

Simulando o Interferômetro de Mach-Zehnder no Qiskit

Letícia Caldas¹, Vitor Oliveira¹, Ulian G.A.Ramires¹, Cecília Botelho¹, Rafael Amaral¹
Helida Santos², Giancarlo Lucca^{2,3}, Anderson Cruz⁴, Renata H. R. Reiser¹

¹LUPS – Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – Pelotas, RS – Brasil

{lbcaldas, vaoliveira, cscbotelho, ugaramires, rbamaral, reiser}@inf.ufpel.edu.br

²C3 – Universidade Federal do Rio Grande (FURG) – Rio Grande, RS – Brasil

{helida, giancarlo.lucca}@furg.br

³PGEEC – Universidade Católica de Pelotas (UCPel) – Pelotas, RS – Brasil

{giancarlo.lucca}@ucpel.edu.br

⁴IMD – Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) – Natal, RN – Brasil

anderson@imd.ufrn.br

Abstract. *The Mach-Zehnder Interferometer (MZI) is an optical device that utilizes beam splitters and mirrors to create interference between paths of light or quantum particles. The interpretation of MZI using the Qiskit framework by IBM involves modeling and simulating this interferometer in a quantum circuit using the quantum computing programming. In this context, each path of the interferometer is represented by a qubit, and the beam splitters and mirrors are modeled by quantum gates that manipulate these qubits. In this work, we analyse 03 case-studies. From the measurement results, interference patterns can be analyzed, and information about the phase difference between the interferometer paths can be obtained. This information can be used to measure very small phase displacements and to perform quantum interferometry experiments.*

Resumo. *O Interferômetro de Mach-Zehnder (IMZ) é um dispositivo óptico que utiliza divisores de feixe e espelhos para criar interferência entre caminhos de luz ou partículas quânticas. A interpretação do IMZ usando o framework Qiskit da IBM envolve a modelagem e simulação desse interferômetro em um circuito quântico usando a biblioteca de programação de computação quântica. Nesse contexto, cada caminho do interferômetro é representado por um qubit, e os divisores de feixe e espelhos são modelados por portas quânticas que manipulam esses qubits. Neste trabalho analisamos 3 estudos de casos. A partir dos resultados das medições, pode-se analisar os padrões de interferência e obter informações sobre a diferença de fase entre os caminhos do interferômetro. Essa informação pode ser utilizada para medir deslocamentos de fase muito pequenos e para realizar experimentos de interferometria quântica.*

1. Introdução

Na compreensão da estrutura atômica, um elétron pode ser visualizado como uma nuvem de probabilidade onde sua presença pode ser encontrada. Isso implica em associar

uma característica ondulatória às partículas atômicas, onde uma partícula está ligada a uma onda que reflete a probabilidade de sua localização no espaço. Esse conceito é conhecido como o “princípio da dualidade onda-partícula”. A onda associada a um sistema permite a possibilidade de interferência entre diferentes interpretações do sistema e representa a informação máxima disponível sobre ele. A aplicação dessa teoria em escalas (sub)atômicas promove fenômenos como quantização de energia e tunelamento quântico.

A interferência é um fenômeno físico que ocorre quando ondas eletromagnéticas interagem entre si. Quando dois ou mais feixes de onda de mesma frequência interagem, cada um dos feixes possui entre si relações de fase constantes no tempo, provocando uma distribuição estacionária da energia das ondas ao longo de superfícies, ou direções, que se mantém fixas no espaço [Borges 2009].

O fenômeno ocorre com qualquer tipo de onda, acústica, mecânica, eletromagnética, etc. As ondas eletromagnéticas visíveis possuem uma importância especial, pois formam a base de um processo de medida chamado interferometria. Este processo consiste num conjunto de métodos de medida de comprimentos de onda, índice de refração e distâncias, baseados no fenômeno da interferência da luz. O instrumento que realiza uma interferência de luz com o objetivo de efetuar uma medida é chamado de interferômetro.

