

Modelagem Quantum-Fuzzy XOR Fuzzy E_{\ominus}

**Bruna Novack¹, Juliano Buss¹, Helida Santos², Giancarlo Lucca³,
Anderson Avila¹, Adenauer Yamin¹, Anderson Cruz⁴, Renata Reiser¹**

¹LUPS – Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), Pelotas-RS, Brasil

{bcdnovack, jsbuss, reiser, abdavila, adenauer}@inf.ufpel.edu.br

²C3 – Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande-RS, Brasil

helida@furg.br

³PGEEC – Universidade Católica de Pelotas (UCPEL), Pelotas-RS, Brasil

giancarlo.lucca@ucpel.edu.br

⁴IMD – Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal-RN, Brasil

anderson@imd.ufrn.br

Abstract. *This article presents the modeling of Fuzzy Logic operators via Quantum Computing, analyzing the XOR connective that is obtained by the difference between the union and the intersection between fuzzy sets, also performing evolutions considering the instantiation of the input data.*

Resumo. *Este artigo apresenta a modelagem de operadores da Lógica Fuzzy via Computação Quântica, analisando o conectivo XOR que é obtido pela diferença entre a união e a intersecção entre conjuntos fuzzy, realizando ainda as evoluções considerando a instânciação dos dados de entrada.*

1. Introdução

A Computação Quântica (CQ) e a Lógica Fuzzy (LF) permitem modelar incertezas de formas distintas oferecendo, no entanto, relevantes benefícios para o desenvolvimento da ciência e de novas tecnologias computacionais. A junção dessas duas áreas pode resultar em uma excelente abordagem para solucionar de forma mais eficiente problemas complexos da computação clássica. De um lado, a CQ utiliza fundamentos da Mecânica Quântica para modelar incertezas de sistemas físicos de dimensões nanométricas. Por outro lado, a LF modela a incerteza na expressão do raciocínio humano e a imprecisão na medida de características/atributos dos sistemas, através de variáveis linguísticas associadas a relações de pertinência dos Conjuntos Fuzzy (CFs).

Em [de Avila et al. 2023] tem-se um ambiente de simulação híbrida para o paralelismo e emaranhamento quântico via arquiteturas distribuídas e multiprocessadas da computação clássica. Portanto, este trabalho foca na interpretação de algoritmos flexíveis via operadores quânticos, considerando a integração de conceitos da CQ e de fundamentos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy [Acampora et al. 2023].

As relevantes aplicações científicas e tecnológicas em diversas áreas do conhecimento e da computação, como na criptografia [Aboughalia and Alkishriwo 2018], e na

geração de números pseudo-aleatórios [Sharma et al. 2022] motivam os novos estudos para modelagem do operador XOR.

Neste trabalho, busca-se estender as áreas de estudo do conectivo fuzzy XOR, considerando a abordagem híbrida para algoritmos quantum-fuzzy, provendo interpretações de conectivos da LF via operadores da CQ. Em particular, dentre as várias definições de operadores fuzzy X(N)OR [Bedregal et al. 2013a], é considerado a extensão fuzzy da abordagem clássica do XOR definida pela expressão: $x \ominus y = ((x \vee y) - (x \wedge y))$.

O presente artigo encontra-se estruturado da seguinte maneira: a Seção 2 aborda os conceitos fundamentais da LF necessários para compreensão do desenvolvimento desta pesquisa, além de realizar uma breve discussão sobre as transformações e circuitos quânticos. Na Seção 3, é exposta a aplicação da CQ com o propósito de modelar os conectivos da LF, os quais auxiliam a progressão deste estudo. O conectivo XOR, que constitui o foco deste artigo, é abordado na Seção 4. Finalmente, na última Seção são apresentadas as conclusões decorrentes do desenvolvimento deste trabalho.

