Geração de Implicações Representáveis via Funções General-Overlap e General-Grouping

Alessandra Galvão[1]**, Helida Santos**[2]**, Giancarlo Lucca**[3]**,**
Adenauer Yamin[1]**, Renata Reiser**[1]

[1]PPGC/CDTEC/UFPEL, Pelotas – RS – Brasil
[2]C3/FURG, Rio Grande – RS – Brasil
[3]PGEEC/UCPEL, Pelotas – RS – Brasil

{argalvao,adenauer,reiser}@inf.ufpel.edu.br
helida@furg.br
giancarlo.lucca@ucpel.edu.br

Abstract. *Implication functions are usually generated by aggregators that require properties like associativity and neutral element. This study is concerned with the flexibility/replacement of some of the main analytical properties of fuzzy connectives, aiming to guarantee the generation of new operators, such as overlap and grouping functions, which make conditions more flexible and, therefore extend the fuzzy implications approach.*

Resumo. *As funções de implicação são geralmente geradas por agregadores que exigem propriedades como associatividade e elemento neutro. Este estudo preocupa-se com a flexibilização/substituição de algumas das principais propriedades analíticas de conectivos fuzzy, visando garantir a geração de novos operadores, como funções overlap e grouping, que flexibilizem condições e portanto estendam a abordagem de implicações fuzzy.*

1. Introdução

No contexto da Lógica Fuzzy, funções de agregação e funções de implicação são importantes elementos de constituição de operadores. A extensão da lógica fuzzy considerando diferentes classes de agregadores ainda é um desafio em meio à crescente necessidade de agregar a multiplicidade de atributos. [Bustince et al. 2009, Dimuro et al. 2019]

Além disso, o estudo direcionado à flexibilização/substituição de algumas das principais propriedades analíticas de conectivos fuzzy, garante a geração de novos operadores que flexibilizam condições e portanto estendem a modelagem de aplicações que usam sistemas baseados na abordagem fuzzy, como, por exemplo, a inferência fuzzy.

O objetivo desse artigo é explorar métodos construtivos de gerar funções de agregação General-Overlap e General-Grouping via conceitos de funções n-dimensionais, a fim de simplificar e fornecer mais flexibilidade a sua estrutura. Ademais, visa-se estender os resultados de modo a obter a generalização de QL-Implicação por meio da geração desta via funções General-Overlap (FGO) e General-Grouping (FGG).

Este artigo apresenta na Seção 2 uma revisão sobre conectivos fuzzy. Na Seção 3, são introduzidos métodos para geração de funções General-Overlap e General-Grouping a partir de funções n-dimensionais. Na Seção 4, apresenta-se a formalização dos métodos de geração de implicações a partir de FGO e FGG, baseados na negação $N_{\top}$. Seguem uma breve conclusão e a continuidade da pesquisa na última seção.

2. Estudos Preliminares de Propriedades dos Conectivos Fuzzy

Os conectivos são amplamente utilizados para a realização de operações em conjuntos fuzzy, visto que permitem a modelagem de sistemas complexos e imprecisos de modo mais adequado quando comparado ao uso da lógica booleana tradicional. A seguir, são apresentados os principais conectivos fuzzy estudados.

Definição 2.1. *Uma função* $N\colon [0,1] \to [0,1]$ *é uma* ***negação fuzzy*** *se satisfaz:*

$N1$*:* $N(0) = 1$ *e* $N(1) = 0$*; (condições de borda)*

$N2$*: Se* $x \leq y$ *então* $N(x) \geq N(y), \forall x, y \in [0,1]$*; (antitonicidade).*

Uma negação fuzzy N é forte se também verifica:

$N3$: $N(N(x)) = x, \forall x \in [0,1]$; (involutividade).

Algumas propriedades adicionais podem ser analisadas:

$N4$: $N(x) = 1$ se e somente se $x = 0$; (non-filling)

$N5$: $N(x) \in \{0,1\}$ se e somente se $x = 0$ ou $x = 1$; (fronteira)

$N6$: $N_{\top}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

A seguir, seguem conceitos de (co)normas triangulares [Klement and Navara 1999].

