# Choquet Fuzzy $n$-dimensional

**Rosana Zanotelli**[1], **Graçaliz Dimuro**[1]

[1]C3 - Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande, RS– Brazil

{rmzanotelli, gracalizdimuro}@furg.br

***Abstract.*** *In $n$-dimensional fuzzy logic, the use of additional degrees and the emphasis on information repetition, along with the Choquet integral, makes decisions more intelligent and representative. The objective of this study is to extend the fuzzy Choquet integral to the $n$-dimensional fuzzy approach, exploring a new field of research and thus enabling the development and expansion of new work techniques.*

***Resumo.*** *Na lógica fuzzy $n$-dimensional, o uso de graus adicionais e a ênfase na repetição de informações, juntamente com a integral de Choquet, tornam as decisões mais inteligentes e representativas. O objetivo deste estudo é estender a integral de Choquet fuzzy para a abordagem $n$-dimensional, explorando um novo campo de pesquisa e, assim, possibilitando o desenvolvimento e a expansão de novas técnicas de trabalho.*

## 1. Introdução

A integral de Choquet foi introduzida na década de 1950 por Gustave Choquet [Choquet 1954] e é usada na teoria da medição e análise de decisão para trabalhar com medidas não aditivas também conhecidas como capacidades, ou seja, a integral de Choquet é usada para funções mensuráveis em relação a uma capacidade, sendo amplamente usada em aplicações como, tomada de decisão [Grabisch 1996], análise de decisão de múltiplos critérios [Pelegrina et al. 2020], tomada de decisão multicritério [Bottero et al. 2018], aprendizado profundo [Dias et al. 2018] e processamento de imagens [Scott et al. 2017].

Os conjuntos fuzzy $n$-dimensional foram introduzido por [Shang et al. 2010] como uma classe especial da teoria de conjuntos $L-$fuzzy, generalizando as teorias subjacentes à lógica fuzzy e muitas outras lógicas fuzzy multivaloradas. De acordo com o Princípio de Extensão de Zadeh, a teoria dos conjuntos $L_n$-fuzzy fornece graus de liberdade adicionais que possibilitam a modelagem direta de incertezas em sistemas computacionais baseados em lógica fuzzy. Os conjuntos fuzzy $n$-dimensionais são uma extensão dos conjuntos fuzzy, onde os $n$-dimensionais são n-tuplas de números reais no intervalo em $U = [0, 1]$, ordenados em ordem crescente, chamados de intervalos $n$-dimensionais. O conjunto de intervalos $n$-dimensionais é denotado por $L_n(U)$. Conjuntos fuzzy $n$-dimensionais são amplamente utilizados em contextos onde múltiplas variáveis ou critérios estão envolvidos, como em situações de tomada de decisão, reconhecimento de padrões, inteligência artificial e mineração de dados.

Neste artigo, propomos uma nova generalização da integral de Choquet em conjunto com a abordagem $n$-dimensional, possibilitando trabalhar com as opiniões de diversos especialistas sobre um determinado atributo. Dessa forma, podemos ter um sistema com mais representatividade da realidade pois é levado em conta todos os dados fornecidos, não sendo nenhum desprezado.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Nos Preliminares, relatamos as principais características dos conjuntos fuzzy $n$-dimensionais, relações de ordem, operador de agregação e a definição da integral de Choquet. Na Seção 3, apresentamos nossos estudos com a integral de Choquet na abordagem $n$-dimensional, que chamamos de Choquet fuzzy $n$-dimensional. Como conclusão, relatamos que este trabalho ainda está em processo de conclusão, devendo realizar mais provas de algumas outras propriedades e criar um exemplo prático de aplicação onde mostra a atuação da Choquet fuzzy $n$-dimensional.