De forma independente, no final do século XIX, Ludwig Mach e Ludwig Zehnder desenvolveram um dispositivo óptico que cria interferência entre caminhos de luz ou partículas quânticas. Este dispositivo ficou conhecido como Interferômetro de Mach-Zehnder (IMZ) [Soares-Pinto and Naves 2021].

Este trabalho propõe desenvolver uma simulação do IMZ em um ambiente de programação quântica da IBM chamado Qiskit [IBM 2023], com o intuito de disseminar o conhecimento acerca do experimento, do Qiskit e, conseqüentemente, da computação e mecânica quântica em geral.

O restante deste trabalho está organizado nas seguintes seções. A Seção 2 apresenta uma breve discussão acerca do modelo de circuitos quânticos. A descrição do IMZ é apresentada na Seção 3. Na Seção 4 são abordadas a modelagem, a simulação e a interpretação do IMZ utilizando simulador QisKit. Finalmente, as considerações finais são realizadas na Seção 5.

2. Modelo de Circuitos Quânticos

O modelo de circuitos quânticos constitui-se numa linguagem universal para descrição de computadores quânticos em aplicações práticas para análise dos atuais algoritmos quânticos. Na descrição do processamento quântico da informação os circuitos quânticos é uma linguagem similar à linguagem dos circuitos lógicos clássicos, consistindo em agrupamentos ou grafo de dispositivos mais simples chamados portas quânticas que realizam em conjunto uma operação sobre um registrador quântico. Seguem-se as convenções usadas nos computadores clássicos:

- (i) *entrada*, indicada por um registrador de múltiplos *qubits* (geralmente clássicos: $|0\rangle$ ou $|1\rangle$);
- (ii) *linhas horizontais*, representando a evolução temporal (da esquerda para a direita) do fluxo de dados (*qubits*) entre duas portas lógicas;
- (iii) *linhas verticais*, mostrando a atuação síncrona de *multi-qubits* ;
- (iv) *controle*, representado por um círculo no *qubit* controle;

- (v) *portas lógicas*, indicadas por caixas com uma letra de identificação;
- (vi) *medida* de um *qubit*, geralmente ocorrendo na saída do circuito e alterando o estado do *qubit*, o qual retorna 0 e 1 com uma distribuição de probabilidade associada;
- (vii) *estados* φ_i como transformações em instantes de tempo (t_i).

Se um bit de informação pode armazenar um dos dois valores 0 ou 1, um registrador clássico de n bits pode armazenar um conjunto de n elementos por vez ($\{0, 1, \dots, n-1\}$). No computador quântico, um qubit de informação além de poder armazenar 0 ou 1 também pode armazenar ambos 0 e 1, em superposição. Por consequência, um registrador quântico de n *qubits* pode armazenar 2^n bits, simultaneamente, caracterizando o paralelismo quântico [Nielsen and Chuang 2000].

Os Circuitos Quânticos (CQs) evoluem por meio de Transformações Quânticas (TQs) aplicadas em registradores quânticos usando operadores unitários. CQs são definidos como conjuntos finitos de portas quânticas elementares, chamados *transformações quânticas universais* [Nielsen and Chuang 2000]. Além disso, podem conter medidas e operações de controle. Esses recursos permitem resolver problemas de forma mais eficiente do que algoritmos clássicos em áreas como criptografia e otimização. No entanto, os CQs ainda estão em desenvolvimento e enfrentam desafios.

Para descrição de circuitos quânticos, aplica-se uma abordagem baseada na Álgebra Linear. Restringe-se o estudo ao espaço de Hilbert bidimensional $l_2(\mathcal{H}2)$, um espaço vetorial complexo de dimensão 2 munido de produto interno. Neste espaço vetorial, considerando-se a base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, um vetor (α, β) , com α, β números complexos satisfazendo a condição de normalidade $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, representa o *qubit* $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^2$: $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ (na notação de Dirac).