Definição 2.2. *Uma norma triangular (t-norma) é uma função* $T\colon [0,1]^n \to [0,1]$*, monotônica, associativa, simétrica e tem elemento* 1*-neutro.*

Definição 2.3. *Uma conorma triangular (t-conorma) é uma função* $S\colon [0,1]^n \to [0,1]$*, monotônica, associativa, simétrica e tem elemento* 0*-neutro.*

Na Teoria dos Conjuntos [Zadeh 1965] uma agregação combina uma n-upla de números valorados no intervalo $[0,1]$ em um único número em $[0,1]$.

Definição 2.4. *[Mesiar and Komornikova 1997] Uma função* $A\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *é uma agregação se satisfaz:*

A1: $A(x, x, \ldots, x) = x$ *(identidade);*

A2: $A(0, 0, \ldots, 0) = 0$ *e* $A(1, 1, \ldots, 1) = 1$ *(condições de contorno);*

A3: $A(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x'_1, \ldots, x'_n)$ *se* $x_i \leq x'_i$*,* $\forall i \in \mathbb{N}_n$ *(monotonicidade crescente).*

Na Tabela 1 são apresentadas propriedades adicionais para funções de agregação, fundamentais para a compreensão do estudo.

Tabela 1. Propriedades adicionais para as funções de agregação

Índice	Descrição
$A4$	$A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, para uma permutação σ: $\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$.
$A5$	$A(\mathrm{e}, \ldots, \mathrm{e}, x, \mathrm{e}, \ldots, \mathrm{e}) = x$ (Elemento Neutro - EN).
$A6$	Se $\prod_{i=1}^n x_i = 0$, então $A(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
$A7$	Se $\prod_{i=1}^n x_i = 1$, então $A(x_1, \ldots, x_n) = 1$.
$A8$	Se $x_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}_n$, então $A(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
$A9$	Se $\exists i \in \mathbb{N}_n$ tal que $x_i = 1$, então $A(x_1, \ldots, x_n) = 1$.
$A10$	Se $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, então $A(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
$A11$	Se $\exists i \in \mathbb{N}_n$ de modo que $x_i = 1$, então $A(x_1, \ldots, x_n) = 1$.
$A12$	$A(x_1, \ldots, x_n) = 0$ se, e somente se, $x_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}_n$.
$A13$	$A(x_1, \ldots, x_n) = 0$ se, e somente se $\exists i \in \mathbb{N}_n$ tal que $x_i = 1$.
$A14$	$A(x_1, \ldots, x_n) = 0$ se, e somente se, $\prod_{i=1}^n x_i = 0$.
$A15$	$A(x_1, \ldots, x_n) = 1$ se, e somente se, $\prod_{i=1}^n x_i = 1$.

Pode-se ainda classificar uma função de agregação [Pekala 2019]. Seja $A\colon [0,1]^n \to [0,1]$ uma função de agregação, para $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$, tem-se:

(i) A é conjuntiva se $A(x_1, \ldots, x_n) \leq \min\limits_{i=1}^{n} x_i$;

(ii) A é disjuntiva se $A(x_1, \ldots, x_n) \geq \max\limits_{i=1}^{n} x_i$;

(iii) A é uma média se $\min\limits_{i=1}^{n} x_i \leq A(x_1, \ldots, x_n) \leq \max\limits_{i=1}^{n} x_i$;

(iv) A é uma mista se não é conjuntiva, disjuntiva e nem uma média.

As funções de agregação conjuntivas: overlap, general-overlap e overlap n-dimensional flexibilizam a classe das t-normas, sem necessitar o elemento neutro, e ainda promovem avaliações, sobreposição e interação entre conjuntos fuzzy nas aplicações.

Definição 2.5. *[DeMiguel et al. 2019] A função* $\mathcal{O}\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *é uma função general-overlap se é contínua e satisfaz as propriedades* $A3$, $A4$, $A5$, $A6$ *e* $A7$.