## 2. Preliminares

Nesta seção, revisaremos brevemente alguns conceitos básicos necessários para o desenvolvimento deste artigo, tanto da lógica fuzzy $n$-dimensional quanto da integral de Choquet fuzzy. As principais definições e resultados adicionais relacionados ao estudo da lógica fuzzy $n$-dimensional apresentados neste trabalho podem ser encontrados em [Bedregal et al. 2012], [Bedregal et al. 2018], [Zanotelli et al. 2020] e [Zanotelli et al. 2021]. Assim como um estudo mais detalhado da integral de Choquet fuzzy pode ser encontrado em [Lucca et al. 2015] e [Lucca et al. 2021].

### 2.1. Conjuntos fuzzy $n$-Dimensionais

Os conjuntos fuzzy $n$-dimensionais são n-uplas de números reais no intervalo unitário $U = [0, 1]$, chamados intervalos $n$-dimensionais, que são ordenados em ordem crescente e é nessas tuplas que se encontram os valores de pertinência.

Seja $\chi \neq \emptyset$, $U = [0, 1]$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. De acordo com [Shang et al. 2010], um conjunto fuzzy $n$-dimensional ($n$DFS) $A_{L_n(U)}$ é dado como

$$A_{L_n(U)} = \{(\mathbf{x}, \mu_{A_{L_n(U)}}(\mathbf{x}))\colon \forall \mathbf{x} \in \chi\}, \tag{1}$$

onde $\forall \mathbf{x} \in \chi$, $\mu_{A_{L_n(U)}}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de modo que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

Um conjunto fuzzy $n$-dimensional $A$ no universo $\chi$ também pode ser dado como

$$A_{L_n(U)} = \{(\mathbf{x}, \mu_{A1}(\mathbf{x}), \ldots, \mu_{An}(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \chi\},$$

onde todos os graus de pertinência de $A$, denotado como $\mu_{Ai} : \chi \to U$, $\forall i \in \mathbb{N}_n$ verificam a condição $\mu_{A1}(\mathbf{x}) \leq \ldots \leq \mu_{An}(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \chi$.

Em [Bedregal et al. 2011], o simplex $n$-dimensional é dado como

$$L_n(U) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in U^n : x_1 \leq \ldots \leq x_n\}, \tag{2}$$

e um elemento $\mathbf{x} \in L_n(U)$ é chamado de intervalos $n$-dimensionais. Para $i \in \mathbb{N}_n$, a $i$-th projeção de $L_n(U)$ é a função $\pi_i : L_n(U) \to U$ dada por $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

Um elemento $\mathbf{x} \in L_n(U)$ é dito degenerado se verifica a seguinte condição

$$\pi_i(\mathbf{x}) = \pi_j(\mathbf{x}), \forall i, j \in \mathbb{N}_n, \tag{3}$$

e será denotado por $/x/$, quando $x = \pi_i(\mathbf{x})$.

## 2.2. Ordens parciais em $L_n(U)$

Com base em [Bedregal et al. 2011], mostra-se os conceitos de ordens parciais baseadas em ordens lineares admissíveis.

Considerando a extensão natural da ordem usual $\leq$ de $U$ para $L_n(U)$ , então, para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n(U)$, o seguinte é válido:

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \ \Leftrightarrow \ \pi_i(\mathbf{x}) \leq_U \pi_i(\mathbf{y}), \quad \forall i \in \mathbb{N}_n. \tag{4}$$

Além disso, para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n(U)$, o supremo e o ínfimo em relação à ordem $\leq$ são dados como:

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = (\max(\pi_1(\mathbf{x}), \pi_1(\mathbf{y})), \ldots, \max(\pi_n(\mathbf{x}), \pi_n(\mathbf{y}))); \tag{5}$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (\min(\pi_1(\mathbf{x}), \pi_1(\mathbf{y})), \ldots, \min(\pi_n(\mathbf{x}), \pi_n(\mathbf{y}))). \tag{6}$$

