

# Conectivo Fuzzy XOR $E_{\otimes}$ - Interpretações Quantum-Fuzzy

Juliano Buss<sup>1</sup>, Bruna Novack<sup>1</sup>, Helida Santos<sup>2</sup>, Giancarlo Lucca<sup>3</sup>, Anderson Avila<sup>1</sup>,  
Adenauer Yamin<sup>1</sup>, Anderson Cruz<sup>4</sup>, Renata Reiser<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LUPS – Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), Pelotas-RS, Brasil

{bcdnovack, jsbuss, reiser, abdavila, adenauer}@inf.ufpel.edu.br

<sup>2</sup>C3 – Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande-RS, Brasil

helida@furg.br

<sup>3</sup>PGEEC – Universidade Católica de Pelotas (UCPEL), Pelotas-RS, Brasil

giancarlo.lucca@ucpel.edu.br

<sup>4</sup>IMD – Universidade Federal do Rio Grande do Norte(UFRN), Natal-RN, Brasil

anderson@imd.ufrn.br

**Abstract.** *This article presents the modeling of Fuzzy Logic connectives using Quantum Computing, analyzing the XOR gate, which uses both AND and OR connectors for its construction, and presenting the evolution of the states in its modeling.*

**Resumo.** *Este artigo apresenta a modelagem de conectivos da Lógica Fuzzy utilizando a Computação Quântica, analisando a porta XOR, que se utiliza de ambos conectivos AND e OR para a sua construção, e apresentando a evolução dos estados na sua modelagem.*

## 1. Introdução

Tanto a Computação Quântica (CQ) quanto a Lógica Fuzzy (LF) oferecem ótimos benefícios para desenvolvimento da pesquisa e de tecnologias computacionais, podendo ser uma ótima abordagem para solucionar problemas mais complexos da computação clássica. Ambas as áreas modelam incertezas de formas distintas. De um lado, a CQ utiliza fundamentos e leis da Mecânica Quântica para modelar a incerteza do mundo real microscópico. Por sua vez, a LF expressa incerteza na expressão do raciocínio humano, modelando matematicamente a imprecisão através de variáveis linguísticas (características/atributos) e da Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Trabalhos como [de Avila et al. 2023] promovem ambientes de simulação híbrida para o paralelismo e emaranhamento quântico via arquiteturas distribuídas e multiprocessadas da computação clássica. Neste contexto, este trabalho promove a interpretação de algoritmos flexíveis via operadores quânticos, considerando a integração de conceitos da CQ e LF.

A potencialidade de aplicações que consideram a modelagem via operador XOR mostra a relevância deste estudo. Aplicações científicas e tecnológicas em diversas áreas como na otimização de algoritmos [Aslan et al. 2019], e em problemas de decisão em biomedicina [Hocine et al. 2023] motivam a modelagem da porta XOR no desenvolvimento deste trabalho. Esta porta tem sido fundamental na integração de novas abordagens para

circuitos reversíveis, envolvendo métodos de minimização e projeção de circuitos integrados, que atentam para o incremento de dispositivos eletrônicos e o advento das novas tecnologias de fabricação, como *quantum-dot cellular automata* e *tunneling phase logic* [Haaswijk et al. 2017]. Estruturas que generalizam a lógica para o AND-XOR, como a CMOS XOR [Aljafar et al. 2018], requerem menos termos do que a tradicional estrutura AND-OR quanto ao uso de arquiteturas de testes simplificadas.

O advento da CQ promove uso de circuitos quânticos, implementando portas XOR controladas com sobreposição de estados [Wille et al. 2016]. A literatura recente também apresenta métodos que utilizam o XOR em algoritmos genéticos [Mangal and Singh ] e para solução e tomada de decisão [Liu et al. 2023]. Cada implementação deste operador, por meio de circuitos quânticos, permite uma futura aplicação da CQ que necessite seu uso.

Neste trabalho, busca-se estender o estudo do conectivo fuzzy XOR, considerando a abordagem híbrida para algoritmos quantum-fuzzy, provendo interpretações de conectivos da LF via operadores da CQ. Em particular, dentre as várias definições de operadores fuzzy X(N)OR [Bedregal et al. 2013], é considerada a extensão fuzzy da abordagem clássica do XOR definida pela expressão:  $x \otimes y = ((x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y))$ .