Definição 2.6. *[Bustince et al. 2010] Uma função* $O\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *contínua é uma função overlap se satisfaz as condições:*

O_1: $O(x,y) \leq O(x,z)$ *se* $y \leq z$ *(Monotônica Crescente);*

O_2: $O(x,y) = O(y,x)$ $\forall x, y \in [0,1]$ *(Simétrica);*

O_3: $O(x,y) = 0$ *se, e somente se* $x = 0$ *ou* $y = 0$*;*

O_4: $O(x,y) = 1$ *se, e somente se* $x = y = 1$.

A função overlap pode ainda satisfazer uma propriedade extra:

O_5: $O(x,1) \leq x, \forall x \in [0,1]$ (Deflação).

Definição 2.7. *[Gómez et al. 2016] Uma função* $O_n\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *é um overlap* n*-dimensional sempre que for contínua e verificar as propriedades* $A3$, $A4$, $A14$ *e* $A15$.

E, nas construções duais, reportamos as funções de agregação disjuntivas: grouping, general-grouping e grouping n-dimensional.

Definição 2.8. *[Santos et al. 2020] Uma função general-grouping* $\mathcal{G}\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *é uma função contínua que satisfaz as propriedades* $A3$, $A4$, $A8$ *e* $A9$.

Definição 2.9. *[Bustince et al. 2012] Uma função bivariante* $G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *contínua é uma função grouping (G) se,* $\forall x, y \in [0,1]$*, verificam-se as seguintes propriedades:*

G_1: $G(x,y) = G(x,y)$ *(Comutatividade);*

G_2: $G(x,y) \leq G(x,z)$ *se* $y \leq z$ *(Monotonicidade);*

G_3: $G(x,y) = 0$ *se, e somente se* $x = 1$*;*

G_4: $G(x,y) = 1$ *se, e somente se* $x = 1$ *ou* $y = 1$.

Remark 2.1. *Em [Dimuro et al. 2014], considerando uma função grouping* $G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *e uma negação fuzzy* $N\colon [0,1] \to [0,1]$*, mostra-se que o par* (G,N) *satisfaz a Lei do Meio-Excluído: (LEM)* $G(N(x),x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$.

Definição 2.10. *[Gómez et al. 2016] Uma função grouping* n*-dimensional (nGF)* $\mathcal{G}_n\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *é uma função contínua satisfazendo* $A3$, $A4$, $A12$ *e* $A13$.

A partir do estudo de conectivos e agregadores fuzzy é possível analisar as condições providas por propriedades analíticas para geração de novas implicações com uma abordagem mais flexível.

Definição 2.11. *[Fodor 1995] Uma função bivariante* $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *é uma implicação fuzzy se verifica as propriedades: antitonicidade no primeiro argumento, isotonicidade no segundo argumento (SPI), condição de contorno (BC) 1, 2 e 3.*

Além das propriedades mencionadas anteriormente, uma implicação fuzzy $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ também pode satisfazer outras condições, listadas na Tabela 2.

Definição 2.12. *Sejam uma t-conorma* $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *e uma negação* $N\colon [0,1] \to [0,1]$*. Uma função* $I_{S,N}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *é um (S,N)-implicador definido pela composição:*

$$I_{S,N}(x,y) = S(N(x),y), \forall x, y \in [0,1]. \tag{1}$$

Se a função I é uma implicação definida pela Eq. (1), então ela é uma (S,N)-implicação, e generaliza a implicação definida na lógica clássica $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

Definição 2.13. *[Baczyński and Jayaram 2010] Sejam uma t-conorma* $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$*, uma negação forte* $N\colon [0,1] \to [0,1]$ *e uma t-norma* $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$*. Uma função* $I_{S,N,T}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *é um QL-implicador se satisfaz a composição:*

