

Relação emocional entre uma família: Modelagem Quântica via Qiskit

Gabriel Ramires¹, Cecilia Botelho¹, Vinicius Peruzzi¹, Anderson Cruz², Helida Santos³, Giancarlo Lucca^{3,4}, Adenauer Yamim⁵, Renata Reiser⁵

¹ LUPS – Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) – Pelotas, RS – Brazil

{ugaramires, cscbotelho, vgperuzzi}@inf.ufpel.edu.br

²IMD – Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) – Natal, RN – Brazil

anderson@imd.ufrn.br

³C3 – Universidade Federal do Rio Grande (FURG) – Rio Grande, RS – Brazil

{helida, giancarlo.lucca}@furg.br

⁴PGEEC – Universidade Católica de Pelotas (UCPEL) – Pelotas, RS – Brasil

⁵PPGC – Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) – Pelotas, RS – Brazil

{adenauer, reiser}@inf.ufpel.edu.br

Abstract. *This article explores the use of Quantum Computing to model emotions in family dynamics, providing a more complex and rich representation of human emotions than to Classical Computing. Through simulations using the Qiskit framework, we demonstrate how the superposition and entanglement of emotional states can better represent the intricate and complex interactions within a family. This study signals Quantum Computing as a promising tool for advanced research in the emotional modeling field.*

Resumo. *Este artigo explora o uso da Computação Quântica para modelar emoções em dinâmicas familiares, de forma mais complexa e rica quando comparado com a Computação Clássica. Através de simulações usando a biblioteca qiskit, demonstramos como a superposição e o emaranhamento de estados emocionais podem representar melhor as interações detalhadas e complexas em uma família. Este estudo sinaliza a Computação Quântica como uma ferramenta promissora para a pesquisa avançada no campo da modelagem emocional.*

1. Introdução

A Computação Quântica (CQ) busca transformar a maneira como resolvemos problemas computacionais. Essa abordagem vem ganhando grande destaque em diversas áreas de aplicação, como na inteligência artificial e criptografia. A CQ é fundamentada nos princípios da mecânica quântica, permitindo processar informações de maneira mais rápida que os computadores clássicos por meio das propriedades quânticas dos qubits, unidades básicas de informação quântica. Esses qubits podem estar em estados de superposição e emaranhados [Nielsen and Chuang 2000], permitindo a realização de múltiplas operações simultâneas.

Neste trabalho, seguindo a abordagem de integração da CQ em modelagens de problemas clássicos, propomos aplicar essa estratégia ao problema da interação familiar entre pais e filhos. Esse cenário apresenta desafios inerentes relacionados à incerteza e à ambiguidade nas avaliações dos critérios analisados. Acreditamos que a CQ pode oferecer ferramentas eficientes para o processamento dessas avaliações e modelagem de emoções, explorando circuitos quânticos para lidar com a complexidade e incertezas envolvidas nesse tipo de problema.

Utilizamos a biblioteca Qiskit da IBM [IBM 2023] como uma ferramenta central para simulações em CQ. Isso nos permitiu investigar como os princípios quânticos podem ser aplicados para abordar problemas práticos, considerando as complexidades inerentes. Ao estender a aplicação da CQ a esse contexto, esperamos contribuir para uma compreensão mais aprofundada das capacidades e limitações da CQ em situações do mundo real.

2. Conceitos Básicos da Computação Quântica

A computação quântica considera o *qubit* (*Quantum Bit*) como unidade básica de informação, constituindo um sistema quântico básico, com espaço de estados bidimensional, definindo por um estado genérico, o qual, na notação de Dirac [Nielsen and Chuang 2000], é representado pela expressão: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Os coeficientes α e β são números complexos correspondentes às amplitudes dos respectivos estados, respeitando a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, garantindo que o vetor de estado do sistema, representado por $(\alpha, \beta)^t$ seja unitário. As amplitudes permitem representar, simultaneamente, estados distintos, configurando um estado de **superposição quântica**, característica que origina o fenômeno do paralelismo quântico.

O espaço de estados de um sistema quântico de múltiplos *qubits* é compreendido pelo produto tensorial do espaço de estados de seus sistemas componentes. Considerando um sistema quântico de dois *qubits*, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e $|\varphi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$, o espaço de estados é composto pelo produto tensor $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$, ou seja $\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$.