Na sequência, a Seção 2 discute os conceitos essenciais para compreender este trabalho, além de uma breve discussão acerca dos circuitos quânticos e transformações quânticas. A modelagem dos Conjuntos Fuzzy (CFs) quânticos é apresentada na Seção 3 e a interpretação do operador XOR no modelo de circuito quântico encontra-se na Seção 4. Na Seção 5, tem-se as considerações finais.

## 2. Preliminares

### 2.1. Lógica Fuzzy

A teoria de conjuntos clássica define as relações de pertinência de modo rígido, um elemento pertence ou não a um dado conjunto. Enquanto que a teoria de conjuntos fuzzy é uma extensão da teoria clássica, pois através de uma função de pertinência, é possível que um elemento pertença parcialmente a um conjunto. Considerando um CF  $A$ , em um universo de discurso não vazio, com um grau de pertinência representado por  $f_A(x)$ ,  $0 \leq f_A(x) \leq 1$ . Assim, um CF  $A$ , em um universo  $\chi \neq \emptyset$ , é dado pela expressão:  $A = \{(x, f_A(x)) : x \in \chi\}$  [Benini and Jr Meneguette 2009].

Uma t-(co)norma é uma função  $T(S) : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  que é comutativa, associativa, crescente e satisfaz, respectivamente,  $T(x, 1) = x$  e  $S(x, 0) = x$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ . Veja a Tabela 1 ilustrando a classe de t-(co)normas.

**Tabela 1. Exemplificando (Co)Normas Triangulares.**

Expressões	$T(x, y)$	$S(x, y)$
Gödel	$T_G(x, y) = \min(x, y)$ ;	$S_G(x, y) = \max(x, y)$
Lukasiewicz	$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$ ;	$S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$ ;
Produto algébrico	$T_P(x, y) = x \cdot y$ .	$S_P(x, y) = x + y - x \cdot y$ .

Uma negação fuzzy é uma função  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisfaz:

(N1)  $N(0) = 1$  e  $N(1) = 0$ ; e (N2) Monotônica: Se  $x \leq y$  então  $N(x) \geq N(y)$ ,  $\forall x, y \in [0, 1]$ .

Se a negação fuzzy satisfaz a propriedade de involutividade: (N3)  $N(N(x)) = x, \forall x \in [0, 1]$ , então ela é dita negação forte como, por exemplo, a negação padrão definida por  $N_S(x) = 1 - x$ .

O conectivo fuzzy (XOR)  $E: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  e sua construção dual, o conectivo fuzzy (X(N)OR)  $D: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  são definidos pelas propriedades:

$$\begin{aligned} \text{E1: } E(1, 1) = E(0, 0) = 0 \text{ e } E(1, 0) = 1; & \quad \text{D1: } D(1, 1) = D(0, 0) = 1 \text{ e } D(0, 1) = 0; \\ \text{E2: } E(x, y) = E(y, x); & \quad \text{D2: } D(x, y) = D(y, x); \\ \text{E3: Se } x \leq y \text{ então } E(0, x) \leq E(0, y); & \quad \text{D3: Se } x \leq y \text{ então } D(0, x) \geq D(0, y); \\ & \quad \text{Se } x \leq y \text{ então } E(1, x) \geq E(1, y). & \quad \text{Se } x \leq y \text{ então } D(1, x) \leq D(1, y). \end{aligned}$$

A operação complemento de um CF  $A$ , é o CF  $A' = \{(x, f_{A'}(x)) : x \in \chi\}$ , onde  $f_{A'} : \chi \rightarrow [0, 1]$  é dada pela expressão:

$$f_{A'}(x) = N_S(f_A(x)) = 1 - f_A(x), \forall x \in \chi. \quad (1)$$

Seja  $T$  uma t-norma. A intersecção entre dois CFs  $A$  e  $B$  resulta no CF  $A \cap B = \{(x, f_{A \cap B}(x)) : x \in \chi\}$ , e função de pertinência  $f_{A \cap B} : \chi \rightarrow [0, 1]$  é dada por:

