Teoria dos Jogos aplicada à coordenação de agentes, utilizando Teoria dos Valores de Troca

Diego Rodrigues Pereira[1], **Antônio Carlos da Rocha Costa**[2]

[1]Programa de Pós-Graduação em Computação
Instituto de Informática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Caixa Postal 15064, Cep: 91501-970
Porto Alegre - RS - BRASIL
Telefone +55 (51) 3308 6161, Fax +55 (51) 3308 7308
drpereira@inf.ufrgs.br

[2]Programa de Pós-Graduação em Informática, CEPOLI
Universidade Católica de Pelotas (UCPel)
Rua Félix da Cunha 412
Telefone: +55 (53) 21288000
Cep: 96010-000 - Pelotas - RS - BRASIL
rocha@ucpel.tche.br

Abstract

The Game Theory is a field in mathematics that studies the agent's behavior in strategic situations, in which decision making affects all players involved. It provides several tools to model agent interactions in Multiagent Systems. Another tool to do this is the Exchange Values Theory, which model interactions between small groups of agents, that do services to each other. However, as the agents acts on its own and are self-interested, there are some problems to keep the exchange system in balance, requiring some regulation. In order to accomplish this, in this work we use Bayesian Games, or games with imperfect information, that allow us to represent uncertainty about the game being played. This can be represented by a probability distribution over the games. First we present a brief introduction on Game Theory's concepts that are used here and then a Exchange Values Bayesian Game model, which allow us to regulate the exchanges made by the agents, without an external agent that regulates these interactions.

Keywords: Game Theory, Bayesian Games, Exchange Values Theory, Multiagent Systems

1. Introdução

Teoria dos Jogos é um estudo matemático do comportamento de agentes em situações estratégicas, nas quais decisões de um agente afetam outros envolvidos na situação. A Ciência da Computação tem sido bastante influenciada pela Teoria dos Jogos, principalmente a área de Inteligência Artificial. Sua principal contribuição para IA é no campo dos Sistemas Multiagentes, onde o interesse é modelar interações entre agentes, e para isso a Teoria dos Jogos oferece diversas ferramentas. Uma outra ferramenta para modelar interação entre agentes é a Teoria dos Valores de Troca.

Teoria dos Valores de Troca é o nome dado às interações entre pequenos grupos de agentes, que realizam serviços uns para os outros. Para avaliar este tipo de serviço, os agentes atribuem valores à estes serviços, como por exemplo um grau de satisfação por um serviço prestado por outro agente, ou o investimento realizado na prestação de serviços. Entretanto, como os agentes agem de forma autônoma e com interesses próprios, existem dificuldades em se manter o sistema de trocas em equilíbrio, se fazendo necessária uma certa regulação. Para tal, neste artigo é utilizado um ramo da teoria dos jogos, os Jogos

Bayesianos.

Jogos Bayesianos ou jogos de informação incompleta, permitem que se represente a incerteza sobre o próprio jogo que está sendo jogado. Esta incerteza é representada como uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto de jogos possíveis.

Neste artigo é apresentado um modelo de Jogo Bayesiano dos Valores de Troca que fornece uma forma de regulação entre as trocas realizadas entre os agentes, sem o auxílio de um agente externo que regule essas interações.

O artigo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 apresenta-se os principais conceitos de Teoria dos Jogos, que serão utilizados neste artigo; na Seção 3 é apresentado o conceito de jogo Bayesiano; na Seção 4 é apresentado o conceito das Trocas Sociais; na Seção 5 apresenta-se o modelo do jogo Bayesiano utilizando os Valores de Troca; e por fim na Seção 6 apresentam-se as considerações finais e trabalhos futuros.

2. Teoria dos Jogos

2.1. Introdução

A Teoria dos Jogos [7] pode ser vista como um estudo matemático da interação entre agentes independentes e com interesses próprios. A teoria é usualmente aplicada a economia, ciência política, biologia, psicologia, linguística e ciência da computação. Neste artigo será utilizado o ramo dominate da Teoria dos Jogos, chamado teoria dos jogos não-cooperativa [7], especificamente jogos na forma normal. Apesar de se chamar de teoria dos jogos não-cooperativa, esta teoria não se aplica apenas a situações onde os objetivos dos agentes são conflitantes.

No caso de agentes cooperativos, existe a teoria dos jogos coalizacional [8]. A principal diferença entre os dois é que na teoria dos jogos não-cooperativa um indivíduo é modelado (suas crenças, preferências e ações possíveis) enquanto que na teoria dos jogos coalizacional um grupo de indivíduos é modelado.

2.2. Agentes com interesses próprios

Um agente com interesses próprios possui uma descrição própria dos estados do mundo (ou do ambiente onde está inserido) que ele gosta, o que pode incluir o bem estar dos outros agentes, e deve agir para alcançar estes estados do mundo. Para modelar tais interesses a abordagem dominate é a teoria da utilidade [9].