Nesta abordagem, as portas quânticas básicas são transformações lineares U , como H e P , definidas logo a seguir por matrizes unitárias de ordem 2, tais que $U^\dagger U = U U^\dagger = I$, onde U^\dagger indica a transposta conjugada da matriz U [Nielsen and Chuang 2000]. Seguem algumas das TQ unidimensionais:

A porta Hadamard (H), à esquerda, é essencial para modelar a superposição de estados quânticos, enquanto a porta fase (P), à direita, é fundamental para manipulação de processos de inferência quânticos:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} e^{i\theta_0} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1} \end{bmatrix}$$

E, frequentemente, aplicam-se as seguintes instâncias desta porta (1-*qubit*):

Se $\theta_0 = \theta_1 = 0$ então $P = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Se $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = \pi$ então $P = Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, sendo Pauli-Z.

Se $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ então $P = S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, sendo $\frac{\pi}{2}$ -fase ou raiz quadrada da Pauli-Z.

Se $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ então $P = T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$, sendo raiz quarta da Pauli-Z.

A representação de portas lógicas quânticas atuando sobre n *qubits* envolve matrizes de dimensão $2^n \times 2^n$ obtido pelo produto tensor. Assim, a aplicação simultânea de uma porta $H^{\otimes 2}$ sobre o *qubit* $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$ é indicada por $H^{\otimes 2}(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) = H|\phi\rangle \otimes H|\psi\rangle$.

3. O Interferômetro de Mach Zehnder

O interferômetro de Mach-Zehnder é utilizado para determinar as diferenças de fase entre dois raios de luz, as quais são ocasionadas por variações no caminho óptico trilhado por eles. Essas variações podem ser causadas por mudanças no comprimento dos braços do interferômetro ou pela introdução de algum elemento que altera a fase [Soares-Pinto and Naves 2021].

A técnica da interferometria envolve a combinação de duas ou mais ondas, permitindo a obtenção de informações sobre as ondas de entrada através da análise resultante. Para que duas ondas possam se sobrepor, é necessário que elas tenham sido emitidas pela mesma fonte. Na interferometria por divisão de amplitude, a luz é dividida em dois ou mais feixes através de reflexões parciais. O interferômetro Mach-Zehnder é um exemplo desse tipo de interferômetro, que funciona através da divisão da amplitude de uma onda [N.K et al. 2023].

As duas principais idéias de um interferômetro são: (1) introdução de uma diferença de caminho óptico (ou mudança de fase) entre dois ou mais raios luminosos coerentes, usualmente obtidos pela divisão de um mesmo raio, e (2) superposição das ondas assim defasadas.

3.1. Descrição Gráfica do Interferômetro

Na Figura 1 [Imre and Balázs 2005], apresenta-se uma ilustração para a generalização de um interferômetro com dois espelhos semi-prateados. Um espelho semi-prateado é um dispositivo que reflete metade da luz incidente, deixando a outra metade passar através dele sem ser afetada. Assim, um espelho-prateado introduz diferentes atrasos na propagação ao longo dos dois caminhos. Quando não ocorre reflexão de parte da luz, os espelhos não causam perdas no sinal.

Após serem divididos pelo espelho semi-prateado, os feixes de ondas passam a percorrer percursos distintos e encontram os defasadores, os quais consistem em dispositivos que permitem alterar a fase da onda (ou moduladores de fase) da maneira desejada. Ainda na Figura 1 os defasadores estão indicados por θ_0 e θ_1 .

Na sequência, os feixes de ondas passam novamente por um espelho semi-prateado, para finalmente alcançarem os dispositivos $D|0\rangle$ e $D|1\rangle$, os quais denotam os detectores da intensidade da onda nas possíveis saídas do interferômetro. Como cada componente do feixe inicial se divide em duas partes, poderíamos esperar que cada detector $D|0\rangle$ e $D|1\rangle$ medisse 50% do feixe.

