Impacto das Generalizações da Integral de Choquet no Modelo ML TSKC FS: Um análise comparativa

Karina Condori[1],Graçaliz Dimuro[1], Julian Suarez[1], Helida Santos[1], Giancarlo Lucca[1], Tiago Asmuz[1]

[1]Centro de Ciências Computacionais, Universidade Federal do Rio Grande
Av. Itália km 08, Campus Carreiros, Rio Grande, 96201-900, Brazil

kvargas@unsa.edu.pe, {gracaliz, jul.sejje}@gmail.com,

{ldasalles, tiagoasmus}@gmail.com, giancarlo.lucca@ucpel.edu.br

Abstract. *This paper investigates the impact of different generalizations of the Choquet Integral on the performance of the neuro-fuzzy model ML-TSKC FS, designed for multi-label classification tasks. A total of 25 model variations were evaluated, combining four versions of the integral (CT, CC, CF, and CF1F2) and the Classical Choquet Integral (CO) with five fuzzy measures (uniform, relative, product, power, and weighted). The experiments were conducted on seven benchmark datasets with distinct characteristics, using four classical evaluation metrics from the literature: Average Precision (AP), Coverage (CV), Ranking Loss (RL), and Hamming Loss (HL). The aim of this study is to provide practical recommendations for selecting the best combination between Choquet Integral variants and fuzzy measures, according to the desired performance criterion.*

Resumo. *Este artigo investiga o impacto de diferentes generalizações da Integral de Choquet no desempenho do modelo neuro-fuzzy ML-TSKC FS, voltado para tarefas de classificação multi-rótulo. Foram avaliadas 25 variações do modelo, combinando quatro versões da integral (CT, CC, CF e CF1F2) e a Integral de Choquet Clássica (CO) com cinco medidas fuzzy (uniforme, relativa, produto, potência e ponderada). Os experimentos foram conduzidos em sete bases de dados benchmark com características distintas, utilizando quatro métricas clássicas da literatura: Average Precision (AP), Coverage (CV), Ranking Loss (RL) e Hamming Loss (HL). O objetivo deste estudo é oferecer recomendações práticas para selecionar a melhor combinação entre os pares de Integral de Choquet e medida fuzzy, conforme o critério de desempenho desejado.*

1. Introdução

A classificação multi-rótulo (ML) é uma abordagem, na qual uma instância pode ser associada a múltiplas categorias simultaneamente. Este tipo de classificação é essencial em problemas do mundo real, como no reconhecimento de imagens, onde uma foto pode ser rotulada, por exemplo, como **gato** e **animal** ao mesmo tempo [Herrera et al. 2016]. No entanto, os métodos tradicionais de classificação multi-rótulo enfrentam dificuldades ao lidar com a incerteza e imprecisão dos dados, além de muitas vezes não capturarem adequadamente as complexas interações entre os atributos.

Porém, os sistemas TSK FS, propostos por [Jang and Jyh-Shing 1993], são amplamente reconhecidos pela sua robustez e eficácia na modelagem de inferência fuzzy.

O modelo ML-TSK FS, introduzido por [Lou et al. 2021], estende essa abordagem para o contexto de classificação multi-rótulo, oferecendo maior flexibilidade e capacidade de adaptação. Uma etapa central nesse tipo de sistema é a agregação dos graus de pertinência dos atributos para calcular a ativação das regras fuzzy. Nesse contexto, a *Integral de Choquet Discreta (IC)* tem se destacado como uma alternativa promissora às funções agregadoras clássicas, por permitir a modelagem de interações entre atributos de forma não aditiva. Conforme discutido em [Condori 2024], a IC considera a importância relativa de cada subconjunto de variáveis, possibilitando representar dependências complexas de maneira mais expressiva.

Neste trabalho, propõe-se uma análise comparativa do desempenho do modelo ML-TSKC FS (uma extensão do ML-TSK FS que incorpora a IC) sob 25 configurações distintas, obtidas pela combinação de quatro generalizações da integral e a IC clássica com cinco medidas fuzzy amplamente utilizadas. O objetivo é identificar quais combinações oferecem melhor desempenho de acordo com diferentes métricas de avaliação tanto de ordenação (*ranking*) quanto de classificação.