$$f_{A \cap B}(x) = T(f_A(x), f_B(x)), \forall x \in \chi. \quad (2)$$

Seja  $S$  uma t-conorma, a união entre dois CFs  $A$  e  $B$  resulta no CF  $A \cup B = \{(x, f_{A \cup B}(x)) : x \in \chi\}$ , cuja função de pertinência  $f_{A \cup B} : \chi \rightarrow [0, 1]$  é representada por:

$$f_{A \cup B}(x) = S(f_A(x), f_B(x)), \forall x \in \chi. \quad (3)$$

As instâncias das Eq. (2) e Eq. (3) considerando a t-norma do produto, a soma algébrica e a negação padrão resultam nas expressões:

$$A \cap_{T_P} B = \{(x, f_A(x) \cdot f_B(x)) : x \in \chi\}; \quad (4)$$

$$A \cup_{S_P} B = \{(x, f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)) : x \in \chi\}. \quad (5)$$

Considere a t-conorma  $S$ , a t-norma  $T$  e seja  $N$  uma negação fuzzy forte. Em [Bedregal et al. 2013], definem-se três classes de conectivos fuzzy XOR, representados por (E), e as construções duais correspondentes aos conectivos fuzzy X(N)OR, denotadas por (D). As funções modeladas neste artigo são definida por  $E_{T,S,N}, D_{T,S,N} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  dadas, respectivamente, pelas expressões:

$$E_{T,S,N}(x, y) = T(S(x, y), N(T(x, y))); \quad (6)$$

$$D_{S,T,N}(x, y) = N(T(S(N(x), N(y)), N(T(N(x), N(y))))). \quad (7)$$

Utilizando o produto algébrico dado na Tabela 1 para  $T$  e  $S$ , a função  $E_{T,S,N} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  é representada pela expressão:

$$E_{T_P, S_P, N_S}(x, y) = x + y - xy - xy^2 - x^2y + x^2y^2. \quad (8)$$

E a função  $X(N)OR_{S,T,N} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ , dual da construção da Eq. (8), é dada por:

$$D_{S_P, T_P, N_S}(x, y) = 1 - x - y + xy + xy^2 + x^2y - x^2y^2. \quad (9)$$

Sejam  $(E_{T,S,N}, D_{S,T,N})$  conectivos  $N_S$ -duais, o par satisfaz a seguinte condição:  $E(x, y) = N_S(D(x, y)), \forall x, y, \in [0, 1]$ .

## 2.2. Computação Quântica

O Bit Quântico (qubit) é a unidade básica de informação na CQ, composto por um vetor unitário e bidimensional com componentes complexos, genericamente representados na notação de Dirac [Dirac 1939] como  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ . Os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  correspondem às amplitudes dos respectivos estados, influenciando na probabilidade do elemento estar ou não no conjunto [Cressman et al. 2022]. As transformações quânticas, ou portas quânticas são responsáveis pela manipulação da informação contida nos estados quânticos. Elas podem ser unitárias, controladas e de medidas. As transformações quânticas representam o ferramental matemático amparado nos postulados da Mecânica Quântica.

A operação de medição é uma operação que realiza a leitura de um qubit, obtendo a informação contida nele, onde só é possível obter um bit de informação do estado de um qubit, tendo perda da informação presente nos outros qubits.

O modelo de circuitos quântico (MCQ) são notações gráficas intuitivas que remetem aos circuitos clássicos, e compreendem sincronizações e composições de portas quânticas unitárias, permitindo modelar qualquer algoritmo quântico. A porta Toffoli (T) expressa matricialmente na Fig. 1 será utilizada na interpretação das operações entre CF apresentados. A porta opera sobre três qubits, onde os dois primeiros ( $|\psi\rangle$  e  $|\varphi\rangle$ ) indicados na Figura 2 serão considerados como controle, e o terceiro é o qubit alvo  $|\omega\rangle$ , que sofre alterações conforme o valor dos qubits de controle, neste caso trocando suas amplitudes [Nielsen and Chuang 2011].

$$T_{|\chi\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \theta \\ v \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \theta \\ \sigma \\ v \end{pmatrix}$$

Figura 1. Expressão Matricial da Porta T.