2. Preliminares

2.1. Lógica Fuzzy

A lógica clássica define as relações de pertinência de modo rígido (*crisp*), onde um elemento pertence ou não a um dado conjunto. A Teoria dos Conjuntos Fuzzy é uma extensão da teoria clássica, pois através de uma função de pertinência é possível que um elemento pertença parcialmente a um conjunto, com um grau de pertinência associado. Considerando um CF A , em um universo de discurso não vazio, possuindo a função de pertinência representado por $f_A(x)$, $0 \leq f_A(x) \leq 1$, sendo $[0, 1]$ o conjuntos de todos os valores fuzzy, sua expressão é dada sendo [Klement and Navara 1999]:

$$A = \{(x, f_A(x)) : x \in X\}. \quad (1)$$

Uma t-(co)norma é uma função $T(S) : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que é comutativa, associativa, crescente e satisfaz, respectivamente, $T(x; 1) = x$ e $S(x; 0) = x$, $\forall x \in [0, 1]$.

Veja a Tabela 1 ilustrando a classe de t-(co)normas.

Tabela 1. Exemplificando (Co)Normas Triangulares.

Expressões	$T(x, y)$	$S(x, y)$
Gödel	$T_G(x, y) = \min(x, y)$;	$S_G(x, y) = \max(x, y)$
Lukasiewicz	$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$;	$S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$;
Produto algébrico	$T_P(x, y) = x \cdot y$.	$S_P(x, y) = x + y - x \cdot y$.

Uma negação fuzzy é uma função $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as propriedades:

(N1) $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$;

(N2) É monotônica decrescente. Se $x \leq y$ então $N(x) \geq N(y)$, $\forall x, y \in [0, 1]$.

Se a negação fuzzy satisfaz a propriedade de involutividade:

(N3) $N(N(x)) = x$, $\forall x \in [0, 1]$, então ela é dita negação forte.

A negação padrão (ou negação de Zadeh) é forte e é expressa por: $N_S(x) = 1 - x$.

O conectivo fuzzy (XOR) $E: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e sua construção dual, o conectivo fuzzy (X(N)OR) $D: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ são definidos pelas propriedades:

$$\begin{aligned} E1: E(1, 1) = E(0, 0) = 0 \text{ e } E(1, 0) = 1; & \quad D1: D(1, 1) = D(0, 0) = 1 \text{ e } D(0, 1) = 0; \\ E2: E(x, y) = E(y, x); & \quad D2: D(x, y) = D(y, x); \\ E3: \text{Se } x \leq y \text{ então } E(0, x) \leq E(0, y); & \quad D3: \text{Se } x \leq y \text{ então } D(0, x) \geq D(0, y); \\ \text{Se } x \leq y \text{ então } E(1, x) \geq E(1, y). & \quad \text{Se } x \leq y \text{ então } D(1, x) \leq D(1, y). \end{aligned}$$

A operação complemento de um CF A , é o CF $A' = \{(x, f_{A'}(x)) : x \in X\}$, onde $f_{A'} : X \rightarrow [0, 1]$ é dada pela expressão: $f_{A'}(x) = N_S(f_A(x)) = 1 - f_A(x), \forall x \in X$.

Seja T uma t-norma, a intersecção entre dois CFs A e B resulta no CF $A \cap B = \{(x, f_{A \cap B}(x)) : x \in X\}$, cuja função de pertinência $f_{A \cap B} : X \rightarrow [0, 1]$ é dada por:

$$f_{A \cap B}(x) = T(f_A(x), f_B(x)), \forall x \in X. \quad (2)$$

Seja S uma t-conorma, a união entre dois CFs A e B resulta no CF $A \cup B = \{(x, f_{A \cup B}(x)) : x \in X\}$, cuja função de pertinência $f_{A \cup B} : X \rightarrow [0, 1]$ é dada por:

$$f_{A \cup B}(x) = S(f_A(x), f_B(x)), \forall x \in X. \quad (3)$$

As instâncias das Eq. (2) e Eq. (3) considerando T_P, S_P e N_S resultam nas expressões:

$$A \cap_{T_P} B = \{(x, f_A(x) \cdot f_B(x)) : x \in X\}; \quad (4)$$

$$A \cup_{S_P} B = \{(x, f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)) : x \in X\}. \quad (5)$$