Este artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta os conceitos relacionados e as generalizações do estado da arte. A Seção 3 descreve como a IC é usada no modelo. A Seção 4 detalha a metodologia experimental. Os resultados são discutidos na Seção 5. Finalmente, as direções futuras são apresentadas na Seção 6.

2. Preliminares

Nesta seção, apresentam-se os conceitos teóricos necessários para o desenvolvimento do presente trabalho.

Definição 1. *[Beliakov et al. 2007] Uma função $A : [0,1]^n \to [0,1]$ é chamada de função de agregação se satisfizer: (A1) A é crescente em cada argumento, isto é, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, se $x_i \leq y$, então $A(x_1,\dots,x_n) \leq A(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n)$; e (A2) satisfaz as condições de fronteira: (i) $A(0,\dots,0) = 0$; (ii) $A(1,\dots,1) = 1$.*

Entre os exemplos de funções de agregação estão: as t-normas $T : [0,1]^2 \to [0,1]$, que são funções comutativas e associativas com elemento neutro à direita (isto é, $T(x,1) = x$) [Klement et al. 2004] as funções de sobreposição (overlap functions), que são t-normas contínuas e positivas [Dimuro et al. 2017] e as cópulas $C : [0,1]^2 \to [0,1]$, que possuem 0 como elemento absorvente, 1 como neutro, e satisfazem $C(x,y) + C(x',y') \geq C(x,y') + C(x',y)$ para todos $x \leq x'$, $y \leq y'$ [Alsina et al. 2006].

Definição 2. *[Bustince et al. 2015] Seja $\vec{r} = (r_1,\dots,r_n)$ um vetor real de dimensão n, com $\vec{r} \neq \vec{0}$. Diz-se que uma função $PA : [0,1]^n \to [0,1]$ é $\vec{r}$-crescente se, para todo $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n$ e $c > 0$ tal que $(x_1 + cr_1,\dots,x_n + cr_n) \in [0,1]^n$, tem-se que $F(x_1 + cr_1,\dots,x_n + cr_n) \geq F(x_1,\dots,x_n)$. De forma análoga, define-se uma função $\vec{r}$-decrescente.*

Definição 3. *[Bustince et al. 2015] Seja $\vec{r} = (r_1,\dots,r_n)$ um vetor real não nulo. Uma função $PA : [0,1]^n \to [0,1]$ é dita uma função de pré-agregação $\vec{r}$-ária se: (PA1) F é $\vec{r}$-crescente; e (PA2) F satisfaz as condições de fronteira (A2) (i) e (ii).*

2.1. Medidas Fuzzy

A medida fuzzy desempenha um papel central neste trabalho. No âmbito das funções de agregação, ela quantifica a relevância das interações, refletindo as relações e a importância entre os elementos agregados.

Definição 4. *[Murofushi et al. 1994] Uma função* $\mathfrak{m} : 2^N \to [0,1]$ *é chamada de medida fuzzy se, para todos os subconjuntos* $X, Y \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$*, as seguintes condições são satisfeitas:*

(m1) Monotonicidade (Crescimento): se $X \subseteq Y$*, então* $\mathfrak{m}(X) \leq \mathfrak{m}(Y)$*;*
(m2) Condições de fronteira: $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$ *e* $\mathfrak{m}(N) = 1$.

As medidas fuzzy consideradas neste trabalho são as mesmas descritas em [Condori 2024], influenciando diretamente o processo de agregação da IC e determinando a forma como os atributos contribuem para o resultado final. A **medida uniforme** atribui igual importância a todos os atributos; a **medida relativa** destaca aqueles considerados mais relevantes; a **medida produto** incorpora interações de natureza multiplicativa; a **medida de potência** ajusta a sensibilidade por meio de um parâmetro q, definido a partir de uma busca em grade no intervalo $[0, 3]$ com passo 0,5 e a **medida ponderada** permite especificar pesos individuais para cada atributo, oferecendo maior controle sobre sua influência no processo de agregação.