Esta abordagem tenta quantificar o grau de preferência do agente entre as opções disponíveis, e tenta entender como estas preferências mudam quando um agente encontra incerteza no momento de receber uma alternativa. Para isto o agente utiliza uma função de utilidade, que irá influenciar como o agente toma decisões sobre o que fazer. As funções de utilidade são uma base para se entender a teoria da preferência e uma ação racional, items que compõem a teoria dos jogos.

Uma função de utilidade mapeia estados do mundo em números reais. Tais números medem o grau de satisfação do agente naqueles estados. Se o agente não tem certeza do estado em que se encontra, então temos uma utilidade esperada, em função de uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto de estados do mundo.

2.3. Jogos na forma normal

A idéia de utilidade é baseada no conceito de preferência derivada da teoria das preferências de von Neumann e Morgenstern [9]. Esta teoria é apresentada em [8], onde os conceitos principais (axiomas e provas) são apresentados e discutidos.

De acordo com a teoria da utilidade (e a teoria das preferências), agentes racionais sempre terão valores esperados em suas funções de utilidade que eles desejam maximizar. Portanto o conceito de agir de forma ótima em um ambiente é simples, desde que os resultados e as probabilidades envolvidas sejam conhecidas e possam ser representadas. Os agentes escolherão as ações que maximizam sua utilidade esperada. Entretanto a complexidade de se tomar decisões em tais ambientes aumenta quando existem dois ou mais agentes maximizadores de utilidade, que possuem ações que influenciam na utilidade um do outro. Para analisar tais casos utilizamos a teoria dos jogos.

2.4. Definição de jogos na forma normal

A forma normal, conhecida também por forma estratégica, é uma forma familiar de representar interações entre agentes na teoria dos jogos. Um jogo representado nesta forma apresenta todas as utilidades dos agentes em todos os estados do mundo, no caso especial onde os estados do mundo dependem somente da combinação de ações dos agentes. Abaixo, temos a definição de um jogo na forma normal como visto em [7]:

Definição 2.1 *Um jogo (finito, com n-jogadores) na forma normal é uma tupla (N, A, u), onde:*

- *N é um número finito de agentes, indexados por i;*
- *$A = A_1 \times \ldots \times A_n$, onde A_i é um conjunto finito de ações disponíveis para o jogador i. Cada vetor $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ é chamado de perfil de ação;*
- *$u = (u_1, \ldots, u_n)$ onde $u_i : A \mapsto \mathbb{R}$ é uma função de utilidade (ou de recompensa) com valores reais para o jogador i.*

De maneira geral, estes jogos podem ser representados com uma matriz de n dimensões. Cada linha corresponde a ações possíveis para o jogador 1, cada coluna corresponde a ações possíveis para o jogador 2, e cada célula corresponde a um possível resultado do jogo. Em cada uma das células é escrito a utilidade de cada jogador para aquele resultado, sendo o primeiro número a utilidade do jogador 1. Esta representação pode ser vista no exemplo da seção 2.4.1 a seguir.

2.4.1. Exemplo: Dilema do prisioneiro: Um exemplo clássico utilizado para se entender teoria dos jogos é o Dilema do Prisioneiro. O nome deriva de uma estória de dois prisioneiros suspeitos de um crime. Eles são levados a salas de interrogatório separadas, e cada um deles pode cooperar ou negar (*deny* no original em inglês) o crime. Os valores negativos podem ser interpretados como valores absolutos em anos na prisão.

Os resultados possíveis são os seguintes: se os dois prisioneiros cooperarem eles apenas ficariam um ano na prisão, situação representada pela célula (C, C), com a primeira ação sendo do jogador 1 e a segunda do jogador 2. Se os dois negarem a participação no crime (ou se negarem a cooperar) os dois pegariam sentenças moderadas de três anos, como pode ser visto na célula (D, D). Mas se um deles optar por cooperar e o outro não temos as situações das células (C, D) e (D, C): o prisioneiro que cooperou fica livre (nenhum ano na cadeia) e o outro ficaria quatro anos. A matriz completa de resultados pode ser vista na Figura 1(a).

Os valores das utilidades dos jogadores no exemplo do Dilema do Prisioneiro podem ser generalizados, pois a essência do jogo não mudaria caso a recompensa de -4 fosse substituída por -5, ou se fossem adicionados 50 a todas as recompensas. Em sua forma mais geral, o Dilema do Prisioneiro é qualquer jogo como o mostrado na Figura 1(b) em que $c > a > d > b$.

	C	D
C	$-1, -1$	$-4, 0$
D	$0, -4$	$-3, -3$

(a)

	C	D
C	a, a	b, c
D	c, b	d, d

(b)

Figura 1. (a) Dilema do Prisioneiro; (b) Forma geral do Dilema do Prisioneiro

2.5. Jogos de Recompensa Comum

Os jogos na forma normal possuem algumas classes restritas que merecem uma atenção. A primeira é a classe de Jogos de Recompensa Comum (*Common-Payoff Games*) [7]. Nestes jogos, para todos os perfis de estratégia, todos os jogadores recebem a mesma recompensa.