A mudança de estado em um sistema quântico é feita via **transformações quânticas unitárias**, representadas por matrizes quadradas ortonormalizadas de ordem 2^N , sendo N a quantidade de *qubits* da transformação. Na aplicação da porta unitária $H \otimes H$ (Hadamard) sobre um estado clássico $|01\rangle$, gera um estado de sobreposição matricialmente descrito logo a seguir.

$$H \otimes H|01\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} |01\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A porta *Pauli X* aplicada sobre um *qubit* representado pelo vetor $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ gera o novo estado $X|\psi\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$ como mostrado na sua expansão matricial:

$$X|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Seja $j = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária, a transformação associada à porta quântica V (\sqrt{X}) é dada pela expressão matricial:

$$V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+j & -1+j \\ -1+j & 1+j \end{pmatrix} \quad (1)$$

Assim, pela Eq. (1) aplicada a $|\psi\rangle$, obtém-se que:

$$\begin{aligned} V|\psi\rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+j & -1+j \\ -1+j & 1+j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} ((\alpha - \beta) + (\alpha + \beta)j) |0\rangle + ((-\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)j) |1\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Salienta-se ainda que algumas aplicações a estados clássicos:

- $V|0\rangle = \frac{1}{2}(1+j)|0\rangle + \frac{1}{2}(-1+j)|1\rangle$;
- $V|1\rangle = \frac{1}{2}(-1+j)|0\rangle + \frac{1}{2}(1+j)|1\rangle$;
- $V^2|0\rangle = -|1\rangle$ e $V^2|1\rangle = -|0\rangle$. (V é a raiz quadrada da porta X (NOT))

E, neste terceiro caso, $V = \sqrt{NOT}$ exibe um comportamento que não tem correspondente na lógica clássica. Quando aplicado a um *qubit*, este operador induz um estado de superposição no *qubit*. E ainda, a aplicação combinada de duas portas $V = \sqrt{X}$ resulta numa ação determinística, equivalente a uma porta NOT(X).

A transformação bidimensional da porta CV (com um controle e um alvo), refere-se ao produto tensor entre V e o operador Id descrita a seguir:

$$CV = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+j & -1+j \\ -1+j & 1+j \end{pmatrix} \otimes ID = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+j & -1+j & 0 & 0 \\ -1+j & 1+j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+j & -1+j \\ 0 & 0 & -1+j & 1+j \end{pmatrix}. \quad (3)$$

As amplitudes de estados quânticos multi-dimensionais são regradas pela condição de normalização, que nem sempre é obtida pelo produto tensor dos correspondentes estados dos *qubits* (estados básicos da base computacional). Neste caso, tem-se um **estado emaranhado** [Nielsen and Chuang 2000].

A seguir, apresentamos uma caracterização de estados emaranhados. Considere os estados clássicos $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$, como vetores básicos de um estado quântico bidimensional, para definir os estados emaranhados:

- (i) $|s_\alpha\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|11\rangle$ é uma combinação linear sobre estados clássicos $\{|00\rangle, |11\rangle\}$, onde α_1, α_2 são amplitudes complexas e $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$; e, analogamente,
- (ii) $|s_\beta\rangle = \beta_1|01\rangle + \beta_2|10\rangle$ é outra combinação linear sobre estados clássicos $\{|01\rangle, |10\rangle\}$, onde β_1, β_2 são amplitudes complexas e $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$.

Observe ainda que a composição de um estado emaranhado com outro estado gera um novo emaranhamento, neste caso, $|s_\gamma\rangle$ dado pela expressão:

$$|s_\gamma\rangle = |s_\alpha\rangle \otimes |s_\beta\rangle = (\alpha_1|00\rangle + \alpha_2|11\rangle) \otimes \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |1\rangle)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1(|000\rangle + |001\rangle) + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2(|110\rangle + |111\rangle)).$$

No emaranhamento, os *qubits* emaranhados estão entrelaçados de tal forma que suas propriedades individuais não podem ser descritas independentemente. Quando um *qubit* emaranhado sofre uma medição e seu estado é determinado, o estado dos outros *qubits* emaranhados é instantaneamente afetado, independentemente da distância entre eles. Isso é conhecido como “ação fantasmagórica à distância”.

A **operação de medida** em um estado corrente de um sistema quântico está definida por um conjunto de projeções lineares, M_m , atuando sobre estados quânticos.

Se o estado está definido por $|\psi\rangle$, após a medida, a probabilidade de saída será dada por [Nielsen and Chuang 2000]: $p(|\psi\rangle) = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}$.

