

FuzzyFeatureMap: Uma Codificação Quântica Baseada em Amplitudes para Representações Fuzzy em Modelos VQC

Cecilia Botelho¹, Larissa Schonhofen¹,
Helida Santos², Giancarlo Lucca³, Adenauer Yamin¹, Renata Reiser¹

¹ Universidade Federal de Pelotas, LUPS – Pelotas, RS – Brasil

² Universidade Federal do Rio Grande, C3 – Rio Grande, RS – Brasil

³ Universidade Católica de Pelotas, PGEEC – Pelotas, RS – Brasil

{lssilva, cscbotelho, adenauer, reiser}@inf.ufpel.edu.br

helida@furg.br

giancarlo.lucca@ucpel.edu.br

Abstract. *The integration of quantum computing and fuzzy logic has shown promising potential for addressing problems involving uncertainty and linguistic representations. However, traditional quantum feature maps used in quantum machine learning algorithms are not designed to handle fuzzy data. This work proposes FuzzyFeatureMap, a new quantum encoding circuit specifically developed to represent fuzzy variables in Variational Quantum Classifiers (VQC). To validate the proposal, we conducted comparative experiments using PauliFeatureMap and ZZFeatureMap, applied to a simulated dataset with fuzzy variables modeling social agent decisions. The results demonstrate that FuzzyFeatureMap achieved superior performance in terms of accuracy, macro F1-score, and computational efficiency, highlighting its suitability for tasks involving semantic uncertainty and gradual information.*

Resumo. *A integração entre computação quântica e lógica fuzzy tem-se mostrado promissora para tratar problemas com incertezas e representações linguísticas. No entanto, os circuitos de codificação (feature maps) tradicionais utilizados em algoritmos de aprendizado quântico não foram projetados para lidar com dados fuzzy. Este trabalho propõe o FuzzyFeatureMap, um novo circuito de codificação quântica desenvolvido especificamente para representar variáveis fuzzy em classificadores quânticos variacionais (VQC). Para validar a proposta, conduzimos experimentos comparativos com os feature maps PauliFeatureMap e ZZFeatureMap, utilizando um conjunto de dados simulado com variáveis fuzzy representando decisões de agentes sociais. Os resultados mostram que o FuzzyFeatureMap alcançou melhor desempenho em termos de acurácia, F1-macro e eficiência computacional, destacando sua adequação para tarefas que envolvem incerteza e gradualidade semântica.*

1. Introdução

A computação quântica tem emergido como uma área promissora da ciência e tecnologia. Com avanços em hardware e linguagens acessíveis, tornou-se possível explorar algoritmos baseados em princípios distintos da computação clássica, com impacto potencial em segurança, modelagem e inteligência artificial.

Diferente da computação convencional, que opera com bits binários, a computação quântica é baseada em qubits, unidades de informação que exploram fenômenos como superposição, emaranhamento e interferência. A superposição permite que um qubit represente simultaneamente múltiplos estados, aumentando exponencialmente o espaço de representação à medida que novos qubits são adicionados. O emaranhamento, por sua vez, cria correlações não clássicas entre qubits, possibilitando relações profundas entre variáveis que seriam independentes em sistemas tradicionais. Esses conceitos, combinados ao controle preciso das amplitudes de probabilidade, tornam possível construir modelos computacionais sensíveis a padrões complexos e com capacidades únicas de generalização.

Apesar dos avanços em computação quântica, muitos dados reais são subjetivos e incertos. A lógica fuzzy, por meio de graus de pertinência, oferece uma representação mais próxima do raciocínio humano ao lidar com categorias vagas como "baixo" ou "alto".

A lógica fuzzy e a computação quântica têm demonstrado potencial em aplicações de inteligência artificial, desde robótica [Cupertino et al. 2006] e saúde [Xu et al. 2007] até a otimização de redes neurais [Zhou et al. 2024]. Esses avanços destacam a relevância de integrar essas duas abordagens em arquiteturas computacionais mais expressivas e adaptativas.

Contudo, feature maps como o `PauliFeatureMap` e o `ZZFeatureMap`, disponíveis no Qiskit [IBM 2024], foram projetados para dados clássicos e discretos. Eles não capturam bem a semântica fuzzy, o que pode prejudicar eficiência e interpretabilidade em cenários com incerteza gradual.