$$I_{S,N,T}(x,y) = S(N(x), T(x,y)), \forall x, y \in [0,1]. \tag{2}$$

Tabela 2. Propriedades Adicionais de Implicações Fuzzy

Sigla	Propriedade	Descrição
NP	(Neutralidade à esquerda)	$I(1, y) = y$.
EP	(Princípio de troca)	$I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$.
IP	(Identidade)	$I(x, x) = 1$.
OP	(Ordenação)	$I(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \leq y$.
LOP	(Ordenação à esquerda)	$x \leq y \Rightarrow I(x, y) = 1$.
ROP	(Ordenação à direita)	$I(x, y) = 1 \Rightarrow x \leq y$.
LF	(Menor falsidade)	$I(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ e $y = 0$.
LT	(Verdade mais baixa)	$I(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ or $y = 1$.
CP	(Contrapositividade da negação fuzzy)	N: $I(x, y) = I(N(y), N(x))$.
LCP	(Contrapositividade à esquerda da negação fuzzy)	N: $I(N(x), y) = I(N(y), x)$.
RCP	(Contrapositividade à direita da negação fuzzy)	N: $I(x, N(y)) = I(y, N(x))$.
LBC	(Condição de contorno à esquerda)	$I(0, y) = 1$.
RBC	(Condição de contorno à direita)	$I(x, 1) = 1$.

Se I é uma implicação definida pela Eq. (2), então, ela é uma QL-implicação, e generaliza a implicação definida na lógica quântica: $p \to q \equiv \neg p \vee (p \wedge q)$. A Tabela 3 apresenta exemplos de QL-implicações e (S,N)-implicações e explicita algumas de suas propriedades, conforme descrito em [Baczyński and Jayaram 2008], tendo na terceira coluna exemplos de $I_{S,N}$, e na quarta coluna, vemos os exemplos de $I_{S,N,T}$.

Tabela 3. Exemplos de Implicações

Implicações	Propriedades	$I_{S,N}$	$I_{S,N,T}$
$I_{KD}(x, y) = \max(1 - x, y)$	$(NP), (EP)$	✓	✓
$I_{LK}(x, y) = \min(1 - x + y, 1)$	$(NP), (EP), (IP), (OP)$	✓	✓
$I_{MK}(x, y) = \max(1 - x^2, y)$	$(NP), (EP)$	✓	✗
$I_D(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x = 0, \\ y, \text{ se } x > 0 \end{cases}$	$(NP), (EP)$	✓	✗
$I_{TD}(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 1, \\ y, \text{ se } x = 1 \end{cases}$	$(NP), (EP), (IP)$	✓	✗

3. Contribuições na Classe de Funções General-Overlap e General-Grouping

Apresenta-se a metodologia para geração de Funções General-Overlap (FGO) e Funções General-Grouping (FGG) a partir de funções overlap e grouping n-dimensionais.

3.1. Geração de Funções General-Overlap via Funções Overlap n-Dimensionais

Apresenta-se a definição de agregações definidas por parâmetros $a, b \in [0, 1]$.

Definição 3.1. *Sejam $0 \leq a < b \leq 1$ e $A\colon [0, 1]^n \to [0, 1]$ uma função de agregação. Então, $A_a^b, A_a, A^b\colon [0, 1]^n \to [0, 1]$ são definidas, como segue $\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n$:*

$$A_a^b(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \text{se } A(\vec{x}) \leq a \\ 1, & \text{se } A(\vec{x}) \geq b \\ \frac{A(\vec{x}) - a}{b - a}, & \text{se } a < A(\vec{x}) < b. \end{cases}$$

Proposição 3.1. *Seja $0 \leq a < b \leq 1$ e $\mathcal{O}_n\colon [0, 1]^n \to [0, 1]$ uma função overlap n-dimensional. Então,*

(a) $\mathcal{O}_a^b$ é uma FGO que não satisfaz $(A14)$ nem $(A15)$.
(b) $\mathcal{O}_a$ é uma FGO que não satisfaz $(A14)$, mas garante $(A15)$.
(c) $\mathcal{O}^b$ é uma FGO que garante $(A14)$, porém não satisfaz $(A15)$.

3.2. Geração de Funções General-Grouping via Funções Grouping n-Dimensionais

Considerando as construções duais, a próxima proposição mostra sob quais condições pode-se obter um método de gerar FGG a partir de funções grouping n-dimensionais.

Proposição 3.2. *Seja $0 \leq a < b \leq 1$ e $\mathcal{G}_n\colon [0, 1]^n \to [0, 1]$ uma função grouping n-dimensional. Então tem-se garantidas as seguintes propriedades:*

(a) $\mathcal{G}_a^b$ é uma FGG que não satisfaz $(A12)$ nem $(A13)$;
(b) $\mathcal{G}_a$ é uma FGG que não satisfaz $(A12)$, mas garante $(A13)$;
(c) $\mathcal{G}^b$ é uma FGG que garante $(A12)$ mas não satisfaz $(A13)$.