Considere a t-conorma S , a t-norma T e seja N uma negação fuzzy forte. Em [Bedregal et al. 2013a], definem-se três classes de conectivos fuzzy XOR, representados por (E), e as construções duais correspondentes aos conectivos fuzzy X(N)OR, denotadas por (D). No presente trabalho, iremos considerar uma dessas classes, sendo o operador XOR obtido da diferença entre a união e a intersecção entre conjuntos fuzzy. Assim, considerando a extensão fuzzy dada por [Bedregal et al. 2013b], então as funções $E_{S,T}, D_{S,T} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ são dadas pelas expressões:

$$E_{S,T}(x, y) = S(x, y) - T(x, y); \quad \text{e} \quad D_{S,T}(x, y) = N(N(T(x, y))) - N(S(x, y)). \quad (6)$$

As funções $E_{S_P, T_P}, D_{S_P, T_P} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, usando a t-norma T_P e a t-conorma S_P dadas na Tabela 1, são definidas pelas expressões:

$$E_{S_P, T_P}(x, y) = x + y - 2xy; \quad \text{e} \quad D_{S_P, T_P}(x, y) = 1 - x - y + 2xy. \quad (7)$$

2.2. Computação Quântica

Na CQ, as transformações quânticas, ou portas quânticas, são responsáveis pela manipulação dos estados quânticos. Tais transformações podem ser unitárias, controladas e de medidas. Elas representam o ferramental matemático amparado nos postulados da Mecânica Quântica. O bit quântico (qubit) é a unidade básica de informação na CQ, composto por um vetor unitário e bidimensional com componentes complexos, genericamente representados na notação de Dirac [Dirac 1939], equacionada como $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. As amplitudes dos respectivos estados são α e β e influenciam na probabilidade do elemento estar ou não no conjunto [Cressman et al. 2022]. A medição é uma operação que realiza a leitura de um qubit, obtendo a informação contida nele, somente sendo possível

obter um bit de informação do estado de um qubit, tendo perda da informação nos outros qubits.

Este estudo considera o modelo de circuitos quânticos, apresentando notações gráficas intuitivas para sincronizações e composições de portas quânticas unitárias [Maron 2010]. A porta Toffoli tem sua expressão matricial representada na Figura 1. A Toffoli opera sobre três qubits, sendo os dois primeiros de controle ($|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$) indicados na Figura 2, e o terceiro é o qubit alvo ($|\omega\rangle$) que sofre transformações (troca de suas amplitudes) conforme o valor dos qubits de controle [Nielsen and Chuang 2011].

$$T_{|x\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \theta \\ v \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \theta \\ \sigma \\ v \end{pmatrix}$$

Figura 1. Expressão Matricial da Porta T.

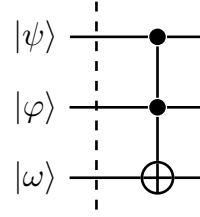


Figura 2. Modelo de circuito quântico da Porta T.

Para a porta NOT, ou Pauli $X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ [Portugal et al. 2004], se a entrada é: $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, aplicando X na saída obtém-se: $|\phi\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$, invertendo as amplitudes dos estados.

3. Modelagem de Conjuntos Fuzzy Quânticos

Os CFs podem ser obtidos a partir de superposições de CFs associados com registradores quânticos. Interpretações das operações fuzzy podem ser obtidas através da composição de portas quânticas atuantes sobre a definição de registradores fuzzy quânticos. As modelagens apresentadas a seguir serão desenvolvidas considerando as funções de pertinência $f, g \rightarrow [0, 1]$ associadas com dois CFs A e B , e o par $|S_{f_i}\rangle$ e $|S_{g_i}\rangle$ de estados [Maron et al. 2013]:

$$|S_{f_i}\rangle = \sqrt{f_A(i)}|1\rangle + \sqrt{1 - f_A(i)}|0\rangle \quad \text{e} \quad |S_{g_i}\rangle = \sqrt{f_B(i)}|1\rangle + \sqrt{1 - f_B(i)}|0\rangle. \quad (8)$$