As operações de medida satisfazem a relação de completude $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$. Para um sistema quântico unidimensional, tem-se os operadores:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_0^\dagger; \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1^\dagger.$$

E, para um *qubit* $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, com $\alpha, \beta \neq 0$, tem-se as probabilidades de observar $|0\rangle$ e $|1\rangle$ que são, respectivamente, dadas por: $p(|0\rangle) = \langle\phi|M_0^\dagger M_0|\phi\rangle = \langle\phi|M_0|\phi\rangle = |\alpha|^2$; and $p(|1\rangle) = \langle\phi|M_1^\dagger M_1|\phi\rangle = \langle\phi|M_1|\phi\rangle = |\beta|^2$. Portanto, após a medida do estado $|\psi\rangle$ tem-se $|\alpha|^2$ como probabilidade de estar no estado clássico $|0\rangle$; e $|\beta|^2$ como probabilidade de estar no outro estado, $|1\rangle$.

2.1. Modelo de Circuitos Quânticos

O modelo de circuitos para a CQ constitui uma linguagem universal para a descrição de computadores quânticos em aplicações práticas e na análise de algoritmos quânticos atuais [Wu et al. 2023]. Seguindo a notação de Dirac [Nielsen and Chuang 2000], um *qubit* é representado por coeficientes complexos c_0 e c_1 , onde $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$. O funcionamento dos circuitos quânticos são descritos pelas seguintes convenções:

- Entrada: é representada por um registrador de múltiplos *qubits*, geralmente nos estados clássicos $|0\rangle$ ou $|1\rangle$.
- Linhas horizontais: indicam a evolução temporal da transferência de dados (*qubits*) entre as portas lógicas, ocorrendo da esquerda para a direita.
- Linhas verticais: representam a atuação síncrona em dois ou mais *qubits*.
- Controle: é representado por um círculo no *qubit* de controle, indicando a aplicação de uma operação controlada.
- Portas lógicas: são representadas por caixas contendo uma letra de identificação, representando diferentes operações lógicas.
- Medida: ocorre geralmente na saída do circuito, alterando o estado do *qubit* e retornando 0 ou 1 com uma distribuição de probabilidade associada.
- Estados ϕ_i : são representados como transformações em instantes de tempo (t_i).

Essas convenções permitem descrever e visualizar a evolução dos *qubits* e as operações realizadas em um circuito quântico. No próximo tópico, exploraremos a modelagem de conjuntos fuzzy utilizando circuitos quânticos e como essas convenções podem ser adaptadas para esse contexto.

3. Estudo de caso: Modelagem de Problema da Relação Familiar no Qiskit

O Qiskit é uma biblioteca implementada em Python pela IBM que provê suporte a modelagem e simulação de algoritmos e circuitos da CQ. O Qiskit está numa plataforma web que congrega um conjunto de softwares que facilitam e permitem o projeto de experimentos e aplicações e os executem em computadores quânticos reais ou simuladores clássicos, independentemente de seu nível de habilidade ou área de interesse. O seu uso é vantajoso pois permite fácil manipulação dos parâmetros das simulações e representação gráfica dos circuitos e resultados de forma acessível a qualquer indivíduo.

O problema Pais-filho modela a mudança de humor de um filho a partir do nível de atividade de seus pais. Se ambos foram ativos o filho também será, mas caso apenas um dos pais for ativo, o filho estará no estado “meio feliz e meio infeliz”, modelado pelo *qubit* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Neste caso, o tipo de emoção é modelado pelo ângulo de fase do *qubit* e está representado geometricamente por meridianos. A intensidade da emoção é modelada como uma projeção, representada por um ponto entre os polos norte e sul, $|0\rangle$ e $|1\rangle$ respectivamente, na Esfera de Bloch [Carvalho et al. 2007]. Na Figura 1, dentre os oito tipos de emoções, as nuances da cor amarela indicam um tipo de humor em diferentes intensidades: serenidade, alegria ou êxtase.