O fato experimental mostra que 100% do feixe original indicado no detector $D|1\rangle$ (superposição construtiva de onda em $D|1\rangle$) e $D|0\rangle$ não registra nada (resultado gerado pela superposição destrutiva de onda em $D|0\rangle$) [Rieffel and Polak 2000].

Neste texto, tem-se com principal interesse, a representação do interferômetro no modelo de circuitos quânticos através de transformações modeladas por portas unitárias quânticas aplicadas a um *qubit*.

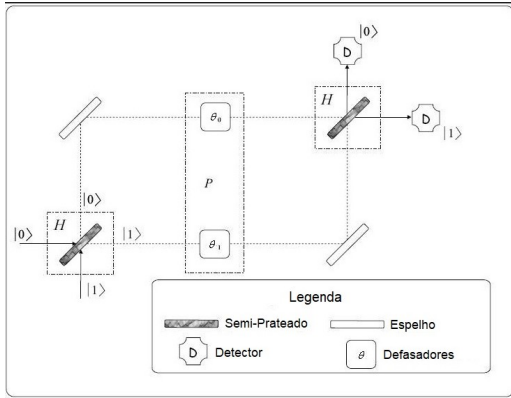


Figura 1. Diagrama do IMZ-T.

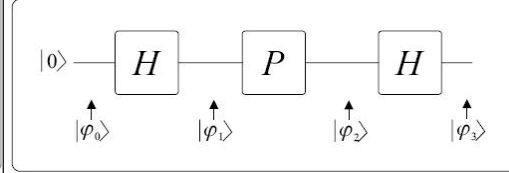


Figura 2. Circuito do IMZ-T.

3.2. Descrição Gráfica no Modelo de Circuitos Quânticos

O circuito apresentado na Figura 2 descreve, na linguagem de circuitos, o processo de interferência. Faz-se uso de portas quânticas sobre estados de 1 q-bit, sendo que o estado inicial é indicado por $|\phi_0\rangle$ [Imre and Balázs 2005, Lula 2004].

Cada espelho semi-prateado está representado por uma porta Hadamard (H), e os defasadores θ_0 e θ_1 são representados pela porta unitária Fase (P). A evolução do sistema pode também ser observada pela transformação sequencial dos estados a partir de $|\varphi_0\rangle$, resultando em novos estados indicados por $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ e $|\varphi_3\rangle$.

A evolução temporal do circuito associado a Figura 2 é apresentada logo a seguir, e consiste nas etapas de desenvolvimento de um interferômetro:

1. Determinação do estado $|\varphi_1\rangle$: inicializado no estado $|\varphi_0\rangle$, aplica-se a porta Hadamard (H) e obtém-se o estado $|\varphi_1\rangle$, conforme mostra a Eq. 1;

$$|\varphi_1\rangle = H|\varphi_0\rangle \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2. Determinação do estado $|\varphi_2\rangle$: tem-se que o estado computacional $|\varphi_1\rangle$ é transformado em $|\varphi_2\rangle$ pela ação da porta Fase (P). Esta etapa está descrita na Equação 2;

$$|\varphi_2\rangle = P|\varphi_1\rangle \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_0} \\ e^{i\theta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_0} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

3. Determinação do estado $|\varphi_3\rangle$: pela aplicação da porta Hadamard (H) ao estado computacional $|\varphi_2\rangle$ obtém-se o estado $|\varphi_3\rangle$, interpretando a recominação dos percursos apresentados na Figura 1 (veja a Equação 3):

$$|\varphi_3\rangle = H|\varphi_2\rangle \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\theta_0} + e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_0} - e^{i\theta_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_0} \\ e^{i\theta_1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