## 2.3. Agregação em $L_n(U)$

De acordo com [Bedregal et al. 2018], uma função de agregação $n$-dimensional de aridade k ($n$-DA) $\mathcal{M} : L_n(U)^k \rightarrow L_n(U)$ é uma função que satisfaz, para todo $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k), (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k) \in L_n(U)^k$, as seguintes condições:

$\mathcal{A}1$**:** $\mathcal{M}(/0/, \ldots, /0/) = /0/$ e $\mathcal{M}(/1/, \ldots, /1/) = /1/$;
$\mathcal{A}2$**:** $\mathbf{x}_i \leq \mathbf{y}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}_k \Rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) \leq \mathcal{M}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$.

Quando $n = 1$ então $L_1(U) = U$ e portanto, cada 1-DA é uma $k$-ary função de agregação $M : U^k \rightarrow U$.

## 2.4. A integral de Choquet

A definição da integral de Choquet será mostrada abaixo, bem como os detalhes de seus componentes

### 2.4.1. Definição da integral de Choquet

A integral de Choquet é uma função de agregação que permite calcular um valor agregado a partir de uma função e uma medida não aditiva, chamada de medida de capacidade.

**Definição 1** *[Beliakov et al. 2007, Definition 1.74] Seja $m : 2^n \rightarrow U$ uma medida fuzzy. A integral discreta de Choquet é uma função $C_m : U^n \rightarrow U$ dada por:*

$$Cm(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_{(i)} - x_{(i-1)}) m(A_{(i)}) \tag{7}$$

*onde: (a)* $\mathbf{x}$ = $(x_1, \ldots, x_n)$ *é uma permutação crescente;*

*(b)* $(x_{(1)}) \leq (x_{(2)}) \leq ... \leq (x_{(n)})$ *são valores ordenados em ordem crescente;*

*(c)* $A_{(i)} = \{(i), \ldots, (n)\}$ *é o subconjunto de índices de* $n - i + 1$ *maiores componentes de* $x$*;*

*(d)* $m(A)$ *é a capacidade (ou medida fuzzy);*

*(e)* $x_{(0)} = 0$*, como convenção.*

Aplicando a operação do produto, a integral de Choquet da Eq.(7) em sua forma expandida pode ser vista como:

$$Cm(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_{(i)} m(A_{(i)}) - x_{(i-1)} m(A_{(i)})). \tag{8}$$

**Observação 1** *[Beliakov et al. 2016]: Algumas propriedades que a integral discreta de Choquet cumpre são: 1) Monotonicidade 2) Comonotonicidade 3) Idempotência; 4) Simetria.*

## 3. Choquet fuzzy $n$-Dimensional

A integral de Choquet fuzzy em conjunto com a abordagem $n$-dimensional, melhora técnicas de aprendizagem adaptativa, incluindo o desenvolvimento de modelos híbridos, permitindo algoritmos para cenários de larga escala e demanda computacional.

**Definição 2** *Seja $m : 2^n \to L_n(U)$ uma medida fuzzy $n$-dimensional. A Choquet fuzzy $n$-dimensional é uma função $C_n m : L_n(U)^n \to L_n(U)$ dada por:*

$$C_n m(\mathrm{X}) = (\sum_{i=1}^{n} ((\mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(i-1)}) m(A_{(i)}))_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} ((\mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(i-1)}) m(A_{(i)}))_n) \tag{9}$$

*onde:*

*(a) $\mathrm{X} = (\pi_1(\mathbf{x}), \ldots, \pi_n(\mathbf{x}))$ é uma permutação crescente;*

*(b) $\mathbf{x}_{(1)} \leq \mathbf{x}_{(2)} \leq ... \leq \mathbf{x}_{(n)}$ são valores ordenados em ordem crescente;*

*(c) $A_{(i)} = \{(i), \ldots, (n)\}$ é o subconjunto de índices de $n - i + 1$ dos maiores componentes de $x$;*

*(d) $m(A)$ é a capacidade (ou medida fuzzy);*

*(e) $\mathbf{x}_{(0)} = 0$, usa-se como convenção.*

A expressão da Eq.(9) pode ser representada como

$$C_n m(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} ((\pi_1(\mathbf{x}) - \pi_n(\mathbf{x})) m(A_{(i)})). \tag{10}$$

A seguir começamos a provar que as principais propriedades da integral de Choquet fuzzy podem ser satisfeitas na abordagem $n$-dimensional.

