verifica as condições de contorno (tabela clássica), incluindo antitonicidade no primeiro argumento e isotonicidade no segundo argumento relativa a $\preceq_{\mathbf{A}}$-ordem admissível.
Teorema 14. *Seja $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma implicação fuzzy, $\mathbf{A}\colon L([0,1]) \to [0,1]$ e $\mathbf{A}^{(-1)}\colon [0,1] \to L([0,1])$ as funções definidas em Def. 3 e 5, como requerido no Lema 1. A $\langle L([0,1]), \preceq_{\mathbf{A}} \rangle$-implicação $\mathbb{I}^{\mathbf{A}}\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ é definida por*

$$\mathbb{I}^{\mathbf{A}}(X,Y) = \mathbf{A}^{(-1)}(I(\mathbf{A}(X), \mathbf{A}(Y))), \tag{14}$$

Prova. Seja $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ uma implicação fuzzy. Então, tem-se verificadas:
$\mathbb{I}^{\mathbf{A}}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{A}^{(-1)}(I(\mathbf{A}(\mathbf{0}), \mathbf{A}(\mathbf{0}))) = \mathbf{A}^{(-1)}(I(0,0)) = \mathbf{1}$;
$\mathbb{I}^{\mathbf{A}}(\mathbf{0},\mathbf{1}) = \mathbf{A}^{(-1)}(I(\mathbf{A}(\mathbf{0}), \mathbf{A}(\mathbf{1}))) = \mathbf{A}^{(-1)}(I(0,1)) = \mathbf{1}$;
$\mathbb{I}^{\mathbf{A}}(\mathbf{1},\mathbf{0}) = \mathbf{A}^{(-1)}(I(\mathbf{A}(\mathbf{1}), \mathbf{A}(\mathbf{0}))) = \mathbf{A}^{(-1)}(I(1,0)) = \mathbf{0}$;
$\mathbb{I}^{\mathbf{A}}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = \mathbf{A}^{(-1)}(I(A(\mathbf{1}), A(\mathbf{1}))) = \mathbf{A}^{(-1)}(I(1,1)) = \mathbf{1}$.
$(\mathbb{I}1)$ Se $X_1 \preceq_{\mathbf{A}} X_2$, qualquer $\mathbf{A}(X_1) < \mathbf{A}(X_2)$ ou $\mathbf{A}(X_1) = \mathbf{A}(X_2)$. Por $I1$, nós temos que $I(\mathbf{A}(X_1), \mathbf{A}(Y)) \geq I(\mathbf{A}(X_2), \mathbf{A}(Y))$. Baseado no Lema 1 e na Equação (1), $\mathbb{I}^{\mathbf{A}}(X_1, Y) = \mathbf{A}^{(-1)}(I(\mathbf{A}(X_1), \mathbf{A}(Y))) \succeq_{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{(-1)}(I(\mathbf{A}(X_2), \mathbf{A}(Y))) = \mathbb{I}^{\mathbf{A}}(X_2, Y)$. Caso contrário, se $\mathbf{A}(X_1) = \mathbf{A}(X_2)$, então $\mathbf{A}^{(-1)}(\mathbb{I}^{\mathbf{A}}(X_1, Y)) = \mathbf{A}^{(-1)}(\mathbb{I}^{\mathbf{A}}(X_2, Y))$.
$(\mathbb{I}2)$ De forma análoga. □

Exemplo 10. *Apresentamos duas QL-implicações representáveis em $\langle L([0,1]), \preceq_{\mathbf{A}} \rangle$:*
$\mathbb{I}^{\mathbf{A}}_{LK}(X,Y) = \mathbf{A}^{(-1)}(\min(1 - \mathbf{A}(X) + \min(\mathbf{A}(X), \mathbf{A}(Y)), 1))$
$\mathbb{I}^{\mathbf{A}}_{KP}(X,Y) = \mathbf{A}^{(-1)}(\min(1 - (\mathbf{A}(X))^2) + \mathbf{A}(X) \cdot \mathbf{A}(Y), 1))$

5. Conclusão

Este trabalho apresentou a representação intervalar de QL-implicações em $L([0,1])$ dotado de $\langle L([0,1]), \leq\rangle$-ordem parcial e $\langle L([0,1]), \preceq_A\rangle$-ordens admissíveis, enfatizando as propriedades das principais classes de operadores fuzzy valorados intervalarmente, como IvT, IvS, IvN e IvI. O trabalho promove uma abordagem alternativa para gerar conectivos da IvFL, permitindo o estudo da representabilidade desses operadores em $\langle L([0,1]), \preceq_A\rangle$.

Os resultados apresentados colaboram para a atual pesquisa, para definição da entropia fuzzy intuicionista valorada intervalarmente considerando $\langle L([0,1]), \preceq_A\rangle$-ordens. Outros estudos consideram extensões da $\preceq_A$-ordem para bicondicionais e diferenças fuzzy, incluindo agregadores fuzzy, como funções overlap e grouping.

Referências

Bedregal, B., Dimuro, G. P., Santiago, R., and Reiser, R. (2010). On interval fuzzy S-implications. Information Sciences*, 180(8):1373–1389.*

Bedregal, B. and Takahashi, A. (2006). Interval valued versions of t-conorms, fuzzy negations and fuzzy implications. In IEEE Intl Conf on Fuzzy Systems*, pages 1981–1987.*

Bustince, H., Fernandez, J., Kolesárová, A., and Mesiar, R. (2013). Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. Fuzzy Sets Syst*, 220:69 – 77.*

Deschrijver, G. (2008). A representation of t-norms in interval-valued L-fuzzy set theory. Fuzzy Sets Syst*, 159(13):1597–1618.*

Deschrijver, G. and Cornelis, C. (2007). Representability in interval-valued fuzzy set theory. Int Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 15(03):345–361.*

Hickey, T., Ju, Q., and Van Emden, M. H. (2001). Interval arithmetic: From principles to implementation. J. ACM*, 48(5):1038–1068.*

Reiser, R. H. S., Dimuro, G. P., Bedregal, B. R. C., and Santiago, R. H. N. (2007). Interval valued ql-implications. In Logic, Language, Information and Computation, 14th Int. Workshop, WoLLIC 2007, Proc.*, volume 4576, pages 307–321. Springer.*

Santana, F., Bedregal, B., Viana, P., and Bustince, H. (2020). On admissible orders over closed subintervals of [0,1]. Fuzzy Sets Syst*, 399:44–54.*

Santiago, R., Bedregal, B., and Acióly, B. (2006). Formal aspects of correctness and optimality of interval computations. Formal Aspects of Computing*, 18(2):231–243.*

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. Information and control*, 8(3):338–353.*

Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning–I. Information Sciences*, 8(3):199–249.*