2.2. A Integral de Choquet Discreta

A IC discreta é uma função de agregação que leva em consideração a importância das interações entre os atributos. Essa capacidade de representar relações complexas só é possível graças ao uso das medidas fuzzy, que atribuem valor a cada subconjunto de atributos, garantindo assim a flexibilidade necessária para modelar diferentes cenários de dependência entre as informações.

Definição 5. *[Choquet 1954] Seja* $\mathfrak{m} : 2^N \to [0,1]$ *uma medida fuzzy. A* ***integral de Choquet discreta*** *(IC) é a função* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}} : [0,1]^n \to [0,1]$*, definida, para todo vetor* $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$*, como:*

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{(i)} - x_{(i-1)}\right) \cdot \mathfrak{m}(A_{(i)}) \tag{1}$$

Onde $\left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right)$ é uma permutação crescente do vetor $\vec{x}$, ou seja, $0 \leq x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$, com a convenção de que $x_{(0)} = 0$, e $A_{(i)} = \{(i), \ldots, (n)\}$ representa o subconjunto dos índices dos $n - i + 1$ maiores componentes de $\vec{x}$.

Utilizando a propriedade distributiva do produto, (1) pode ser reescrita em sua forma expandida, dada por:

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{(i)} \cdot \mathfrak{m}(A_{(i)}) - x_{(i-1)} \cdot \mathfrak{m}(A_{(i)})\right) \tag{2}$$

2.3. Generalizações da Integral de Choquet Discreta

A IC foi generalizada para permitir diferentes tipos de operadores semelhantes à agregação, com aplicação no Método de Raciocínio Fuzzy (FRM) de classificadores fuzzy. A primeira generalização é feita por meio de t-normas, resultando em uma família de funções de pré-agregação denominadas integrais C_T definida a seguir.

Definição 6. *[Lucca et al. 2015] Seja $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ uma t-norma. A integral C_T é a função $\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^{T} : [0,1]^n \to [0,n]$, definida por:*

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^{T}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} T\left(x_{(i)} - x_{(i-1)}, \mathfrak{m}(A_{(i)})\right). \tag{3}$$

A segunda generalização está relacionada à forma expandida da IC (2), sendo generalizada por cópulas [Alsina et al. 2006], o que resulta em funções de agregação chamadas integrais CC definida a seguir.

Definição 7. *[Lucca et al. 2017] Seja $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ uma cópula. A integral CC é a função $\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^{C} : [0,1]^n \to [0,1]$, dada por:*

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^{C}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} C\left(x_{(i)}, \mathfrak{m}(A_{(i)})\right) - C\left(x_{(i-1)}, \mathfrak{m}(A_{(i)})\right). \tag{4}$$

Considerando funções F que satisfazem certas condições específicas, a generalização da IC (1) por tais funções resulta em funções de pré-agregação denominadas integrais C_F definida a seguir.

Definição 8. *[Lucca et al. 2018b] Seja $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ uma função que satisfaz: (i) $\forall y \in [0,1] : F(0,y) = 0$; (ii) $\forall x \in [0,1] : F(x,1) = x$.*

A integral C_F é a função $\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^{F} : [0,1]^n \to [0,1]$, definida por:

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^{F}(\vec{x}) = \min\left\{1, \sum_{i=1}^{n} F\left(x_{(i)} - x_{(i-1)}, \mathfrak{m}(A_{(i)})\right)\right\}. \tag{5}$$

Finalmente, a forma expandida da IC (2) foi generalizada por meio de um par de funções sob certas restrições, resultando em funções não-médias, ordenadas e monotônicas por direção, chamadas integrais $C_{F_1F_2}$ definida a seguir.