O algoritmo Pais-Filho em [Raghuvanshi and Perkowski 2010] está baseado no Modelo CQ, considerando composição sequencial entre os operadores:

- CV_3^2 , que executa o operador \sqrt{X} (V) no terceiro *qubit* (alvo) quando o segundo *qubit* estiver no estado clássico $|1\rangle$ (controle); e
- CV_3^1 , executando o operador \sqrt{X} (V) no terceiro *qubit* quando o segundo *qubit* estiver no estado clássico $|1\rangle$;

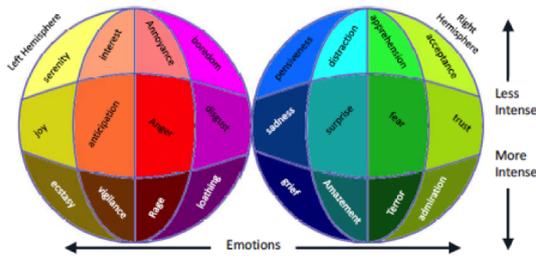


Figura 1. Meridianos para interpretações quantum-fuzzy de emoções na Esfera de Bloch.

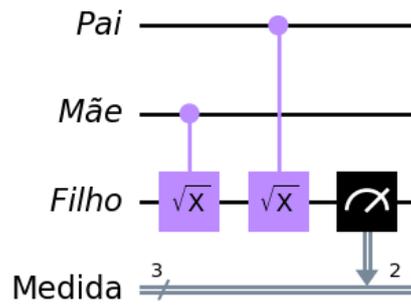


Figura 2. Circuito no Qiskit

Considera-se a atitude emocional positiva em $|1\rangle$, e a atitude emocional negativa em $|0\rangle$. E, tem-se a análise de todas as entradas:

$$CV_3^2 (CV_3^1|000\rangle) = |000\rangle; \quad (4)$$

$$CV_3^2 (CV_3^1|100\rangle) = \frac{1}{2}(1+j)|100\rangle + \frac{1}{2}(-1+j)|101\rangle; \quad (5)$$

$$CV_3^2 (CV_3^1|010\rangle) = \frac{1}{2}(1+j)|010\rangle + \frac{1}{2}(-1+j)|011\rangle; \quad (6)$$

$$CV_3^2 (CV_3^1|110\rangle) = |111\rangle; \quad (7)$$

$$CV_3^2 (CV_3^1|011\rangle) = \frac{1}{2}(-1+j)|010\rangle + \frac{1}{2}(1+j)|011\rangle; \quad (8)$$

$$CV_3^2 (CV_3^1|001\rangle) = |001\rangle; \quad (9)$$

$$CV_3^2 (CV_3^1|111\rangle) = -|111\rangle; \quad (10)$$

$$CV_3^2 (CV_3^1|101\rangle) = \frac{1}{2}(-1+j)|100\rangle + \frac{1}{2}(1+j)|101\rangle; \quad (11)$$

Nas avaliações das transformações dos oito estados de entrada, os dois primeiros qubits representando o humor dos pais não se alteram, durante a evolução dos estados. Ademais, pelas medidas no 3º qubit (referente ao humor do filho), tem-se que:

- As Equações (4), (9) e (10) retornam os mesmos estados clássicos iniciais, com probabilidade $p = 1$. Nestes casos, é garantido que, assim como os pais, o humor do filho não se altera;
- A Equação (7) retorna o estado clássico $|111\rangle$, com probabilidade $p = 1$, interpretando que a atitude feliz dos pais resulta numa troca de comportamento emocional do filho, passando de uma atitude infeliz para feliz.
- As Equações (5), (6), (8) e (11) modelam uma entrada onde apenas um dos pais está feliz. E assim, a medida do terceiro qubit retorna sempre um estado em superposição, com probabilidade ($p = 0.5$) para avaliação do filho manter o mesmo humor ou mudar de humor.

Ou seja, na modelagem do circuito proposto, é descrita uma situação onde pais alegres influenciam para que o comportamento do filho torne-se (ou permaneça) alegre. Assim, esta influência de troca de humor não se evidencia quando ambos os pais são infelizes. Mas se pelo menos um deles é feliz, então tem-se 50% de chance para a troca do humor do filho, seja de um humor feliz (atitude pró-ativa) ou para infeliz (atitude passiva). A Figura 3 mostra uma modelagem dessa situação utilizando o Qiskit, podendo ser executada em qualquer ambiente Jupiter Notebook com o Qiskit e Matplotlib instaladas.

3.1. Análise e Interpretação das Simulações

Na Figura 4, são apresentados os histogramas gerados após a execução do circuito quântico representado na Figura 2, com análise da evolução temporal para os quatro estados iniciais, onde o terceiro qubit é zero, simulando uma dinâmica familiar.