A fatoração da expressão na Eq. (3) $|\varphi_3\rangle = \frac{1}{2}(e^{i\theta_0} - e^{i\theta_1})|0\rangle + \frac{1}{2}(e^{i\theta_0} + e^{i\theta_1})|1\rangle$ resulta em:

$$|\varphi_3\rangle = e^{\frac{i}{2}(\theta_0+\theta_1)} \left(\left(\frac{1}{2}(e^{\frac{i}{2}(\theta_0-\theta_1)} - e^{-\frac{i}{2}(\theta_0-\theta_1)}) \right) |0\rangle + \left(\frac{1}{2}(e^{\frac{i}{2}(\theta_0-\theta_1)} + e^{-\frac{i}{2}(\theta_0-\theta_1)}) \right) |1\rangle \right) \quad (4)$$

Reduz-se Eq.(4), substituindo as exponenciais por correspondentes trigonométricas:

$$\sin\left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\theta_0-\theta_1}{2}} - e^{-\frac{\theta_0-\theta_1}{2}}}{2}; \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2}\right) = \frac{e^{i\frac{\theta_0-\theta_1}{2}} + e^{-i\frac{\theta_0-\theta_1}{2}}}{2}.$$

resultando na expressão: $|\varphi_3\rangle = e^{\frac{i}{2}(\theta_0+\theta_1)}(i\sin\left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2}\right)|0\rangle + \cos\left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2}\right)|1\rangle)$. Por fim, a substituição $\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\theta_0-\theta_1}{2}$, ao omitir a expressão $e^{\frac{i}{2}(\theta_0+\theta_1)}$ resulta em: $|\varphi_3\rangle = i\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)|0\rangle + \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)|1\rangle$. Mais especificamente, da expressão anterior, obtém-se que:

- se $P_0 = \sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$, quando $\Delta\theta = 0$ ou $\theta_1 = \theta_2$ tem-se que $P_0 = 0$;
- se $P_1 = \cos^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$, quando $\Delta\theta = 0$ tem-se que $P_1 = 1$.

Ou seja, de acordo com [Pessoa 2003], para o caso clássico em que a mudança de fase é nula, $|\varphi_3\rangle$ também é satisfeita, e resulta na aplicação de um interferômetro em um único fóton, este irá interagir consigo mesmo, de tal forma a produzir interferência construtiva num detector, e destrutiva no outro detector.

4. Modelagem, Simulação e Interpretação do IMZ Utilizando QisKit

O Qiskit é uma estrutura de programação de código aberto, que possibilita o acesso fácil a simuladores quânticos IBM Quantum e dispositivos quânticos através da nuvem. Essa plataforma oferece poderosas ferramentas para a criação e manipulação de programas quânticos em ambientes de programação quântica da IBM, tudo isso com suporte da linguagem de programação Python. Uma das principais funcionalidades do Qiskit é a facilidade de trabalhar com qubits, permitindo diversas conversões e operações sobre eles. Ele oferece funções integradas que facilitam a criação de registros e circuitos quânticos, o que agiliza o processo de desenvolvimento de algoritmos e experimentos quânticos. Graças ao Qiskit, é possível desenvolver e simular circuitos quânticos em computadores clássicos, bem como executá-los em dispositivos reais disponíveis pela IBM Quantum, tudo por meio da computação em nuvem. Essa capacidade de acesso aos recursos quânticos pela nuvem torna o Qiskit uma ferramenta poderosa e acessível para pesquisadores, desenvolvedores da computação quântica [Xu et al. 2019].

No ambiente Qiskit, é viável realizar simulações tanto em máquinas locais (computadores clássicos) como também utilizar hardware quântico real fornecido pela IBM. A plataforma oferece a flexibilidade de executar experimentos quânticos em simuladores para análises e testes rápidos, além de possibilitar o acesso direto a dispositivos quânticos reais disponibilizados pela IBM para explorar o poder do processamento quântico em aplicações do mundo real [W.M.S and J.C.C 2022].