Definição 9. *[Lucca et al. 2018a] Seja $\mathfrak{m}$ uma medida fuzzy simétrica e sejam $F_1, F_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ funções que satisfazem:*

(i) $\forall x, y \in [0,1] : F_1(x,y) \geq F_2(x,y)$; (ii) F_1 é $(1,0)-$crescente.

A integral $C_{F_1F_2}$ é a função $\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^{(F_1,F_2)} : [0,1]^n \to [0,1]$, definida por:

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{m}}^{(F_1,F_2)}(\vec{x}) = \min\left\{1, x_{(1)} + \sum_{i=2}^{n} \left[F_1\left(x_{(i)}, \mathfrak{m}(A_{(i)})\right) - F_2\left(x_{(i-1)}, \mathfrak{m}(A_{(i)})\right)\right]\right\}. \tag{6}$$

Cada uma das generalizações consideradas, são apresentadas na Tabela 1. Nessa tabela, $x = (x_{(i)} - x_{(i-1)})$ representa a diferença entre os elementos a serem agregados e $y = \mathfrak{m}(A_{(i)})$ está relacionado à medida fuzzy.

Tabela 1. Generalizações da IC e suas respectivas funções de agregação.

Generalização	Função	Equação
C_T integral	t-norma de Hamacher	$T_{HP}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x+y-xy} & \text{caso contrário} \end{cases}$
C_C integral	Cópula	$C_F(x,y) = xy + x^2y(1-x)(1-y)$
C_F integral	Pré-agregação F_{PA}	$F_{PA}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \text{ou} y = 0 \\ \frac{x+y}{2} & \text{se } 0 < x \leq y \\ x & \text{caso contrário} \end{cases}$
$C_{F_1F_2}$ integral	F_1 = função de sobreposição GM F_2 = função de agregação F_{BPC}	$GM(x,y) = \sqrt{xy}$ $F_{BPC}(x,y) = xy^2$

Notemos que as quatro agregações foram escolhidas conforme [Dimuro et al. 2020] pois cada uma delas apresentam desempenhos relevantes em diferentes contextos.

3. Aplicação das Generalizações da Integral de Choquet no Modelo ML-TSKC FS

O modelo ML-TSKC FS é uma extensão do tradicional ML-TSK FS, no qual a agregação dos graus de pertinência fuzzy é realizada por meio da IC, em vez de operadores clássicos como o produto. Essa substituição permite capturar de forma mais precisa as interações entre os atributos, o que potencializa a capacidade expressiva do modelo.

Cada regra fuzzy R_k do modelo segue a forma Takagi-Sugeno-Kang, descrita da seguinte maneira:

$$R_k : \text{SE } \mathbf{x} \text{ é } B_k, \text{ ENTÃO } y = L_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}_k),$$

em que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_A)$ representa o vetor de entrada, e $B_k = B_k^1 \times B_k^2 \times \ldots \times B_k^A$ define a parte antecedente da regra, composta por conjuntos fuzzy B_k^j associados a cada atributo x_j. O consequente da regra é uma função linear:

$$L_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}_k) = p_{k0} + p_{k1}x_1 + \cdots + p_{kA}x_A,$$

em que p_{k0} é o termo constante e p_{kj} são os coeficientes associados a cada atributo. O vetor $\mathbf{p}_k = (p_{k0}, p_{k1}, \ldots, p_{kA})^T$ contém todos os parâmetros do consequente da regra R_k.

A força de ativação de uma regra fuzzy R_k, denotada por $\mu_k^{\mathfrak{C}_m}(\mathbf{x})$, é calculada aplicando a Integral Discreta de Choquet sobre os graus de pertinência dos atributos:

$$\mu_k^{\mathfrak{C}_m}(\mathbf{x}) = \mathfrak{C}_m(\mu_{B_k^1}(x_1), \ldots, \mu_{B_k^A}(x_A)),$$

onde $\mu_{B_k^j}(x_j)$ representa o grau de pertencimento do valor de entrada x_j ao conjunto fuzzy B_k^j, geralmente obtido por uma função de pertinência (por exemplo, a função Gaussiana).