4. Contribuições na Classes das QL-implicações Fuzzy

Esta seção apresentam proposições que formalizam métodos de geração de implicações a partir de FGO e FGG, primeiramente baseadas na maior negação fuzzy $N_\top$.

4.1. Geração de QL-implicações a partir de $(G, N_\top, O)$

Em [Dimuro et al. 2017], o Lema 4.1 e o Teorema 4.1 definem uma QL-implicação a partir de funções *overlap* e *grouping*, com a negação $N_\top$, reportadas a seguir.

Proposição 4.1. *Sejam a negação* $N_\top\colon [0,1] \to [0,1]$*, a função overlap* $O\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *verificando (O5), e a função grouping* $G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *verificando (LEM). Então,* $I_{G,N,O}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *é uma QL-implicação.*

Tabela 4. Construção dual de funções *grouping* e de funções *overlap*

Funções *Grouping* Bivariadas	**Funções *Overlap* Bivariadas**
$G_2^V(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-(1-x)^2(1-y)^2), \text{ se } x,y\in[0,\frac{1}{2}];\\ \max\{x,y\}, \text{ caso contrário.}\end{cases}$	$O_2^V(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1+(2x-1)^2(2y-1)^2\right) \text{ se } x,y\in[0,\frac{1}{2}[\\ \min\{x,y\}, \text{caso contrário.}\end{cases}$
$G_D(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y-2xy}{2-(x+y)} \text{ se } x+y\neq 2;\\ 0, \text{ se } x+y=2.\end{cases}$	$O_D(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x+y} \text{ se } x+y\neq 0;\\ 0, \text{ caso contrário.}\end{cases}$
$G_m(x,y)=1-\min\{\sqrt{1-x},\sqrt{1-y}\}$	$O_m(x,y)=\min\{\sqrt{x},\sqrt{y}\}$

A Tabela 4, ilustra funções *overlap* bivariadas e suas correspondentes construções duais, as funções *grouping* bivariadas. Em particular, O_m é a conjugada da t-norma do mínimo assim como G_m é a conjugada da t-conorma do máximo, considerando ainda o isomorfismo dado por $\phi : [0,1] \to [0,1]$, e $\phi(x) = \sqrt{x}$. Baseadas nestas funções selecionadas, usando o método descrito na Proposição 4.1, novas funções de implicações fuzzy $I_{G,N_\top,O}$, são descritas na Tabela 5.

Tabela 5. QL-implicações geradas por triplas $(G, N_\top, O)$

$I_{G,N_T,O}$ - **QL-implicações**
$I_{G_2^V,N_\top,O_2^V}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1+(2y-1)^2\right), \text{se } x=1 \text{ e } y\geq\frac{1}{2};\\ \frac{1}{2}\left(1-(1-y)^2\right), \text{se } x=1 \text{ e } y<\frac{1}{2};\\ 1, \text{ caso contrário.}\end{cases}$
$I_{G_D,N_\top,O_D}(x,y)=\begin{cases}y, \text{se } x=1;\\ 1, \text{caso contrário.}\end{cases}$
$I_{Gm,N_\top,Om}(x,y)=\begin{cases}1-\sqrt{1-\sqrt{y}}, \text{ se } x=1;\\ 1, \text{ caso contrário.}\end{cases}$

4.2. Geração de QL-implicações a partir de $(\mathcal{G}, N, \mathcal{O})$

Como meio de extensão dos resultados mencionados acima, é proposto um operador construído a partir de triplas $(\mathcal{G}, N, \mathcal{O})$ que estende a definição de um QL-implicador.

Alguns membros desta família de QL-implicações não satisfazem propriedades relevantes e esperadas para as implicações fuzzy, como a antitonicidade à esquerda [Baczyński and Jayaram 2010]. A composição de uma t-conorma S, uma negação fuzzy N e uma t-norma T definindo um QL-implicador $I_{QL}(x,y) = S(T(x,y), N(x))$ foi inspirada na equivalência da lógica clássica substituindo $\vee, \wedge$, e $\neg$ por uma FGG $\mathcal{G}$, uma FGO $\mathcal{O}$, e uma negação fuzzy N, respectivamente.