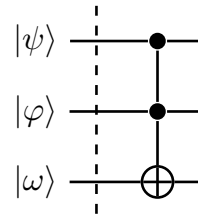


Figura 2. MCQ da Porta T.

A porta NOT, ou Pauli X, remete ao operador lógico clássico Not [Portugal et al. 2004]. Porém, se o estado estiver em superposição, não há recíproca na lógica clássica, pois, aplicando X em um estado  $|\phi\rangle$  em superposição, é obtido o seguinte resultado: Entrada:  $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ; Saída:  $X|\phi\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$ , onde  $\{\alpha, \beta\} \neq \{0, 1\}$ .

## 3. Modelagem de Conjuntos Fuzzy Quânticos

Os CFs podem ser obtidos a partir de superposições de CFs associados com registradores quânticos. Interpretações das operações fuzzy podem ser obtidas através da composição de portas quânticas atuantes sobre a definição de registradores fuzzy quânticos. Considerando as funções de pertinência  $f, g: \chi \rightarrow [0, 1]$  associadas com dois CFs  $A$  e  $B$ , e o par  $|S_{f_i}\rangle$  e  $|S_{g_i}\rangle$  de estados:

$$|S_{f_i}\rangle = \sqrt{f_A(i)}|1\rangle + \sqrt{1 - f_A(i)}|0\rangle \quad \text{e} \quad |S_{g_i}\rangle = \sqrt{f_B(i)}|1\rangle + \sqrt{1 - f_B(i)}|0\rangle. \quad (10)$$

As seguintes instâncias para os estados  $|S_{A_i}\rangle$  e  $|S_{B_i}\rangle$  serão utilizados para realizar cálculos sobre a amplitude dos estados obtidos durante a sua evolução:

$$|S_{A_i}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle \text{ e } |S_{B_i}\rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}|1\rangle + \frac{\sqrt{6}}{3}|0\rangle. \quad (11)$$

### 3.1. Interpretação para Complemento de um Conjunto Fuzzy

A operação de complemento é representada tendo como base a sua representação na LF, definida na Eq. (1), utilizando os estados definidos na Eq. (10), onde seu operador quântico é expresso por [Mannucci 2006]:

$$NOT(|S_{f_i}\rangle) = \sqrt{1-f_A}|1\rangle + \sqrt{f_A}|0\rangle. \quad (12)$$

A extensão da operação NOT Quântica para múltiplos qubits é dada por:

$$NOT_N(|S_{f_A}\rangle) = NOT(\otimes_{1 \leq i \leq N} (f_A(x_i)^{\frac{1}{2}}|1\rangle(1-f_A(x_i)^{\frac{1}{2}}|0\rangle)). \quad (13)$$

E usando a Eq. (13) para um sistema quântico de 2 e 3 qubits tem-se, respectivamente:

$$NOT_2(|S_{f_1}\rangle|S_{f_2}\rangle) = |S_{f_1}\rangle \otimes NOT(|S_{f_2}\rangle); \quad (14)$$

$$NOT_{2,3}(|S_{f_1}\rangle|S_{f_2}\rangle|S_{f_3}\rangle) = |S_{f_1}\rangle \otimes NOT(|S_{f_2}\rangle) \otimes NOT(|S_{f_3}\rangle). \quad (15)$$

### 3.2. Interpretação para Intersecção entre Conjuntos Fuzzy

A intersecção fuzzy, definida na Eq. (2) na LF, é modelada pelo operador *AND*, representado por  $AND(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle)$ , utilizando os dois estados definidos na Eq. (10). Assim, pela aplicação da transformação quântica Toffoli ( $\mathcal{T}$ ):

$$\begin{aligned} AND(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) &= \mathcal{T}(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle, |0\rangle) \\ &= \mathcal{T}(((\sqrt{f_A}|1\rangle + \sqrt{1-f_A}|0\rangle) \otimes (\sqrt{f_B}|1\rangle + \sqrt{1-f_B}|0\rangle)) \otimes |0\rangle). \end{aligned} \quad (16)$$

Pela distributividade do produto tensor tem-se:

$$\begin{aligned} AND(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) &= \sqrt{f_A f_B}|111\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)}|100\rangle \\ &+ \sqrt{(1-f_A)f_B}|010\rangle + \sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}|000\rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