O eixo X do histograma retrata os possíveis estados dos três qubits após a execução do circuito e a medição. O eixo Y do histograma indica a frequência de cada estado, baseado em um total de 1000 execuções do circuito. As frequências dos estados $|110\rangle$ e $|010\rangle$ são particularmente importantes para a nossa análise, pois refletem cenários distintos dentro da dinâmica familiar em questão.

No código, aplicamos a porta V (raiz quadrada da porta NOT) aos pares de qubits (2,3) e (1,3). A seguir, realizamos uma medição no terceiro *qubit*. Por padrão, os qubits no Qiskit são inicializados em zero. Optamos pela inversão das entradas para simular a variação de entradas clássicas (00, 01, 10, 11) para os pais, aplicando a porta NOT(X) no(s) *qubit(s)*, simulando as oito interpretações nas Equações (4) a (11).

Analisando os resultados, constatamos que houve uma distribuição esperada de acordo com as equações já apresentadas. Tomando a Figura 4, por exemplo, essa divisão igualitária sugere que o humor do filho pode tornar-se feliz ou triste com chances iguais caso o Pai seja alegre (Positivo) e a mãe seja depressiva (Negativa). Tais resultados são consequência da aplicação das portas controladas (V). Essas portas são responsáveis por fazer com que o estado do filho fique em superposição, o que leva a uma distribuição equilibrada dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ nas medições. Analogamente, tem-se o exemplo da Figura 4, onde a o Pai seria depressivo (Negativo) e a mãe alegre (Positiva). Nos histogramas da Figura 4, observa-se um resultado diferente, pois ao estarem em “sintonia”, pai e mãe negativos geram um filho com estado emocional negativo, e pai e mãe positivos geram um filho com estado emocional positivo.

```

1  from qiskit import *
2  from qiskit.visualization import plot_histogram
3
4  pai = QuantumRegister(1, 'Pai')
5  mae = QuantumRegister(1, 'Mae')
6  filho = QuantumRegister(1, 'Filho')
7
8  medida = ClassicalRegister(3, 'Medida')
9
10 circuit = QuantumCircuit(pai, mae, filho, medida)
11
12 circuit.csx(mae, filho)
13 circuit.csx(pai, filho)
14
15 circuit.measure(pai, medida[0])
16 circuit.measure(mae, medida[1])
17 circuit.measure(filho, medida[2])
18
19 circuit.draw(output='mpl')
20
21 simulator = Aer.get_backend('qasm_simulator')
22 result = execute(circuit, backend=simulator, shots=1000).result()
23 counts = result.get_counts()
24
25 plot_histogram(counts)

```

Figura 3. Código de geração do circuito em Python usando a Biblioteca Qiskit

4. Considerações Finais

Destacamos a importância da Computação Quântica na modelagem complexa das dinâmicas emocionais presentes nas relações familiares. Através das simulações realizadas com a biblioteca Qiskit, observou-se como a superposição de estados quânticos podem ser aplicados para representar de maneira mais realista as nuances das emoções de um filho em relação às atitudes positivas ou negativa de seus pais.