(1) Monotonicidade

Utilizada para manter a consistência lógica e interpretação prática nos sistemas que trabalham com a incerteza.

**Proposição 1** *Seja $m : 2^n \to L_n(U)$ uma medida fuzzy $n$-dimensional e $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in L_n(U)$ pode-se dizer que a Choquet fuzzy $n$-dimensional é monotônica.*

**Prova:** A Choquet fuzzy $n$-dimensional é uma função monotônica se : $\forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in L_n(U)$ sendo que $\mathrm{X} = (\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ e $\mathrm{Y} = (\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_n})$ onde $\mathbf{x_1} \leq \mathbf{y_1}, \mathbf{x_2} \leq \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{x_n} \leq \mathbf{y_n}$. □

(2) Comonotonicidade

Utilizada para garantir a linearidade, a interpretação dos dados de uma forma correta e a coerência entre as informações.

**Proposição 2** *Seja $m : 2^n \to L_n(U)$ uma medida fuzzy $n$-dimensional e $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in L_n(U)$ pode-se dizer que a Choquet fuzzy $n$-dimensional é comonotônica.*

**Prova:** Se $\mathrm{X}, \mathrm{Y} : L_n(U) \to \mathbb{R}$ são funções comonotônicas, ou seja, se $\forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in L_n(U)$ sustenta que $C_n : L_n(U)^2 \to L_n(U)$ com $\mathbf{x_1} \leq \mathbf{x_2} \leq \ldots \leq \mathbf{x_n}$ e $\mathbf{y_1} \leq \mathbf{y_2} \leq \ldots \leq \mathbf{y_n}$, assim temos que $f(\mathbf{x_1}+\mathbf{y_1}, \mathbf{x_2}+\mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{x_n}+\mathbf{y_n}) = \mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}) + \mathbf{f}(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_n})$, para todo $(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}), (\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_n}) \in L_n(U)$. □

(3) Idempotência

Utilizada para garantir que os operadores de agregação sejam consistentes e interpretáveis, preservando a unanimidade e evitando distorções quando todos os critérios tem o mesmo valor.

**Proposição 3** *Seja $m : 2^n \to L_n(U)$ uma medida fuzzy $n$-dimensional e $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in L_n(U)$ pode-se dizer que a Choquet fuzzy $n$-dimensional é idempotente.*

Seja $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in L_n(U)$ um vetor fuzzy e $\mathrm{x} \in L_n(U)$ um conjunto fuzzy $n$-dimensional, então, se todos os argumentos forem iguais, o valor da agregação também deve ser igual a esse valor, ou seja, todas as projeções coincidem ou repetem.

**Prova:** Dada a Choquet fuzzy $n$-dimensional $C_n m(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x_i} - \mathbf{x_n}) m(A_{(i)}))$, se todos os $\mathbf{x_i} = \mathbf{x}$, ou seja, $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_2} = \ldots = \mathbf{x_n}$, então $\mathrm{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

□

## 4. Conclusão

Neste trabalho a tentativa de unir a lógica fuzzy $n$-dimensional, onde usa graus adicionais e valoriza o uso da repetição das informações juntamente com a integral de Choquet faz com que as decisões sejam mais inteligentes e representativas. Como principal contribuição, a extensão do método de utilização da integral de Choquet fuzzy para a abordagem $n$-dimensional fuzzy contribui para a exploração de outros campos de pesquisa. Este trabalho ainda está em processo de conclusão, devendo realizar mais provas de algumas outras propriedades e criar um exemplo prático de aplicação onde mostra a atuação da Choquet fuzzy $n$-dimensional.