A medição considera o último qubit. Os estados  $|S'_1\rangle$  e  $|S'_0\rangle$  serão utilizados para representar a pertinência e a não-pertinência, respectivamente, onde  $|S'_1\rangle = |111\rangle$  com probabilidade  $p(1) = f(x_i) \cdot g(x_i)$ . Assim,  $\forall x_i \in \chi$ ,  $f(x_i)$  e  $g(x_i)$  indicam a probabilidade de  $x \in \chi$  estar nos CFs definidos pelas funções  $f_A, g_A: \chi \rightarrow [0, 1]$ . Similarmente,  $f(x_i) \cdot g(x_i)$  indica a probabilidade de  $x_i$  estar na intersecção destes CFs.

Analogamente, a medida do terceiro qubit no estado  $|0\rangle$  retorna o estado:

$$|S'_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-f_A f_B}} (\sqrt{f_A(1-f_B)}|100\rangle + \sqrt{(1-f_A)f_B}|010\rangle + \sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}|000\rangle),$$

com probabilidade  $p(0) = 1 - f(i) \cdot g(i)$ , que representa o complemento de  $A \cap B$ , pela interpretação da intersecção *AND* [Agostini et al. 2018].

Utilizando os estados definidos na Eq. (11) como entrada para calcular a amplitude da Eq. (17), tem-se os seguintes estados:

$$AND(|S_{A_i}\rangle, |S_{B_i}\rangle) = \frac{\sqrt{6}}{6}|111\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3}|100\rangle + \frac{\sqrt{6}}{6}|010\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3}|000\rangle. \quad (18)$$

### 3.3. Interpretação para União entre Conjuntos Fuzzy

Sejam  $|S_{f_i}\rangle$  e  $|S_{g_i}\rangle$  estados quânticos representados na Eq. (10), a união de CFs é modelada pelo operador  $OR$ , definido na Eq. (3) na LF, e representado como segue:

$$OR(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) = S(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) = NOT_3(\mathcal{T}(NOT|S_{f_i}\rangle, NOT|S_{g_i}\rangle, |0\rangle)) = NOT_3(\mathcal{T}(\sqrt{f_A f_B}|000\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)}|010\rangle + \sqrt{(1-f_A)f_B}|100\rangle + \sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}|110\rangle)).$$

Aplicando a transformação Toffoli, tem-se:

$$OR(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) = \sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}|110\rangle + \sqrt{(1-f_A)f_B}|101\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)}|011\rangle + \sqrt{f_A f_B}|001\rangle. \quad (19)$$

Ao realizar a operação de medida no terceiro qubit, no estado da base  $|1\rangle$ , considerando a construção definida pela Eq. (19), tem-se o estado final:

$$|S'_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}}(\sqrt{(1-f_A)f_B}|101\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)}|011\rangle + \sqrt{f_A f_B}|001\rangle),$$

com  $p(1) = (1-f_A)(1-f_B)$ , sendo a probabilidade de  $x_i$  estar na união entre  $A$  e  $B$ .

Analogamente, ao realizar-se uma medida considerando agora o estado  $|0\rangle$ , obtém-se o estado final  $|S'_0\rangle = |110\rangle$ , com  $p(0) = 1 - ((1-f_A)(1-f_B))$ , que indica a probabilidade do elemento  $x_i$  estar no complemento do CF  $A \cap B$ . Aplicando os estados definidos na Eq. (11) na porta OR, para calcular a amplitude da expressão, tem-se:

$$OR(|S_{A_i}\rangle, |S_{B_i}\rangle) = \frac{\sqrt{3}}{3}|110\rangle + \frac{\sqrt{6}}{6}|101\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3}|011\rangle + \frac{\sqrt{6}}{6}|001\rangle. \quad (20)$$