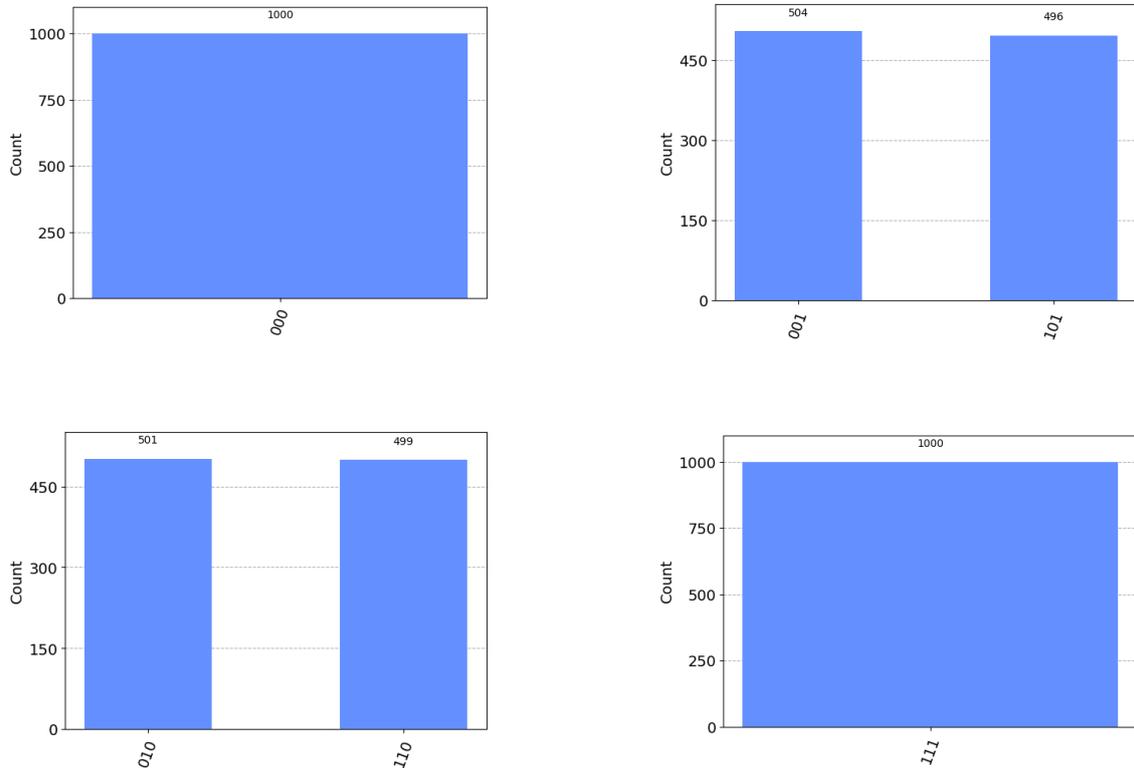
Almejamos, no futuro, explorar modelagens mais complexas e cenários mais detalhados e realistas, considerando não apenas a influência dos pais, mas também outros fatores sociais e ambientais que afetam as emoções humanas. Além disso, pode-se inserir mais *qubits* na análise, e outras portas quânticas, aumentando assim a riqueza das modelagens. Ademais, é interessante investigar como essa abordagem pode ser aplicada em contextos além das dinâmicas familiares, como em psicologia, terapia emocional, educação e até mesmo em sistemas de Inteligência Artificial que interagem com seres humanos de maneira emocionalmente inteligente.

Em trabalhos futuros, planejamos explorar ainda mais as capacidades da Computação Quântica nestas aplicações, e também incluir a Lógica Fuzzy [de Avila et al. 2019] como complemento à Computação Quântica, visando abranger melhor as nuances dos problemas. Essa abordagem combinada pode enriquecer nossos modelos e permitir uma representação mais precisa e flexível das dinâmicas emocionais, contribuindo para uma compreensão mais profunda das relações humanas.

Agradecimentos

Os autores agradecem as seguintes agências de fomento: CAPES, CNPq (309160/2019-7; 311429/2020-3, 150160/2023-2), PqG/FAPERGS (21/2551-0002057-1) e FAPERGS/CNPq (23/2551-0000126-8) PRONEX (16/2551-0000488-9).

Figura 4. Histogramas das simulações para as Eqs. (5), (6), (7) e (8).



Referências

- Carvalho, L. M., Lavor, C., and Motta, V. S. (2007). Caracterizacao matematica e visualizacao da esfera de bloch: Ferramentas para computação quântica. *TEMA: Tendencias em Matematica Aplicada e Computacional*, 8(3):351–360. (disponível por WWW em <http://www.sbm.ac.org.br/tema>) (jun.2010).
- de Avila, A. B., Reiser, R., Pilla, M. L., and Yamin, A. C. (2019). Interpreting xor intuitionistic fuzzy connectives from quantum fuzzy computing. In Guervós, J. J. M., Garibaldi, J. M., Linares-Barranco, A., Madani, K., and Warwick, K., editors, *Proceedings of the 11th International Joint Conference on Computational Intelligence, IJCCI 2019, Vienna, Austria, September 17-19, 2019*, pages 288–295. ScitePress.
- IBM (2023). Qiskit. Disponível em: <https://qiskit.org/>. Acesso em: 03 de julho 2023.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press.
- Raghuvanshi, A. and Perkowski, M. A. (2010). Fuzzy quantum circuits to model emotional behaviors of humanoid robots. In *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2010, Barcelona, Spain, 18-23 July 2010*, pages 1–8. IEEE.
- Wu, X., Li, Q., Li, Z., Yang, D., Yang, H., Pan, W., Perkowski, M. A., and Song, X. (2023). Circuit optimization of grover quantum search algorithm. *Quantum Inf. Process.*, 22(1):69.