Consideramos três estudos de casos para IMZ desenvolvidos no ambiente Qiskit.

4.1. Interpretação do IMZ via Porta Pauli-Z

A porta Pauli-Z ($P = Z$) correspondendo ao circuito da Figura 3, sendo este caso formalizado na Eq. (4). Considerando $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = \pi$, tem-se a descrição do estado $|\varphi_3\rangle$ pela seguinte expressão: $|\varphi_3\rangle = \frac{1}{2}(1 - (-1))|0\rangle + \frac{1}{2}(1 + (-1))|1\rangle = -|0\rangle$.

Assim, uma medida $|\varphi_3\rangle$ retorna o estado clássico $|0\rangle$, com probabilidade $p = 1$. Esta avaliação está representada por uma única coluna no histograma da Figura 4, com altura 1.000, representando o número de simulações.

4.2. Interpretação do IMZ via Porta Fase-S

Para a porta Fase-S ($P = S$) correspondendo ao circuito da Figura 5. Neste caso que, pela Eq. (4), se $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ tem-se como descrição do estado $|\varphi_3\rangle$ a seguinte expressão: $|\varphi_3\rangle = \frac{1}{2}(1 + i)|0\rangle + \frac{1}{2}(1 - i)|1\rangle$.



Figura 3. Circuito do IMZ-Z.

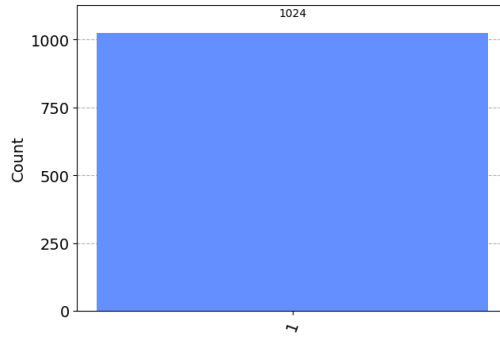


Figura 4. Histograma do IMZ-Z.

Assim, uma medida aplicada sobre este estado de sobreposição $|\varphi_3\rangle$ retorna $|0\rangle$, com probabilidade $p = \frac{1}{2}$ ou retorna $|1\rangle$, também com probabilidade $p = \frac{1}{2}$. Esta avaliação está representada por duas colunas no histograma da Figura 6, com alturas aproximando a metade do número de simulações, a menos dos erros de detecção.

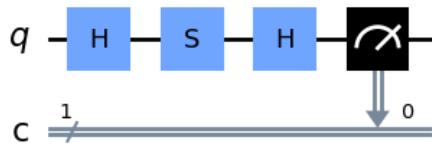


Figura 5. Circuito do IMZ-S.

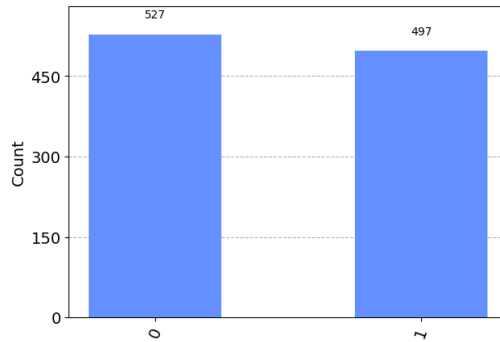


Figura 6. Histograma do IMZ-S.

4.3. Interpretação do IMZ via Porta Fase- T

A porta Fase- T ($P = T$) corresponde ao circuito da Figura 7. E, neste caso, pela Eq. (4), se $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, tem-se a descrição do estado $|\varphi_3\rangle$ pela seguinte expressão: $|\varphi_3\rangle = \frac{1}{2}(1 + i)|0\rangle + \frac{1}{2}(1 - i)|1\rangle$.