Diante desse cenário, este trabalho propõe uma nova abordagem de codificação, denominada `FuzzyFeatureMap`, que traduz diretamente os graus de pertinência fuzzy em rotações quânticas aplicadas sobre as amplitudes dos qubits. Essa estratégia preserva a natureza contínua e interpretável dos dados fuzzy, integrando-se de forma eficiente a modelos variacionais quânticos. Os experimentos indicam que essa codificação simplifica os circuitos, reduz o tempo de treinamento e alcança desempenho competitivo em tarefas de classificação, superando os métodos tradicionais em diversos aspectos. Este artigo está organizado da seguinte forma: Seção 1 – Introdução; Seção 2 – Preliminares, que apresenta os conceitos fundamentais de lógica fuzzy e aprendizado de máquina quântico; Seção 3 – Metodologia, com a descrição da abordagem proposta e ferramentas utilizadas; Seção 4 – Resultados e Discussão; e Seção 5 – Conclusões, com reflexões finais e sugestões de trabalhos futuros.

2. Preliminares

2.1. Conceitos Básicos de Computação Quântica

A computação quântica modela o processamento da informação com base nos princípios da mecânica quântica. Seu elemento fundamental é o *qubit*, que representa um estado

de superposição entre as bases clássicas $|0\rangle$ e $|1\rangle$: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

A medição do qubit $|\psi\rangle$ colapsa o estado em uma das bases, com probabilidades dadas pelo quadrado das correspondentes amplitudes. E, a manipulação desses estados é realizada por portas quânticas unitárias [Nielsen and Chuang 2000].

O espaço de estados de um sistema quântico multi-qubit é obtido pelo produto tensorial dos espaços de estados de seus componentes. Considerando dois qubits, $|\psi\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ e $|\varphi\rangle = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle$, o estado conjunto é descrito por:

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = \alpha_1\alpha_2|00\rangle + \alpha_1\beta_2|01\rangle + \beta_1\alpha_2|10\rangle + \beta_1\beta_2|11\rangle.$$

Uma mudança de estado é representada por uma *transformação quântica unitária* (TQ), modelada como uma matriz unitária de dimensão 2^N , onde N é o número de qubits. No caso de um único qubit, uma TQ geral, com $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\lambda, \phi \in [0, 2\pi]$, é descrita como:

$$F = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\lambda} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i(\phi+\lambda)} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Para parâmetros $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = \pi$ e $\phi = 0$, na Eq 1, tem-se: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, denominada *porta de Hadamard* (H), resultando em estados com superposições balanceadas.

Aplicando a operação $H \otimes H$ sobre o estado clássico $|01\rangle$, obtém-se:

$$|\gamma\rangle = (H \otimes H) |01\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

que representa um estado quântico bi-dimensional em superposição, em relação à base clássica: $|\gamma\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$.

Esse tipo de construção é essencial para explorar as propriedades fundamentais da computação quântica, como o emaranhamento e a interferência aplicadas em algoritmos de aprendizado quântico e codificação de dados.

2.2. Codificação de Dados e Classificação Variacional em QML

Algoritmos de aprendizado de máquina quântica, como o *Variational Quantum Classifier* (VQC), combinam componentes quânticos e clássicos para realizar tarefas supervisionadas de classificação. O VQC é uma arquitetura híbrida composta por três etapas:

1. **Codificação (Feature Map):** os dados clássicos de entrada são codificados em estados quânticos por meio de portas parametrizadas. Esse processo define a forma como as variáveis são injetadas no circuito. Dois dos feature maps mais comuns no Qiskit são:
 - **PauliFeatureMap:** aplica rotações baseadas em operadores de Pauli, geralmente sem emaranhamento explícito;

- **ZZFeatureMap**: incorpora interações entre pares de qubits via portas ZZ, favorecendo o emaranhamento entre atributos.
2. **Circuito Variacional (Ansatz)**: após a codificação, os dados passam por um circuito quântico parametrizado (o *ansatz*), composto por rotações e emaranhamentos. Os parâmetros desse circuito são ajustados durante o treinamento para minimizar uma função de custo.
 3. **Medição e Otimização**: ao final do circuito, mede-se um ou mais qubits e os resultados são usados para calcular a saída predita. Um algoritmo de otimização clássico, como o SPSA, é então utilizado para ajustar os parâmetros do *ansatz*, guiando o modelo para uma melhor separação entre as classes.