## 5. Agradecimentos

This work was partially funded by CAPES, FAPERGS/CNPq (23/2551-0001865-9) and CNPq (304118/2023-0, 407206/2023-0).

## Referências

Bedregal, B., Beliakov, G., Bustince, H., Calvo, T., Fernández, J., and Mesiar, R. (2011). A characterization theorem for t-representable $n$-dimensional triangular norms. In *Eurofuse 2011*, pages 103–112. Springer.

Bedregal, B., Beliakov, G., Bustince, H., Calvo, T., Mesiar, R., and Paternain, D. (2012). A class of fuzzy multisets with a fixed number of memberships. *Information Sciences*, 189:1–17.

Bedregal, B., Mezzomo, I., and Reiser, R. H. S. (2018). $n$-dimensional fuzzy negations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(6):3660–3672.

Beliakov, G., Pradera, A., Calvo, T., et al. (2007). *Aggregation functions: A guide for practitioners*, volume 221. Springer.

Beliakov, G., Sola, H. B., and Sánchez, T. C. (2016). *A practical guide to averaging functions*, volume 329. Springer.

Bottero, M., Ferretti, V., Figueira, J. R., Greco, S., and Roy, B. (2018). On the choquet multiple criteria preference aggregation model: Theoretical and practical insights from a real-world application. *European Journal of Operational Research*, 271(1):120–140.

Choquet, G. (1954). *Theory of capacities: research on modern potential theory and Dirichlet problem*, volume 5. University of Kansas, Department of Mathematics.

Dias, C. A., Bueno, J. C., Borges, E. N., Botelho, S. S., Dimuro, G. P., Lucca, G., Fernandéz, J., Bustince, H., and Drews Junior, P. L. J. (2018). Using the choquet integral in the pooling layer in deep learning networks. In *North american fuzzy information processing society annual conference*, pages 144–154. Springer.

Grabisch, M. (1996). The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making. *European journal of operational research*, 89(3):445–456.

Lucca, G., Borges, E. N., Berri, R. A., Emmendorfer, L., Dimuro, G. P., and Asmus, T. C. (2021). On the generalizations of the choquet integral for application in frbcs. In *Brazilian Conference on Intelligent Systems*, pages 498–513. Springer.

Lucca, G., Dimuro, G. P., Mattos, V., Bedregal, B., Bustince, H., and Sanz, J. A. (2015). A family of choquet-based non-associative aggregation functions for application in fuzzy rule-based classification systems. In *2015 IEEE international conference on fuzzy systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–8. IEEE.

Pelegrina, G. D., Duarte, L. T., Grabisch, M., and Romano, J. M. T. (2020). The multilinear model in multicriteria decision making: The case of 2-additive capacities and contributions to parameter identification. *European Journal of Operational Research*, 282(3):945–956.

Scott, G. J., Marcum, R. A., Davis, C. H., and Nivin, T. W. (2017). Fusion of deep convolutional neural networks for land cover classification of high-resolution imagery. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 14(9):1638–1642.

Shang, Y., Yuan, X., and Lee, E. (2010). The n-dimensional fuzzy sets and Zadeh fuzzy sets based on the finite valued fuzzy sets. *Computers & Mathematics with Applications*, 60(3):442 – 463.

Zanotelli, R., Reiser, R., and Bedregal, B. (2020). n-dimensional (s, n)-implications. *International Journal of Approximate Reasoning*, 126:1–26.

Zanotelli, R. M., Reiser, R. H. S., and Bedregal, B. R. C. (2021). n-dimensional fuzzy implications: analytical, algebraic and applicational approaches. In *Workshop-Escola de Informática Teórica (WEIT)*, pages 171–178. SBC.