Essa abordagem possibilita que o modelo capture interações não lineares e relações complexas entre os atributos, o que não seria possível com funções agregadoras tradicionais.

Além da versão clássica da integral, este trabalho também considera diferentes generalizações: as integrais CT, CF, CC e CF1F2. Essas variantes ampliam a flexibilidade do modelo ao permitir diferentes formas de agregação fuzzy, cada uma com suas próprias propriedades matemáticas e comportamentos. A eficácia da agregação também depende da escolha da medida fuzzy utilizada dentre as consideradas neste estudo estão a medida uniforme, relativa, produto, potência e ponderada. Essa escolha impacta diretamente a maneira como as interações entre os atributos são quantificadas, influenciando a precisão e a robustez final do modelo.

A saída global do modelo ML-TSKC FS é calculada pela média ponderada das saídas das regras, com pesos normalizados:

$$\hat{y} = \sum_{k} \tilde{\mu}_k^{\mathfrak{C}_m}(\mathbf{x}) \cdot L_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}_k),$$

em que $\tilde{\mu}_k^{\mathfrak{C}_m}(\mathbf{x})$ representa a força de ativação normalizada da k-ésima regra, garantindo que a soma dos pesos de todas as regras seja igual a 1. Essa normalização assegura uma distribuição proporcional e interpretável da influência de cada regra na saída final do modelo.

4. Metodologia Experimental

Nesta seção, descrevem-se os procedimentos experimentais adotados para avaliar o desempenho do modelo ML-TSKC FS em diferentes configurações de agregação fuzzy baseadas na Integral de Choquet. A análise considerou a combinação entre diversas generalizações da integral e diferentes medidas fuzzy, sendo conduzida sobre bases de dados multi-rótulo amplamente utilizadas na literatura.

4.1. Bases de Dados Utilizadas

Foram selecionadas sete bases de dados do repositório *Mulan*: *Birds*, *Flags*, *Image*, *Scene*, *CAL500*, *Emotions* e *Yeast*. Essas bases apresentam características estruturais e semânticas distintas variando em número de atributos, quantidade de rótulos e domínio de aplicação, como bioacústica, dados geográficos, música, emoções, visão computacional e cenas naturais permitindo uma avaliação abrangente da robustez e adaptabilidade do modelo proposto.

4.2. Combinações Avaliadas

O experimento envolveu a análise de 25 variações do modelo ML-TSKC FS. Cada variação foi obtida pela combinação entre uma das quatro generalizações da Integral de Choquet CF, CT, CC, CF1F2 e a Integral de Choquet original CO com uma das cinco medidas fuzzy: *uniforme*, *relativa*, *produto*, *potência* e *ponderada*. Essas combinações modificam o processo de agregação fuzzy na etapa de cálculo da força de ativação das regras, mantendo a estrutura geral do modelo.

4.3. Métricas de Avaliação

A qualidade das predições foi avaliada com base em quatro métricas comumente utilizadas na literatura de classificação multi-rótulo: Average Precision (AP), Ranking Loss (RL), Coverage (CV) e Hamming Loss (HL).

As métricas AP, RL e CV são sensíveis à ordenação dos rótulos e, por isso, são categorizadas como métricas de *ranking*. Já HL avalia diretamente a acurácia das predições, sendo classificadas como métricas de *classificação*.

4.4. Procedimentos Estatísticos

Para determinar se as diferenças observadas entre os modelos são estatisticamente significativas, foi aplicado o teste não-paramétrico de Friedman, adequado para comparações múltiplas sobre os mesmos conjuntos de dados. Esses testes foram aplicados separadamente para cada métrica.

A seguir, apresentamos os resultados obtidos para cada métrica, acompanhados de uma análise interpretativa com foco nas diferenças de desempenho entre as integrais generalizadas avaliadas.

4.5. Resultados e Discussão

Os resultados experimentais obtidos para as 25 variações do modelo ML-TSKC FS estão disponíveis no repositório público `https://github.com/karymvc/Ferramentas-ML/tree/main/Resultados%20comparativos`, onde se encontram todas as tabelas de desempenho, separadas por métrica e base de dados.