Definição 4.1. *Uma função* $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *é uma QL-operação derivada de uma tripla* $(\mathcal{G}, N, \mathcal{O})$ *se existe uma função FGG bivariada* $\mathcal{G}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$*, uma negação fuzzy* $N\colon [0,1] \to [0,1]$ *e uma função FGO bivariada* $\mathcal{O}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$*, tal que*

$$I(x,y) = \mathcal{G}(N(x), \mathcal{O}(x,y)), \tag{3}$$

para todo $x, y \in [0,1]$*. Denota-se essa QL-operação por* $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$*.*

Teorema 4.1. *Seja $I_{\mathcal{G},\mathcal{O},N}$ uma QL-operação construída a partir de uma tripla $(\mathcal{G}, N, \mathcal{O})$, quando uma FGO $\mathcal{O}$ e uma FGG $\mathcal{G}$ tem $n_{\mathcal{O}}$ e $n_{\mathcal{G}}$ como NE, respectivamente. Então:*

(i) *$I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (SPI), (BC1), (BC2) e (BC3), quanto as propriedades da Def. 2.11.*
(ii) *$I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (LBC).*
(iii) *Se $n_{\mathcal{O}} = 1$, então $(\mathcal{G}, N)$ satisfaz (LEM) se, e somente se $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (RBC).*
(iv) *Se $n_{\mathcal{O}} = 1$ e $n_{\mathcal{G}} = 0$, então $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (NP).*
(v) *Se $n_{\mathcal{G}} = 0$, então $N_{I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}} = N$.*
(vi) *$N_{I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}} = N_\top$.*
(vii) *Se $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (LT), então N satisfaz (N4).*
(viii) *Se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{O}$ satisfazem $(A12)$ e $(A14)$, respectivamente, e N satisfaz N5, então $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (LF).*
(ix) *Se $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (ROP), então N satisfaz (N4).*
(x) *Se $N = N_\top$, então $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (LOP).*
(xi) *Se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{O}$ satisfaz $(\mathcal{G}_n 3)$ e $(A15)$, respectivamente, então:*
  (a) Se N é uma N5, então $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (LT);
  (b) Se N satisfaz (N4), então $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (ROP);
  (c) Se $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (LOP), então $N = N_\top$
  (d) $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ apenas satisfaz (RCP) para negação $N_\top$.
(xii) *Se $\mathcal{O}$ é idempotente e $(\mathcal{G}, N)$ satisfaz (LEM), então $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (IP).*
(xiii) *$I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}$ satisfaz (EP).*

Proposição 4.2. *Pelo Teorema 4.1, se N satisfaz (N4), então $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ não satisfaz (LT).*

Proposição 4.3. *Se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{O}$ satisfazem $(A13)$ e $(A15)$, respectivamente, então:*
(i) Se $n_{\mathcal{O}} = 1$ e $n_{\mathcal{G}} = 0$ são NE de $\mathcal{O}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente, então $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ não satisfaz (LCP) para qualquer negação N';
(ii) $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ não satisfaz (OP).

As principais propriedades satisfeitas pelas QL-implicações são derivadas das propriedades das QL-operações dadas pelas triplas $(\mathcal{G}, N, \mathcal{O})$. Observe que, em alguns casos, estas funções de QL-implicações podem satisfazer versões mais fracas de propriedades das QL-implicações e menos restritivas das derivadas de t-normas e t-conormas.

Proposição 4.4. *Se $I_{\mathcal{G},N,\mathcal{O}}$ satisfaz (RBC) e a FGO $\mathcal{O}$ satisfaz (O5), então o par $(\mathcal{G}, N)$ satisfaz (LEM).*

Teorema 4.2. *Seja $\mathcal{O}$ uma FGO, e $\mathcal{G}$ uma FGG, então:*

(i) Se uma QL-operação construída a partir da tripla $(\mathcal{G}, N, \mathcal{O})$, onde $\mathcal{G}$ satisfaz $(A13)$ e $\mathcal{O}$ satisfaz $(A15)$, é uma função de implicação fuzzy, então $N = N_\top$.