As seguintes instâncias para os estados $|S_{A_i}\rangle$ e $|S_{B_i}\rangle$ serão utilizados para realizar cálculos sobre a amplitude dos estados obtidos durante a sua evolução:

$$|S_{A_i}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle \quad \text{e} \quad |S_{B_i}\rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}|1\rangle + \frac{\sqrt{6}}{3}|0\rangle. \quad (9)$$

3.1. Interpretação para Complemento de um Conjunto Fuzzy

Em [Mannucci 2006], a operação de complemento representando a negação fuzzy padrão é expressa por:

$$NOT(|S_{f_i}\rangle) = \sqrt{1 - f_A}|1\rangle + \sqrt{f_A}|0\rangle. \quad (10)$$

E, a definição da extensão da operação NOT Quântica para múltiplos qubit é dada por:

$$NOT_N(|S_{f_A}\rangle) = NOT(\otimes_{1 \leq i \leq N}(f_A(i)^{\frac{1}{2}}|1\rangle(1 - f_A(i)^{\frac{1}{2}}|0\rangle)). \quad (11)$$

Em sistemas multiqubits, a anotação NOT_2 executa a porta NOT no segundo e, $NOT_{2,3}$, executa simultaneamente a NOT no segundo e terceiro qubits. Veja nas expressões:

$$NOT_2(|S_{f_1}\rangle|S_{f_2}\rangle) = |S_{f_1}\rangle \otimes NOT(|S_{f_2}\rangle); \quad (12)$$

$$NOT_{2,3}(|S_{f_1}\rangle|S_{f_2}\rangle|S_{f_3}\rangle) = |S_{f_1}\rangle \otimes NOT(|S_{f_2}\rangle) \otimes NOT(|S_{f_3}\rangle). \quad (13)$$

3.2. Interpretação para Intersecção entre Conjuntos Fuzzy

A intersecção fuzzy, definida na Eq. (2) na LF, é modelada pelo operador AND , representado por $AND(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle)$, utilizando os estados definidos na Eq. (8)a e Eq. (8)b, é obtida pela aplicação da transformação quântica Toffoli (\mathcal{T}) [Maron et al. 2013]:

$$\begin{aligned} AND(|S_{f_i}\rangle|S_{g_i}\rangle) &= \mathcal{T}(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle, |0\rangle) \\ &= \mathcal{T}((\sqrt{f_A}|1\rangle + \sqrt{1-f_A}|0\rangle) \otimes (\sqrt{f_B}|1\rangle + \sqrt{1-f_B}|0\rangle) \otimes |0\rangle). \end{aligned}$$

Pela distributividade do produto tensor tem-se:

$$AND(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) = \sqrt{f_A f_B}|111\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)}|100\rangle + \sqrt{(1-f_A)f_B}|010\rangle + \sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}|000\rangle. \quad (14)$$

A medição considera o último qubit. Os estados $|S'_1\rangle$ e $|S'_0\rangle$ serão utilizados para representar a pertinência e a não-pertinência, respectivamente. Para o estado $|S'_1\rangle = |111\rangle$ tem-se uma probabilidade $p(1) = f(x_i) \cdot g(x_i)$. Assim, para todo $x_i \in X$, $f(x_i)$ e $g(x_i)$ indicam a probabilidade de $x \in X$ estar nos CFs definidos pelas funções $f_A : X \rightarrow [0, 1]$ e $g_A : X \rightarrow [0, 1]$, respectivamente. Ademais, $f(x_i) \cdot g(x_i)$ indica a probabilidade de x_i estar na intersecção destes CFs.

Analogamente, a medida do terceiro qubit no estado $|0\rangle$ retorna o estado:

$$|S'_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-f_A f_B}} (\sqrt{f_A(1-f_B)}|100\rangle + \sqrt{(1-f_A)f_B}|010\rangle + \sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}|000\rangle),$$

com probabilidade $p(0) = 1 - f(i) \cdot g(i)$, que representa o complemento de $A \cap B$, pela interpretação da intersecção AND [Agostini et al. 2018].