### 4. Interpretação para XOR Fuzzy $E_{\otimes}$

Sejam  $|S_{f_i}\rangle$  e  $|S_{g_i}\rangle$  estados quânticos dados pelas expressões da Eq. (10). O conectivo XOR fuzzy  $E_{\otimes}$ , definido na Eq. (6), é representado pelo operador quântico  $XOR_{\otimes}$ , representado por:

$$XOR_{\otimes}(|s_{f_i}\rangle, |s_{g_i}\rangle) = AND(OR(|s_{f_i}\rangle, |s_{g_i}\rangle), NOT(AND(|s_{f_i}\rangle, |s_{g_i}\rangle))) = \mathcal{T}_7^{5,6}(NOT_{1,2,5}(\mathcal{T}_5^{1,2}(NOT|s_{f_i}\rangle, NOT|s_{g_i}\rangle, |0\rangle)), NOT_6(\mathcal{T}_6^{3,4}(|s_{f_i}\rangle, |s_{g_i}\rangle, |0\rangle)), |0\rangle). \quad (21)$$

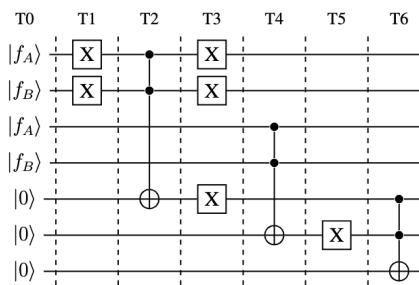


Figura 3.  $XOR_{\otimes}$ -MCQ.

amplitudes não vazias	T0	T3	T4	T6
$(1-f_A)^2 * (1-f_B)^2$	0000000	0000000	0000010	0000010
$(1-f_A)^2 * (1-f_B) * f_B$	0001000	0001000	0001010	0001010
$(1-f_A) * (1-f_B)^2 * f_A$	0010000	0010000	0010010	0010010
$(1-f_A) * (1-f_B) * f_A * f_B$	0011000	0011000	0011000	0011000
$(1-f_A)^2 * f_B * (1-f_B)$	0100000	0100100	0100110	0100111
$(1-f_A) * f_B^2$	0101000	0101100	0101110	0101111
$(1-f_A) * f_B * f_A * (1-f_B)$	0110000	0110100	0110110	0110111
$(1-f_A) * f_B^2 * f_A$	0111000	0111100	0111110	0111110
$f_A * (1-f_B)^2 * (1-f_A)$	1000000	1000100	1000110	1000111
$f_A * (1-f_B) * (1-f_A) * f_B$	1001000	1001100	1001110	1001111
$f_A^2 * (1-f_B)^2$	1010000	1010100	1010110	1010111
$f_A^2 * (1-f_B) * f_B$	1011000	1011100	1011110	1011110
$f_A * f_B * (1-f_A) * (1-f_B)$	1100000	1100100	1100110	1100111
$f_A * f_B^2 * (1-f_A)$	1101000	1101100	1101110	1101111
$f_A^2 * f_B * (1-f_B)$	1110000	1110100	1110110	1110111
$f_A^2 * f_B^2$	1111000	1111100	1111110	1111110

Figura 4.  $XOR_{\otimes}$ -Evolução Temporal.

A Figura 3, graficamente descreve a estruturação do operador  $E_{\otimes}$  no MCQ. Na representação gráfica do conectivo  $E_{\otimes}$ , ocorrem sete etapas de evolução temporal (de T0 a T6) estruturados em um sistema de dimensão espacial de sete qubits. Assim, de acordo com a coluna T6 da Figura 4, apresentando apenas os quadrados dos coeficientes não nulos dos estados clássicos (base computacional) em uma evolução temporal das computações relacionadas ao operador fuzzy XOR  $E_{\otimes}$ , o estado quântico descrito pela Eq. (22) é obtido, como visto a seguir:

$$\begin{aligned}
|\otimes_6\rangle &= (1-f_A)(1-f_B)|0000010\rangle + (1-f_A)\sqrt{(1-f_B)f_B}|0001010\rangle \\
&+ (1-f_B)\sqrt{(1-f_A)f_A}|0010010\rangle + \sqrt{(1-f_A)(1-f_B)f_Af_B}|0011000\rangle \\
&+ (1-f_A)\sqrt{f_B(1-f_B)}|0100111\rangle + (1-f_A)f_B|0101111\rangle \\
&+ \sqrt{(1-f_A)f_Bf_A(1-f_B)}|0110111\rangle + f_B\sqrt{(1-f_A)f_A}|0111100\rangle \\
&+ (1-f_B)\sqrt{f_A(1-f_A)}|1000111\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)(1-f_A)f_B}|1001111\rangle \\
&+ f_A(1-f_B)|1010111\rangle + f_A\sqrt{(1-f_B)f_B}|1011100\rangle \\
&+ \sqrt{f_Af_B(1-f_A)(1-f_B)}|1100111\rangle + f_B\sqrt{f_A(1-f_A)}|1101111\rangle \\
&+ f_A\sqrt{f_B(1-f_B)}|1110111\rangle + f_Af_B|1111100\rangle.
\end{aligned} \tag{22}$$