Assim, uma medida aplicada sobre este estado de sobreposição retorna $|0\rangle$, com probabilidade $p = \sin^2(\frac{\pi}{8})$ ou retorna $|1\rangle$, com probabilidade $p = \cos^2(\frac{\pi}{8})$. Esta avaliação está representada por duas colunas no histograma da Figura 8, com alturas aproximando a metade do número de simulações, a menos dos erros de detecção.

5. Conclusão e Trabalhos Futuros

A simulação de CQs via *hardware* integra conceitos e tecnologias da física quântica e da física clássica, mas como exige uma amostra exponencial de recursos quando da simulação via tecnologias clássicas, o gerenciamento de recursos torna-se uma estratégia importante no projeto. Neste contexto, o Qiskit vem colaborar com a discussão dos conceitos, tecnologias e aplicações da simulação quântica via *hardware* enquanto área estratégica para o desenvolvimento científico e tecnológico. Busca-se difundir a metodologia da programação quântica em sistemas digitais pelo estudo de casos.

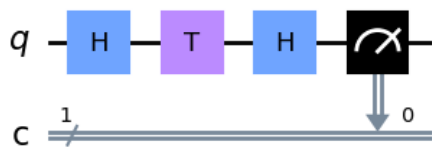


Figura 7. Circuito do IMZ-T.

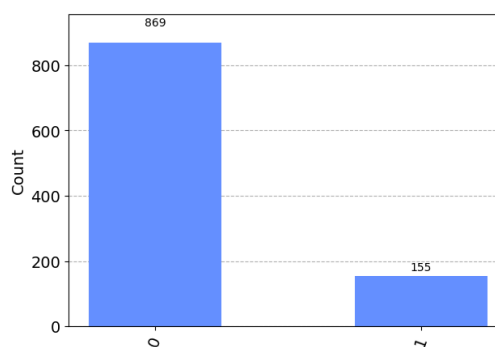


Figura 8. Histograma do IMZ-T.

Na continuidade, tem-se a desenvolvimento de aplicações específicas descritas via circuitos quânticos, que fazem uso das classes de funções constantes e balanceadas.

Agradecimentos

Os autores agradecem às agências: CAPES, CNPq (309160/2019-7; 311429/2020-3), PqG/FAPERGS (21/2551-0002057-1) e FAPERGS/CNPq PRONEX (16/2551-0000488-9).

Referências

- Borges, P. D. (2009). *Apostila de Física*. Ministério da Educação, UFSM.
- IBM (2023). Qiskit. Disponível em: <https://qiskit.org/>. Acesso em: 13 de agosto 2023.
- Imre, S. and Balázs, F. (2005). *Quantum Computing and Communications - an Engineering Approach*. John Wiley & Sons, NJ. (disponível via WWW em <http://www.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-047086902X.html>) (jun.2009).
- Lula, G. C. A. L. B. (2004). Interpretando o algoritmo de deutsch no interferômetro de mach-zehnder. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, 26(2):97–117.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press.
- N.K, A., H, M., C.R, R., and U, A. K. (2023). Design, simulation, and optimization of optical full-adder based on mach–zehnder interference. *Optics Communications*, 528.
- Pessoa, O. (2003). *Conceitos de Física Quântica*. Editora Livraria da Física, SP.
- Rieffel, E. G. and Polak, W. (2000). An introduction to quantum computing for non-physicists. (disponível por WWW em <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/9809016>) (jun.2009).
- Soares-Pinto, D. and Naves, C. (2021). O interferômetro de mach-zehnder e a escolha retardada quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 43.
- W.M.S, A. and J.C.C, F. (2022). *Algoritmos Quânticos usando o Qiskit: Uma abordagem para o ensino de informação e computação quântica*, volume 44. Revista Brasileira de Ensino de Física.
- Xu, B., Li, Z., Yang, J., Wei, S., Su, Q., Huang, W., Zhang, Y., and Guo, H. (2019). High speed continuous variable source-independent quantum random number generation. *Quantum Sci. Technol.*, 4(2).