De modo geral, observou-se que os classificadores apresentam desempenhos próximos entre si, com variações pontuais associadas às combinações específicas de generalizações da IC e medidas fuzzy utilizadas. Tais variações indicam que, embora a estrutura do modelo seja preservada, a forma como os atributos interagem por meio das diferentes funções de agregação pode impactar o resultado final, dependendo das características do conjunto de dados e da métrica de avaliação considerada. A análise dessas variações é apresentada nas subseção seguinte.

4.6. Análise Estatística Comparativa

Em todas as quatro métricas avaliadas (*Average Precision* – AP, *Hamming Loss* – HL, *Ranking Loss* – RL e *Coverage* – CV) o teste de Friedman não rejeitou a hipótese nula de desempenho equivalente entre as 25 variações do ML-TSKC FS ($\alpha = 0{,}05$). Ainda assim, os *ranks* médios revelaram **tendências consistentes** que orientam escolhas práticas. A Tabela 2 resume os melhores desempenhos observados em cada cenário.

Tabela 2. Resumo dos melhores e piores desempenhos por métrica.

Característica	(AP)	(RL)	(CV)	(HL)
Tipo de Métrica	Ranking	Ranking	Ranking	Classificação
Melhor Combinação	CF_pot	CF1F2_rel	CO_rel	CC_pro
Pior Combinação	CC_pro	CO_pot	CC_pro	CF_uni
Melhores Medidas	pot, rel	rel, uni	rel, pot	*Volátil*
Melhores Generalizações	CF, CF1F2	CF1F2	CO, CF1F2	CC

5. Conclusões

Este estudo avaliou o impacto de diferentes generalizações da IC no desempenho do modelo ML-TSKC FS, aplicado à tarefa de classificação multi-rótulo. Foram consideradas 25 variações do modelo, resultantes da combinação de cinco formas de integral (CO, CT, CC, CF e CF1F2) com cinco medidas fuzzy (uniforme, relativa, produto, potência e ponderada), avaliadas em sete bases de dados benchmark de domínios distintos. Os resultados experimentais evidenciaram:

- **Performance:** O estudo demonstrou claramente a existência de dois padrões distintos de desempenho: um voltado para métricas de **ranking** (AP, RL, CV), e outro para métricas de **classificação** (HL). Observou-se que, com frequência, uma configuração que se destaca em um grupo tende a ter desempenho inferior no outro.
- **Para Qualidade de Ranking (AP, RL, CV):**
  - As medidas fuzzy *pot* (potência) e *rel* (relativa) foram consistentemente mais eficazes.
  - A medida *pro* (produto) apresentou desempenho inferior em todos os casos, sendo parte da pior combinação em duas das três métricas de ranking.
  - A generalização *CF1F2* se destacou como a mais robusta, com bom desempenho nas três métricas. As generalizações *CF* e *CO* também apresentaram bons resultados pontuais.
- **Para Qualidade de Classificação (HL):**
  - Os resultados se inverteram: a combinação *CC_pro*, que teve pior desempenho no ranking, mostrou-se a melhor em classificação.
  - Isso indica que a generalização *CC* e a medida *pro* criam um modelo que tende a prever corretamente mais rótulos, mas com menor capacidade de ordenação dos mais relevantes.

Essas observações confirmam que não existe uma única configuração ideal universal. A escolha da melhor combinação depende diretamente do objetivo da aplicação: priorizar a ordenação correta das instâncias ou minimizar o número total de erros por rótulo. Sendo assim, a escolha da melhor configuração do modelo ML-TSKC FS depende inteiramente do objetivo final:

- **Cenário 1 – Otimizar a qualidade do ranking:** (ex.: garantir que os resultados mais relevantes estejam no topo em um sistema de busca). As evidências apontam para o uso das combinações *CF1F2_rel* ou *CF_pot*, que demonstraram desempenho forte e consistente nas métricas AP, RL e CV.
- **Cenário 2 – Minimizar o número total de erros de classificação:** (ex.: quando cada erro de rótulo tem o mesmo peso e a ordem não importa). A combinação *CC_pro* é a mais indicada. Ela é especializada nessa tarefa, mesmo que seu desempenho em ranking seja fraco.