Neste trabalho, propomos um novo método de codificação baseado em lógica fuzzy, a ser utilizado como feature map dentro da arquitetura VQC.

2.3. Conceitos Básicos de Lógica Fuzzy

A lógica fuzzy é uma extensão matemática da lógica clássica, fornecendo uma base para lidar com dados imprecisos ou incertos. Introduzidos para suavizar transições entre classes, os conjuntos fuzzy generalizam a teoria clássica dos conjuntos, a qual pode ser vista como um caso particular da teoria fuzzy [Zadeh 1965]. Além disso, suas generalizações multivaloradas, posteriormente formalizadas em [Zadeh 1975], abriram caminho para novas aplicações em diversos campos.

A teoria clássica de conjuntos é baseada na função característica $f_A: U \rightarrow \{0, 1\}$, onde $f_A(x) = 1$ se $x \in A$, e $f_A(x) = 0$ se $x \notin A$, onde U é o conjunto universo. Esta função associa cada elemento $x \in U$ a um valor no conjunto discreto $\{0, 1\}$.

Seja $U \neq \emptyset$ o conjunto universo, um conjunto fuzzy A em U é caracterizado pela função de pertinência $f_A: U \rightarrow [0, 1]$ onde, para cada $x \in U$, $f_A(x)$ indica o grau de pertinência de cada elemento x no conjunto fuzzy A .

Um conjunto fuzzy A em U também pode ser descrito como um conjunto de pares ordenados, onde cada elemento $x \in U$ está associado com seu respectivo grau de pertinência $f_A(x) \in [0, 1]$, ou seja, $A = \{(x, f_A(x)) \mid x \in U\}$. Neste contexto, um conjunto fuzzy pode ser definido por n -tuplas na abordagem da lógica multivalorada.

Sejam A e B conjuntos fuzzy em $U \neq \emptyset$, representados pelas funções de pertinência $f_A, f_B: U \rightarrow [0, 1]$, respectivamente. Tomando-se $f_{\cup}, f_{\cap}: U \rightarrow [0, 1]$, a união e interseção entre A e B são, respectivamente, dadas como:

$$A \cup B = \{(x, f_{\cup}(x)) \mid x \in U\}, \text{ com } f_{\cup}(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\};$$

$$A \cap B = \{(x, f_{\cap}(x)) \mid x \in U\}, \text{ com } f_{\cap}(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}.$$

Os operadores $\max, \min: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ representam normas e conormas triangulares e podem ser substituídas por outras funções das classes correspondentes, conforme em [Klement et al. 2000].

Além disso, seja $f_A: U \rightarrow [0, 1]$. O complemento fuzzy de A é o conjunto

$$A' = \{(x, f_{A'}(x)) \mid x \in U\}, \text{ onde } f_{A'}(x) = 1 - f_A(x).$$

3. Metodologia

Neste trabalho, propomos o *FuzzyFeatureMap*, uma codificação baseada em rotações $RY(\theta)$, onde o ângulo θ é proporcional ao grau de pertinência fuzzy. Dessa forma, o grau de pertinência influencia diretamente a probabilidade de medir o qubit no estado $|1\rangle$, refletindo a incerteza fuzzy na amplitude quântica. Esta abordagem é simples, eficiente e semanticamente coerente com a natureza dos dados tratados.

Para avaliar a proposta de codificação quantum-fuzzy apresentada neste trabalho, foram realizados experimentos com um modelo de classificação variacional (VQC) aplicado a um conjunto de dados sintetizado a partir de um dilema social computacional [Bottelho et al. 2024]. O objetivo da proposta é comparar o desempenho da nova codificação *FuzzyFeatureMap*, desenvolvida para lidar com variáveis fuzzy, com feature maps tradicionais disponíveis no Qiskit, como `PauliFeatureMap` e `ZZFeatureMap`.