Utilizando os estados definidos na Eq. (9) como entrada para calcular a amplitude da Eq. (14), são obtidos os seguintes estados:

$$AND(|S_{A_i}\rangle, |S_{B_i}\rangle) = \frac{\sqrt{6}}{6}|111\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3}|100\rangle + \frac{\sqrt{6}}{6}|010\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3}|000\rangle. \quad (15)$$

3.3. Interpretação para União entre Conjuntos Fuzzy

Sejam $|S_{f_i}\rangle$ e $|S_{g_i}\rangle$ estados quânticos representados pelas Eq. (8)a e Eq. (8)b. A união dos CFs dada na Eq. (3) está modelada pelo operador OR , definido pela expressão:

$$\begin{aligned} OR(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) &= S(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) = NOT_3(\mathcal{T}(NOT|S_{f_i}\rangle, NOT|S_{g_i}\rangle, |0\rangle)) = \\ &NOT_3(\mathcal{T}(\sqrt{f_A f_B}|000\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)}|010\rangle + \sqrt{(1-f_A)f_B}|100\rangle + \sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}|110\rangle)). \end{aligned}$$

Aplicando a transformação Toffoli, tem-se:

$$OR(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) = \sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}|110\rangle + \sqrt{(1-f_A)f_B}|101\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)}|011\rangle + \sqrt{f_A f_B}|001\rangle. \quad (16)$$

Ao realizar a operação de medida no terceiro qubit, no estado da base $|1\rangle$, na construção definida pela Eq. (16), resulta no estado final:

$$|S'_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}}(\sqrt{(1-f_A)f_B}|101\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)}|011\rangle + \sqrt{f_A f_B}|001\rangle),$$

com $p(1) = (1-f_A)(1-f_B)$, que indica a probabilidade do elemento x_i estar na operação da disjunção entre A e B . Analogamente, ao realizar-se uma medida, mas agora considerando o estado $|0\rangle$, obtém-se o seguinte estado final $|S'_0\rangle = |110\rangle$, com $p(1) = 1 - ((1-f_A)(1-f_B))$, que indica a probabilidade do elemento x_i estar no complemento do CF $A \cap B$.

E, aplicando os estados dados na Eq. (9), a Eq. (16) retorna:

$$OR(|S_{A_i}\rangle, |S_{B_i}\rangle) = \frac{\sqrt{3}}{3}|110\rangle + \frac{\sqrt{6}}{6}|101\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3}|011\rangle + \frac{\sqrt{6}}{6}|001\rangle. \quad (17)$$

4. Interpretação e Simulação para XOR Fuzzy E_\ominus

Sabe-se que o conectivo XOR pode ser obtido da composição de outros operadores, conforme discutido em [Bedregal et al. 2013a]. Dentre as definições de operadores fuzzy X(N)OR, neste presente trabalho, utiliza-se a diferença entre a união e a intersecção entre conjuntos fuzzy para interpretar o operador fuzzy XOR, denotado por E_\ominus . Portanto, sejam $|S_{f_i}\rangle$ e $|S_{g_i}\rangle$ estados quânticos representados pelas Eq. (8)a e Eq. (8)b. O conectivo XOR fuzzy E_\ominus , definido pela Eq. (6)a, é representado pelo operador quântico XOR_{E_\ominus} , dado pela expressão:

$$\begin{aligned} XOR_{E_\ominus}(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) &= OR(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) - AND(|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle) \\ &= NOT_{3,4,5}(\mathcal{T}_5^{3,4}(NOT_{1,3}(\mathcal{T}_3^{1,2}(NOT|S_{f_i}\rangle, |S_{g_i}\rangle, |0\rangle)), \\ &\quad NOT_{2,4}(\mathcal{T}_4^{1,2}(|S_{f_i}\rangle, NOT|S_{g_i}\rangle, |0\rangle)), |0\rangle)). \end{aligned} \quad (18)$$

A Figura 3, ilustra a estruturação do operador E_\ominus no modelo de circuito quântico.