(ii) Se $N = N_\top$ então uma QL-operação construída a partir da tripla $(\mathcal{G}, N, \mathcal{O})$ é uma função de implicação fuzzy.

Proposição 4.5. *Sejam uma FGO $\mathcal{O}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, uma FGG $\mathcal{G}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, com $n_{\mathcal{O}}$ e $n_{\mathcal{G}}$ como NE de $\mathcal{O}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente, e sendo $N_\top\colon [0,1] \to [0,1]$ a maior negação fuzzy. Portanto, as seguintes declarações são válidas:*
(i) Se $n_{\mathcal{O}} = 1$, a QL-implicação gerada pela tripla $(\mathcal{G}, N_\top, \mathcal{O})$ é dada por:

$$I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}(x,y) = \begin{cases} 1, \ \textit{se } x < 1 \textit{ ou } y = 1 \\ \mathcal{G}(0,y), \ \textit{se } x = 1 \textit{ e } y < 1. \end{cases}$$

(ii) Se $n_{\mathcal{G}} = 0$, então a QL-implicação gerada pela tripla $(\mathcal{G}, N_\top, \mathcal{O})$ é dada por:

$$I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}(x,y) = \begin{cases} \mathcal{O}(1,y), \ \textit{se } x = 1 \textit{ e } y < 1 \\ 1, \ \textit{se } \ x < 1 \textit{ ou } y = 1. \end{cases}$$

Teorema 4.3. *Seja $I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}\colon [0,1]^n \to [0,1]$ uma QL-implicação construída a partir de uma tripla $(\mathcal{G}, N_\top, \mathcal{O})$. Então, é verdadeiro que:*
(i) $I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}$ satisfaz (LBC), (LOP), (RCP) and (EP);
(ii) Se $n_{\mathcal{O}}{=}1$ e $n_{\mathcal{G}}{=}0$ são os NE de $\mathcal{O}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente, então $I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}$ satisfaz (NP);
(iii) $N_{I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}} = N_\top$;
(iv) Se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{O}$ satisfazem $(A12)$ e $(A14)$, respectivamente, então $I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}$ satisfaz (LF);
(v) $I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}$ satisfaz (FP);
(vi) Se $n_{\mathcal{O}} = 1$ e $n_{\mathcal{G}} = 0$ são NE de $\mathcal{O}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente, então $I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}$ não satisfaz (LCP) para $N_\top$;
(vii) $I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}$ não satisfaz (ROP), (LT) e (OP).

Remark 4.1. *Contrapondo o Teorema 4.3, seja $\mathcal{G}_{LK}$ uma FGG*

$$\mathcal{O}_S(x,y) = \begin{cases} xy, \text{ se } xy \leq 0.6; \\ 0.6, \text{ se } 0.6 \leq xy \leq 0.8; \\ 2xy-1, \text{ se } xy \geq 0.8. \end{cases}$$

Então, $I_{\mathcal{G}_{LK},N_S,\mathcal{O}_S}$ é uma QL-implicação dada por:

$$I_{\mathcal{G}_{LK},N_S,\mathcal{O}_S}(x,y) = \begin{cases} \min(1-x(1-y),1), \text{ se } xy \leq 0.6; \\ \min(1.6-x,1), \text{ se } 0.6 \leq xy \leq 0.8; \\ x(2y-1), \text{ se } xy \geq 0.8. \end{cases}$$

5. Conclusão

Este trabalho contempla resultados importantes a respeito da geração de funções general-overlap e general-grouping, bem como de QL-implicações fuzzy, a partir de funções overlap, grouping e negações fuzzy.

A partir do estudo sobre agregadores fuzzy, mais especificamente a respeito de overlap e grouping, foi possível verificar as condições necessárias para a flexibilização de algumas propriedades analíticas, o que possibilitou a composição de novas funções mais flexíveis e por conseguinte, a extensão da modelagem de sistemas fuzzy.