O conjunto de dados utilizado nos experimentos foi gerado com base em simulações, feitas pelos autores, inspiradas em dilemas sociais envolvendo múltiplos agentes. Nessas simulações, três entidades (denominadas `Police Officer 1`, `Police Officer 2` e `Police Officer 3`) assumem diferentes graus de participação em uma decisão coletiva. Cada agente contribui com uma intensidade variável de ação, representada por valores contínuos entre 0 e 1, que correspondem a graus de pertinência fuzzy. **Concretamente, para cada amostra i sorteamos $\mu^{(i)} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in [0, 1]^3$ (com seed fixa para reprodutibilidade), codificamos cada μ_j no respectivo qubit via $RY(\theta_j)$ com $\theta_j = \pi \mu_j$, executamos o circuito com S shots e estimamos $p_1 = \Pr(\text{Prisoner} = 1)$.** A saída do sistema é uma classificação linguística do comportamento coletivo, categorizada como `Muito_Baixa`, `Baixa`, `Média`, `Alta` ou `Muito_Alta`.

Ao invés de representar a presença ou ausência de um comportamento de forma binária, esses valores refletem a intensidade com que determinado agente manifesta uma determinada característica, como cooperação, alinhamento ou resistência. Por exemplo, um valor 0,75 em `Police Officer 2` pode indicar uma forte tendência de ação ou influência atribuída àquele agente em uma simulação específica.

A variável de saída `Rótulo` representa uma classificação linguística fuzzy agregada do cenário analisado, assumindo valores categóricos como `Muito_Baixa`, `Baixa`, `Média`, `Alta` e `Muito_Alta`. **Na prática, atribuímos o rótulo a partir de p_1 por discretização em cinco faixas ordenadas de igual largura no intervalo $[0, 1]$ (isto é, $[0, 0.2)$, $[0.2, 0.4)$, $[0.4, 0.6)$, $[0.6, 0.8)$, $[0.8, 1]$).** Esses rótulos são derivados dos percentuais agregados de decisão simulada, refletindo a intensidade total do comportamento coletivo.

Todos os valores de entrada já se encontram normalizados no intervalo $[0, 1]$, e os rótulos foram codificados numericamente com `LabelEncoder` para uso no classificador quântico.

3.1. Divisão e Subamostragem

O conjunto de dados foi dividido em 80% para treinamento e 20% para teste, com estratificação proporcional às classes, por meio do parâmetro `stratify` do `train_test_split`. Para padronizar os experimentos e permitir comparações di-

retas entre os diferentes feature maps testados, foi utilizada uma subamostra fixa de 500 exemplos do conjunto de treinamento para todos os modelos.

Essa subamostragem visa reduzir o custo computacional do treinamento dos circuitos quânticos variacionais e, ao mesmo tempo, garantir equilíbrio entre classes representadas.

3.2. Modelo Utilizado

Os experimentos foram conduzidos utilizando o classificador *Variational Quantum Classifier (VQC)*, disponível na biblioteca `qiskit-machine-learning`. A arquitetura do modelo foi composta por:

- **Feature Map:** foram avaliadas três estratégias de codificação — `FuzzyFeatureMap` (proposto), `PauliFeatureMap` e `ZZFeatureMap`;
- **Ansatz:** `EfficientSU2` com 3 repetições, combinando rotações e portas de emaranhamento lineares (CX);
- **Otimizador:** `SPSA` com `maxiter = 100`, robusto a ruído e adequado para otimização em espaços de parâmetros quânticos.

3.3. Critérios de Avaliação

Para comparar os diferentes métodos de codificação, utilizam-se as seguintes métricas:

- **Acurácia:** proporção de classificações corretas sobre o total de exemplos;
- **F1-score (macro):** média harmônica entre precisão e revocação, calculada uniformemente para cada classe, independentemente da frequência;
- **Tempo de Treinamento:** tempo necessário para ajuste dos parâmetros do ansatz no conjunto de treino;
- **Tempo de Predição:** tempo necessário para classificação de todos os exemplos do conjunto de teste.

Essas métricas foram escolhidas para avaliar não apenas a qualidade da predição, mas também a eficiência computacional dos modelos, considerando a aplicação prática em ambientes com recursos limitados.

4. Resultados e Discussão

Nesta seção, comparamos o desempenho do `FuzzyFeatureMap` com os métodos tradicionais `PauliFeatureMap` e `ZZFeatureMap`, utilizando o modelo VQC sobre dados fuzzy com múltiplas classes. As avaliações foram realizadas com uma subamostra de 500 exemplos para treinamento e o conjunto completo para teste, mantendo a reprodutibilidade entre os experimentos.