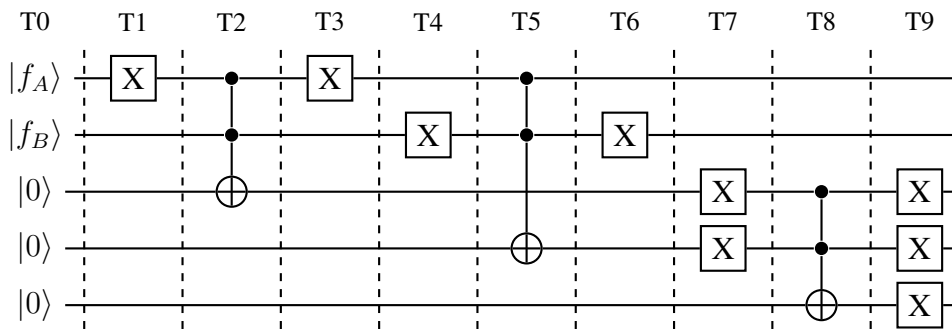


Figura 3. Circuito para E_\ominus , apresentando entradas e evolução no período T0-T9.

Na representação gráfica do conectivo E_\ominus ocorrem dez etapas de evolução temporal (de T0 a T9) estruturados em um sistema de dimensão espacial de cinco qubits.

Assim, de acordo com a coluna T9 da Tabela 2, apresenta-se apenas os quadrados dos coeficientes não nulos dos estados clássicos (base computacional) em uma evolução

temporal das computações relacionadas ao operador fuzzy XOR E_{\ominus} . E o estado quântico é obtido e descrito pela Eq. (19) logo a seguir:

$$|\ominus_9\rangle = \sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}|00000\rangle + \sqrt{(1-f_A)f_B}|01101\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)}|10011\rangle + \sqrt{f_A f_B}|11000\rangle. \quad (19)$$

Tabela 2. Evolução Temporal dos Estados Quânticos na Modelagem do XOR E_{\ominus} .

Amplitudes não nulas	$T0$	$T3$	$T6$	$T9$
$(1-f_A) * (1-f_B)$	00000	00000	00000	00000
$(1-f_A) * f_B$	01000	01100	01100	01101
$f_A * (1-f_B)$	10000	10000	10010	10011
$f_A * f_B$	11000	11000	11000	11000

De um lado, uma medida realizada no 5° qubit (mas relacionada ao estado $|1\rangle$) do estado quântico descrito pela Eq. (19) resulta no estado final:

$$|\ominus'_9\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-f_A-f_B+2f_A f_B}}(\sqrt{(1-f_A)f_B}|01101\rangle + \sqrt{f_A(1-f_B)}|10011\rangle), \quad (20)$$

com a probabilidade correspondendo à expressão: $p(1) = 1-f_A-f_B+2f_A f_B$, indicando o grau de pertinência de um elemento $x \in X$ no CF $A \ominus B$ obtido pela aplicação de um conectivo fuzzy XOR E_{\ominus} e tomando $f_A(x)$, $f_B(x)$ como argumentos.

Por outro lado, uma medida realizada no 5° qubit (referente ao estado $|0\rangle$) retorna:

$$|\ominus''_9\rangle = \frac{1}{\sqrt{f_A+f_B-2f_A f_B}}(\sqrt{(1-f_A)(1-f_B)}|00000\rangle + \sqrt{f_A f_B}|11000\rangle), \quad (21)$$

apresentando uma probabilidade dada por: $p(0) = f_A + f_B - 2f_A f_B$.

Uma simulação consistente com os registradores dados na Eq. (19) tomando os estados iniciais da Eq. (9)a e Eq. (9)b, resulta após medições, nos estados (i) $|\ominus'\rangle$ e (ii) $|\ominus''\rangle$ e suas respectivas probabilidades: (i) $p(1) = 50\%$; (ii) $p(0) = 50\%$.