Contribuindo, dessa forma, com a introdução de novos métodos para geração de operadores fuzzy, passíveis de aplicações em diversas áreas de estudo, principalmente voltadas à ciência e tecnologia, e portanto, capazes de gerar avanços significativos na área, tornando os sistemas mais precisos, eficientes e confiáveis.

Na continuidade busca-se aplicar esta teoria para fundamentar métodos de inferência fuzzy nas aplicações flexíveis em desenvolvimento no LUPS-PPGC-UFPEL, como alocação de recursos na Computação em Nuvem.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS) (Proc. 23/2551-0000126-8) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq (150160/2023-2).

Os autores agradecem as seguintes agências de fomento: CAPES, CNPq (309160/2019-7; 311429/2020-3, 3305805/2021-5, 150160/2023-2), PqG/FAPERGS (21/2551-0002057

Referências

Baczyński, M. and Jayaram, B. (2008). (S, N)- and R-implications: A state-of-the-art survey. *Fuzzy Sets Syst.*, 159(14):1836–1859.

Baczyński, M. and Jayaram, B. (2010). QL-implications: Some properties and intersections. *Fuzzy Sets Syst.*, 161:158–188.

Bustince, H., Fernández, J., Mesiar, R., Montero, J., and Orduna, R. (2009). Overlap index, overlap functions and migrativity. In Carvalho, J. P., Dubois, D., Kaymak, U., and da Costa Sousa, J. M., editors, *Proc. Joint 2009 Int. Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society of Fuzzy Logic and Technology Conference, Lisbon, Portugal*, pages 300–305.

Bustince, H., Fernandez, J., Mesiar, R., Montero, J., and Orduna, R. (2010). Overlap functions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(3):1488–1499.

Bustince, H., Pagola, M., Mesiar, R., Hüllermeier, E., and Herrera, F. (2012). Grouping, overlaps, and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparisons. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 20(3):405–415.

DeMiguel, L., Gómez, D., Rodríguez, J. T., Montero, J., Bustince, H., Dimuro, G. P., and Sanz, J. A. (2019). General overlap functions. *Fuzzy Sets Syst.*, 372:81–96.

Dimuro, G. P., Bedregal, B., Bustince, H., Jurio, A., Baczyński, M., and Miś, K. (2017). QL-operations and QL-implication functions constructed from tuples (O, G, N) and the generation of fuzzy subsethood and entropy measures. *Int. J. Approximate Reasoning*, 82:170 – 192.

Dimuro, G. P., Bedregal, B., and Santiago, R. H. N. (2014). On (G,N)-implications derived from grouping functions. *Information Sciences*, 279:1–17.

Dimuro, G. P., Santos, H. S., Bedregal, B. R. C., Borges, E. N., Palmeira, E. S., Fernández, J., and Bustince, H. (2019). On D-implications derived by grouping functions. In *2019 IEEE Intl Conf. on Fuzzy Systems, LA, USA, June 23-26, 2019*, pages 1–6. IEEE.

Fodor, J. C. (1995). Contrapositive symmetry of fuzzy implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 69(2):141–156.

Gómez, D., Rodríguez, J. T., Montero, J., Bustince, H., and Barrenechea, E. (2016). n-Dimensional overlap functions. *Fuzzy Sets Syst.*, 287:57–75.

Klement, E. P. and Navara, M. (1999). A survey on different triangular norm-based fuzzy logics. *Fuzzy Sets and Systems*, 101(2):241–251.

Mesiar, R. and Komornikova, M. (1997). Aggregation operators. *Proc. XI Conference on applied Mathematics PRIM 96*, pages 193–211.

Pekala, B. (2019). *Uncertainty Data in Interval-Valued Fuzzy Set Theory - Properties, Algorithms and Applications*, volume 367 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer.

Santos, H. S., Dimuro, G. P., da Cruz Asmus, T., Lucca, G., Borges, E. N., Bedregal, B. R. C., Sanz, J. A., Fernández, J., and Bustince, H. (2020). General grouping functions. In *18th Int. Conference, IPMU 2020, Lisbon, Portugal, Proceedings, Part II*, volume 1238 of *Com. in Computer and Inf. Science*, pages 481–495. Springer.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Inf. Control.*, 8(3):338–353.