Uma medida realizada no 7º qubit (mas relacionada ao estado  $|1\rangle$ ) do estado quântico descrito pela Eq. (22) resulta no estado final:

$$\begin{aligned}
|\otimes'_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1-f_A-f_B+f_Af_B+f_Af_B^2+f_A^2f_B-f_A^2f_B^2}}((1-f_A)\sqrt{f_B(1-f_B)}|0100111\rangle \\
&+ (1-f_A)f_B|0101111\rangle + \sqrt{(1-f_A)f_Bf_A(1-f_B)}|0110111\rangle \\
&+ (1-f_B)\sqrt{f_A(1-f_A)}|1000111\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)(1-f_A)f_B}|1001111\rangle \\
&+ f_A(1-f_B)|1010111\rangle + \sqrt{f_Af_B(1-f_A)(1-f_B)}|1100111\rangle \\
&+ f_B\sqrt{f_A(1-f_A)}|1101111\rangle + f_A\sqrt{f_B(1-f_B)}|1110111\rangle).
\end{aligned} \tag{23}$$

Com uma probabilidade correspondendo à expressão:  $p(1) = 1 - f_A - f_B + f_Af_B + f_Af_B^2 + f_A^2f_B - f_A^2f_B^2$ , indicando o grau de pertinência de um elemento  $x \in \chi$  no CF  $A \otimes B$  obtido pela aplicação de um conectivo fuzzy XOR  $E_{\otimes}$  e tomando  $f_A(x), f_B(x)$  como argumentos. Já a medida no 7º qubit (mas relacionada ao estado  $|0\rangle$ ) retorna:

$$\begin{aligned}
|\otimes''_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{f_A+f_B-f_Af_B-f_Af_B^2-f_A^2f_B+f_A^2f_B^2}}((1-f_A)(1-f_B)|0000010\rangle \\
&+ (1-f_A)\sqrt{(1-f_B)f_B}|0001010\rangle + (1-f_B)\sqrt{(1-f_A)f_A}|0010010\rangle \\
&+ \sqrt{(1-f_A)(1-f_B)f_Af_B}|0011000\rangle + f_B\sqrt{(1-f_A)f_A}|0111100\rangle \\
&+ f_A\sqrt{(1-f_B)f_B}|1011100\rangle + f_Af_B|1111100\rangle),
\end{aligned} \tag{24}$$

com uma probabilidade de:  $p(0) = f_A + f_B - f_Af_B - f_Af_B^2 - f_A^2f_B + f_A^2f_B^2$ .

Uma simulação com os estados iniciais das expressões da Eq. (11) resulta, após medições, nos estados:  $|\otimes'\rangle$  e  $|\otimes''\rangle$  com: (i) probabilidade  $p(1) = 56\%$  para  $|\otimes'\rangle$  e (ii) probabilidade  $p(0) = 44\%$  para  $|\otimes''\rangle$ .

## 5. Conclusão

Este trabalho discute a porta XOR apresentada na LF demonstrando a sua interpretação na CQ. O desenvolvimento focado na fusão entre LF e CQ revela-se interessante pelo potencial uso destas modelagens em futuros algoritmos aplicados à CQ.

O avanço da CQ demonstra um campo de estudo bastante promissor para as pesquisas, visando auxiliar no seu desenvolvimento, assim como na criação de futuras tecnologias e métodos a serem utilizados nesta área. Trabalhos futuros incluem um estudo mais detalhado acerca da interpretação da construção dual da porta XOR (apresentado na seção 2, a porta X(N)OR) no escopo da CQ.