5. Conclusão

O artigo tem como objetivo demonstrar a utilização da CQ para a modelagem do conectivo XOR da LF, desenvolvendo sua modelagem e analisando as suas amplitudes. Tal modelagem é atrativa pelo fator de obter vantagens tanto da CQ quanto da LF, podendo solucionar rapidamente problemas complexos da computação clássica de forma ágil. A contínua expansão e investimento direcionados ao progresso da CQ ressaltam uma área interessante para as tecnologias futuras, estando em constante evolução, cujo novos estudos se demonstram relevantes para o seu desenvolvimento. Trabalhos futuros podem estender esta pesquisa interpretando a construção dual da porta XOR (Seção 2) via CQ.

Agradecimentos

Os autores agradecem as seguintes agências de fomento: CAPES, CNPq (309160/2019-7; 311429/2020-3, 150160/2023-2), PqG/FAPERGS (21/2551-0002057-1) e FAPERGS/CNPq (23/2551-0000126-8) PRONEX (16/2551-0000488-9).

Referências

- Aboughalia, R. A. and Alkishriwo, O. A. S. (2018). Color Image Encryption Based on Chaotic Block Permutation and XOR Operation.
- Acampora, G., Schiattarella, R., and Vitiello, A. (2023). On the Implementation of Fuzzy Inference Engines on Quantum Computers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 31(5):1419–1433.
- Agostini, L. B., da Silva Feitosa, S., de Avila, A. B., Reiser, R., Dubois, A., and Pilla, M. L. (2018). Representing Intuitionistic Fuzzy Bi-implications Using Quantum Computing. In Guilherme A. Barreto and Ricardo Coelho, editor, *Fuzzy Information Processing - 37th Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS 2018, Fortaleza, Brazil, July 4-6, 2018, Proceedings*, volume 831 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 206–216. Springer.
- Bedregal, B. R. C., Reiser, R. H. S., and Dimuro, G. P. (2013a). Revisiting XOR-Implications: Classes of fuzzy (Co)Implications Based on F-XOR (F-XNOR) Connectives. *Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl. Based Syst.*, 21(6):899–926.
- Bedregal, B. R. C., Reiser, R. H. S., and Dimuro, G. P. (2013b). Revisiting XOR-Implications: Classes of fuzzy (Co)Implications Based on F-XOR (F-XNOR) Connectives. *Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl. Based Syst.*, 21(6):899–926.
- Cressman, A. J., Wattanapanitch, W., Chuang, I., and Sarpeshkar, R. (2022). Formulation and Emulation of Quantum-Inspired Dynamical Systems With Classical Analog Circuits. *Neural Comput.*, 34(4):856–890.
- de Avila, A. B., Santos, H. S., Cruz, A. P., de Souza, S. X., Lucca, G., Moura, B., Yamin, A. C., and Reiser, R. (2023). HybriD-GM: A Framework for Quantum Computing Simulation Targeted to Hybrid Parallel Architectures. *Entropy*, 25(3):503.
- Dirac, P. A. M. (1939). A new notation for quantum mechanics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 35(3):416–418.
- Klement, E. P. and Navara, M. (1999). *Fuzzy Sets, Logics and Reasoning About Knowledge*, volume 15 of *Applied logics*, chapter Propositional fuzzy logics based on Frank t-norms: A comparison, pages 17–38. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Mannucci, M. A. (2006). Quantum fuzzy sets: Blending fuzzy set theory and quantum computation. *CoRR*, abs/cs/0604064.
- Maron, A., Visintin, L., Reiser, R. H. S., and Abeijon, A. M. (2013). Fuzzy computing from quantum computing - case study in reichenbach implication class. *Mathware & Soft Computing*, 20(6):86–114.
- Maron, A. K. (2010). Estendendo o vpe-qgm para suporte à simulações paralelas/distribuídas. Bacharelado em ciência da computação, Universidade Católica de Pelotas, Pelotas/RS.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2011). *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 10th edition.

Portugal, R., Lavor, C. C., Carvalho, L. M., and Maculan, N. (2004). Notas em Matemática aplicada 8. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos/SP.

Sharma, M., Ranjan, R. K., and Bharti, V. (2022). A pseudo-random bit generator based on chaotic maps enhanced with a bit-XOR operation. *Journal of Information Security and Applications*, 69:103299.