6. Trabalhos Futuros

Como desdobramentos deste trabalho, propõem-se as seguintes direções:

- Explorar novas generalizações da IC e medidas fuzzy não aditivas.
- Avaliar o modelo em conjuntos de dados maiores e mais desbalanceados, ampliando a generalização dos resultados.
- Propor uma nova generalização da IC que possa melhorar a performance do modelo.

Referências

Alsina, C., Schweizer, B., and Frank, M. J. (2006). *Associative functions: triangular norms and copulas*. World Scientific.

Beliakov, G., Pradera, A., Calvo, T., et al. (2007). *Aggregation functions: A guide for practitioners*, volume 221. Springer.

Bustince, H., Fernández, J., Kolesárová, A., and Mesiar, R. (2015). Directional monotonicity of fusion functions. *European Journal of Operational Research*, 244(1):300–308.

Choquet, G. (1954). Theory of capacities. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 5, pages 131–295.

Condori, K. M. (2024). Generalização do processo de agregação do sistema fuzzy multi-rótulo takagi-sugeno-kan baseado na integral de choquet. Master's thesis, FURG, Rio Grande-RS, Brasil. Dissertação de Mestrado.

Dimuro, G. P., Bedregal, B., Bustince, H., Jurio, A., Baczyński, M., and Miś, K. (2017). Ql-operations and ql-implication functions constructed from tuples (o, g, n) and the generation of fuzzy subsethood and entropy measures. *International Journal of Approximate Reasoning*, 82:170–192.

Dimuro, G. P., Fernández, J., Bedregal, B., Mesiar, R., Sanz, J. A., Lucca, G., and Bustince, H. (2020). The state-of-art of the generalizations of the choquet integral: From aggregation and pre-aggregation to ordered directionally monotone functions. *Information Fusion*, 57:27–43.

Herrera, F., Charte, F., Rivera, A. J., and Del Jesus, M. J. (2016). *Multilabel classification*. Springer.

Jang and Jyh-Shing (1993). *ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics.

Klement, E. P., Mesiar, R., and Pap, E. (2004). Triangular norms. position paper iii: continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 145(3):439–454.

Lou, Q., Deng, Z., Xiao, Z., Choi, K.-S., and Wang, S. (2021). Multilabel Takagi-Sugeno-Kang fuzzy system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 30(9):3410–3425.

Lucca, G., Dimuro, G. P., Fernández, J., Bustince, H., Bedregal, B., and Sanz, J. A. (2018a). Improving the performance of fuzzy rule-based classification systems based on a nonaveraging generalization of cc-integrals named $c\_\{F\_1F\_2\}$-integrals. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27(1):124–134.

Lucca, G., Sanz, J. A., Dimuro, G. P., Bedregal, B., Asiain, M. J., Elkano, M., and Bustince, H. (2017). Cc-integrals: Choquet-like copula-based aggregation functions and its application in fuzzy rule-based classification systems. *Knowledge-Based Systems*, 119:32–43.

Lucca, G., Sanz, J. A., Dimuro, G. P., Bedregal, B., Bustince, H., and Mesiar, R. (2018b). Cf-integrals: A new family of pre-aggregation functions with application to fuzzy rule-based classification systems. *Information Sciences*, 435:94–110.

Lucca, G., Sanz, J. A., Dimuro, G. P., Bedregal, B., Mesiar, R., Kolesarova, A., and Bustince, H. (2015). Preaggregation functions: Construction and an application. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 24(2):260–272.

Murofushi, T., Sugeno, M., and Machida, M. (1994). Non-monotonic fuzzy measures and the choquet integral. *Fuzzy sets and Systems*, 64(1):73–86.