4.1. Comparação Quantitativa

Nos experimentos, o modelo VQC foi treinado para classificar amostras em cinco categorias linguísticas: `Muito_Baixa`, `Baixa`, `Média`, `Alta` e `Muito_Alta`. Cada entrada do modelo é composta por três valores contínuos no intervalo $[0, 1]$, representando os graus de participação fuzzy de três agentes sociais (por exemplo, o quanto cada policial é percebido como "amigável" em um cenário simulado). Esses graus de pertinência não são valores binários, mas expressam a intensidade com que cada agente manifesta determinada característica.

A saída do modelo corresponde à classificação fuzzy do comportamento coletivo resultante, nesse caso, a probabilidade subjetiva de um prisioneiro cooperar com os agentes. Por exemplo, se os três agentes forem fortemente amigáveis (valores altos de pertinência), espera-se uma alta propensão à cooperação, refletida por classes como *Alta* ou *Muito_Alta*. Assim, o objetivo da tarefa é prever corretamente essa resposta agregada, preservando a semântica gradual e a incerteza presente nos dados fuzzy de entrada.

Durante o processo de avaliação, considerou-se que o o modelo acerta quando o rótulo predito coincide com a categoria real atribuída à amostra. Como os dados são desbalanceados e a classe *Média* é predominante, o F1-score macro é particularmente importante para avaliar o desempenho geral do modelo entre todas as classes, incluindo as minoritárias.

A Tabela 1 apresenta os valores de acurácia, tempo de treinamento, tempo de predição e F1-score macro para cada feature map avaliado.

Tabela 1. Comparativo entre métodos de codificação quântica

Feature Map	Acurácia	F1-Macro	Treinamento (s)	Predição (s)
FuzzyFeatureMap	0,76	0,37	91,61	1,48
PauliFeatureMap	0,74	0,19	162,44	2,42
ZZFeatureMap	0,61	0,28	168,07	2,73

Os experimentos demonstraram que a proposta *FuzzyFeatureMap* superou os métodos tradicionais em diversos aspectos. A Tabela 1 resume os resultados obtidos para os três métodos de codificação avaliados: *FuzzyFeatureMap*, *PauliFeatureMap* e *ZZFeatureMap*.

O *FuzzyFeatureMap* obteve a maior acurácia geral (**0,76**) e o maior F1 macro (**0,37**), indicando melhor desempenho tanto em termos de predição correta quanto de balanceamento entre as classes. Além disso, o tempo de treinamento (91,61s) e de predição (1,48s) foi significativamente inferior aos métodos baseados nos feature maps do Qiskit. Isso sugere que a codificação fuzzy é capaz de representar os dados de forma mais direta e alinhada com sua estrutura semântica, ou seja, ela preserva a graduação das informações em vez de forçar uma codificação qubit a partir de dados nítidos.

O modelo treinado com *ZZFeatureMap*, apesar de apresentar a menor acurácia geral (**0,61**), obteve F1 macro de **0,28**, sugerindo uma leve vantagem na tentativa de considerar classes minoritárias. Isso pode estar relacionado ao uso de emaranhamento na codificação de entrada, que induz correlações entre qubits. No entanto, como o *ZZFeatureMap* foi desenvolvido para dados clássicos crisp, sua performance sofre quando aplicado a cenários fuzzy, onde a transição entre categorias é fluida e incerta.

Já o *PauliFeatureMap* atingiu acurácia comparável (**0,74**), mas obteve F1 macro muito inferior (**0,19**), indicando que o modelo priorizou a classe (*Média*), mas falhou em capturar a dinâmica das classes de menor frequência. Essa limitação é esperada, dado que o *PauliFeatureMap* realiza apenas rotações independentes em cada qubit, sem promover emaranhamento ou interação entre atributos.

Esses resultados destacam a importância de uma codificação compatível com a

natureza dos dados: em contextos onde há incerteza, gradualidade ou ambiguidade semântica, abordagens fuzzy-quânticas são promissoras.

4.2. Limitações Observadas

Apesar dos bons resultados, o modelo com `FuzzyFeatureMap` ainda apresentou dificuldades na classificação de classes minoritárias como `Muito_Alta` e `Muito_Baixa`, o que afetou a média macro do F1-score. Essa limitação é esperada em conjuntos de dados desbalanceados, e pode ser mitigada com técnicas de reamostragem ou ajuste de *loss-function* em trabalhos futuros. Esse comportamento também foi identificado em estudos anteriores, onde o VQC apresentou limitações ao generalizar sobre dados mais complexos ou reais [Maheshwari et al. 2021].