## Agradecimentos

Os autores agradecem as seguintes agências de fomento: CAPES, CNPq (309160/2019-7; 311429/2020-3, 3305805/2021-5, 150160/2023-2), PqG/FAPERGS (21/2551-0002057-1) e FAPERGS/CNPq (23/2551-0000126-8), PRONEX (16/2551-0000488-9).

## Referências

- Agostini, L. B., da Silva Feitosa, S., de Avila, A. B., Reiser, R., DuBois, A., and Pilla, M. L. (2018). Representing Intuitionistic Fuzzy Bi-implications Using Quantum Computing. In Guilherme A. Barreto and Ricardo Coelho, editor, *Fuzzy Information Processing - 37th Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS 2018, Fortaleza, Brazil, July 4-6, 2018, Proceedings*, volume 831 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 206–216. Springer.
- Aljafar, M. J., Perkowski, M. A., Acken, J. M., and Tan, R. (2018). A Time-Efficient CMOS-Memristive Programmable Circuit Realizing Logic Functions in Generalized AND-XOR Structures. *IEEE Trans. Very Large Scale Integr. Syst.*, 26(1):23–36.
- Aslan, M., Gunduz, M., and Kiran, M. S. (2019). JayaX: Jaya algorithm with xor operator for binary optimization. *Applied Soft Computing*, 82:105576.
- Bedregal, B. R. C., Reiser, R. H. S., and Dimuro, G. P. (2013). Revisiting XOR-Implications: Classes of fuzzy (Co)Implications Based on F-XOR (F-XNOR) Connectives. *Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl. Based Syst.*, 21(6):899–926.
- Benini, L. C. and Jr Meneguette, M. (2009). UMA ABORDAGEM PARA MODELAGEM DE DADOS COM O USO DE SISTEMAS NEURO-FUZZY: APLICAÇÕES GEOESPACIAIS. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos/SP.
- Cressman, A. J., Wattanapanitch, W., Chuang, I., and Sarpeshkar, R. (2022). Formulation and Emulation of Quantum-Inspired Dynamical Systems With Classical Analog Circuits. *Neural Comput.*, 34(4):856–890.
- de Avila, A. B., Santos, H. S., Cruz, A. P., de Souza, S. X., Lucca, G., Moura, B., Yamin, A. C., and Reiser, R. (2023). HybriD-GM: A Framework for Quantum Computing Simulation Targeted to Hybrid Parallel Architectures. *Entropy*, 25(3):503.
- Dirac, P. A. M. (1939). A new notation for quantum mechanics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 35(3):416–418.
- Haaswijk, W., Soeken, M., Amarù, L. G., Gaillardon, P., and Micheli, G. D. (2017). A novel basis for logic rewriting. In *22nd Asia and South Pacific Design Automation Conference, ASP-DAC 2017, Chiba, Japan, January 16-19, 2017*, pages 151–156. IEEE.



- Hocine, A., Kouaissah, N., and Lozza, S. O. (2023). XOR-analytic network process and assessing the impact of COVID-19 by sector. *Computers Industrial Engineering*, 177:109017.
- Liu, F., Chen, Y., and Zhou, D. (2023). A two-dimensional approach to flexibility degree of XOR numbers with application to group decision making. *Math. Comput. Simul.*, 207:267–287.
- Mangal, M. and Singh, M. P. Analysis of Multidimensional Xor Classification Problem with Evolutionary Feedforward Neural Networks. *Int. J. Artif. Intell. Tools*, 16.
- Mannucci, M. A. (2006). Quantum fuzzy sets: Blending fuzzy set theory and quantum computation. *CoRR*, abs/cs/0604064.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2011). *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 10th edition.
- Portugal, R., Lavor, C. C., Carvalho, L. M., and Maculan, N. (2004). Notas em Matemática aplicada 8. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos/SP.
- Wille, R., Chattopadhyay, A., and Drechsler, R. (2016). From reversible logic to quantum circuits: Logic design for an emerging technology. In Walid A. Najjar and Andreas Gerstlauer, editor, *International Conference on Embedded Computer Systems: Architectures, Modeling and Simulation, SAMOS 2016, Agios Konstantinos, Samos Island, Greece, July 17-21, 2016*, pages 268–274. IEEE.