5. Conclusão

Este trabalho propôs uma nova abordagem de codificação para aprendizado de máquina quântico baseada em lógica fuzzy, denominada `FuzzyFeatureMap`. A proposta foi aplicada no contexto de um classificador variacional (VQC), sendo comparada com os métodos tradicionais `PauliFeatureMap` e `ZZFeatureMap` implementados na biblioteca Qiskit.

Os resultados mostraram que a `FuzzyFeatureMap` apresentou desempenho superior em termos de acurácia, macro F1-score e tempo de execução. Esse resultado reforça a hipótese de que métodos de codificação que preservam as características fuzzy dos dados são mais adequados em contextos com incertezas, gradualidade e representações linguísticas.

Além disso, observou-se que os feature maps tradicionais apresentaram dificuldades em capturar a diversidade das classes, principalmente nos casos em que os dados exibiam uma distribuição desbalanceada e semanticamente imprecisa. Esses resultados reforçam o potencial de integração entre computação quântica e inteligência computacional, especialmente em domínios sensíveis à incerteza. Estudos recentes destacam essa convergência como uma das fronteiras mais promissoras da ciência atual, tanto em termos de desafios quanto de oportunidades de inovação [Acampora et al. 2025].

5.1. Trabalhos Futuros

Como continuidade desta pesquisa, pretende-se investigar a aplicação do `FuzzyFeatureMap` em outros modelos variacionais, abrangendo tanto tarefas supervisionadas quanto não supervisionadas. Além disso, há interesse em explorar diferentes estratégias de agregação fuzzy e operadores fuzzy personalizados, a fim de representar de maneira ainda mais expressiva as nuances dos dados imprecisos.

Outro caminho promissor envolve a ampliação do uso da codificação fuzzy em arquiteturas híbridas, que integram camadas clássicas e quânticas, possibilitando maior flexibilidade na modelagem. Por fim, propõe-se analisar o impacto da codificação fuzzy em circuitos quânticos parametrizados mais profundos (*deep quantum circuits*), especialmente no contexto de técnicas de mitigação de ruído. Esses direcionamentos apontam para um campo fértil de integração entre computação quântica e inteligência computacional, com potencial para avanços significativos em cenários onde a incerteza é uma característica intrínseca dos dados.

Referências

- Acampora, G., Ambainis, A., Ares, N., Banchi, L., Bhardwaj, P., Binosi, D., Briggs, G., Calarco, T., Dunjko, V., Eisert, J., Ezratty, O., Erker, P., Fedele, F., Gil-Fuster, E., Gärttner, M., Granath, M., Heyl, M., Kerenidis, I., Klusch, M., and Wilhelm, F. (2025). Quantum computing and artificial intelligence: status and perspectives.
- Botelho, C., Buss, J., Santos, H., Lucca, G., Cruz, A., Yamin, A., and Reiser, R. (2024). Exploring social decision models through quantum fuzzy approaches. In *2024 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, pages 3025–3030.
- Cupertino, F., Giordano, V., Naso, D., and Delfine, L. (2006). Fuzzy control of a mobile robot. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 13(4):74–81.
- IBM (2024). Qiskit. Available at: <https://qiskit.org/>. Accessed: 2024-02-22.
- Klement, E. P., Mesiar, R., and Pap, E. (2000). *Triangular Norms*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.
- Maheshwari, D., Sierra-Sosa, D., and Zapirain, B. (2021). Variational quantum classifier for binary classification: Real vs synthetic dataset. volume PP, pages 1–1.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press.
- Xu, L., Meng, M. Q.-H., and Wang, K. (2007). Pulse image recognition using fuzzy neural network. In *2007 29th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 3148–3151.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353.
- Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I. *Information Sciences*, 8(3):199–249.
- Zhou, S., Zhou, Y., Liu, C., Zhu, Y., Zheng, H., Liang, D., and Wang, H. (2024). Quantum neural network for accelerated magnetic resonance imaging. In *2024 IEEE International Conference on Imaging Systems and Techniques (IST)*, pages 1–5.