Definição 2.2 *Um jogo de recompensa comum é um jogo no qual todos os perfis de estratégia* $a \in A_1 \times \ldots \times A_n$ *e qualquer par de agentes* i, j, *possuem* $u_i(a) = u_j(a)$.

Jogos de recompensa comum também são chamados de jogos de coordenação pura ou jogos de times. Em tais jogos os agentes não tem interesses conflitantes; seu único desafio é coordenar ações que maximizem a utilidade de todos.

Como exemplo podemos imaginar dois motoristas que dirigem em uma estrada um ao encontro do outro. Tal rodovia não tem regras sobre qual lado se deve dirigir, por isso os motoristas devem decidir se dirigem no lado esquerdo ou no lado direito da pista. Se escolherem o mesmo lado recebem uma grande utilidade. Se não coordenarem as suas ações eles recebem uma baixa utilidade. A Figura 2 mostra a matriz de recompensas para os dois jogadores.

	Esquerda	Direita
Esquerda	5,5	0,0
Direita	0,0	5,5

Figura 2. Jogo de Coordenação

2.6. Jogos de Soma Zero

Um outro caso especial a ser considerado nos jogos na forma normal, são os Jogos de Soma Zero (*Zero-Sum Games*) [7]:, que também podem ser chamados de jogos de soma constante. Diferentemente dos jogos de recompensa comum, jogos de soma constante são mais significativos no contexto de jogos com dois jogadores.

Definição 2.3 *Um jogo de dois jogadores na forma normal é dito de soma constante se existe uma constante c tal que para cada perfil de estratégia* $a \in A_1 \times A_2$ *é verdade que* $u_1(a) + u_2(a) = c$.

Quando assumirmos que $c = 0$ temos então um jogo de soma zero. Se jogos de recompensa comum representam jogos de pura coordenação, jogos de soma zero representam pura competição, pois temos que o ganho de um jogador deriva diretamente da derrota do outro jogador. Um exemplo clássico de jogo de soma zero é o Cara ou Coroa (*Matching Pennies*). Neste jogo cada jogador tem uma moeda, e independentemente escolhe cara ou coroa. Se as duas moedas caem iguais (as duas em cara ou as duas em coroa) o jogador 1 ganha as duas moedas, senão o jogador 2 leva as duas. A matriz de recompensa pode ser vista na Figura 3.

	Cara	Coroa
Cara	1,-1	-1,1
Coroa	-1,1	1,-1

Figura 3. Jogo de Cara ou Coroa

2.7. Estratégias e Equilíbrios

2.7.1. Estratégias: Foram definidas até agora apenas as ações disponíveis para cada jogador do jogos, portanto a seguir serão definidos seu conjunto de estratégias. Um tipo de estratégia seria escolher uma ação e jogá-la. Tal estratégia é chamada estratégia pura. Chama-se a escolha de uma estratégia pura para cada agente de perfil de estratégia pura.

Jogadores podem ainda escolher ações aleatórias, dentre as suas disponíveis. Tal estratégia é chamada de estratégia mista. Todas as definições a seguir podem ser vistas em [7]

Define-se uma estratégia mista para um jogo na forma normal a seguir.

Definição 2.4 ***(Estratégia Mista).*** *Seja (N, A, u) um jogo na forma normal, e para qualquer conjunto X seja $\Pi(X)$ o conjunto de distribuições de probabilidades sobre X. Então o conjunto de estratégias mistas para o jogador i é $S_i = \Pi(A)$.*

Definição 2.5 ***(Perfil de Estratégia Mista).*** *O conjunto de perfis de estratégia mista é o produto cartesiano dos conjuntos individuais de estratégias mistas, $S_1, \times \ldots \times S_n$.*

Por $s_i(a_i)$ denota-se a probabilidade de uma ação a_i ser jogada no perfil de estratégia mista s_i. O subconjunto de ações que possuem uma probabilidade positiva na estratégia mista s_i é chamado de suporte de s_i.

Definição 2.6 ***(Suporte).*** *O suporte de uma estratégia mista s_i para o jogador i é o conjunto de estratégias puras $a_i | s_i(a_i)$.*

2.7.2. Equilíbrios: Nesta seção serão definidos os conceitos de solução de um jogo, como a melhor resposta e o equilíbrio de Nash, vistos em [7].

Um dos mais influentes conceitos de solução em Teoria dos Jogos é o Equilíbrio de Nash. Mas primeiro é necessário definir o conceito de melhor resposta.

Definição 2.7 ***(Melhor Resposta).*** *A melhor resposta do jogador i para o perfil de estratégia s_{-i} é a estratégia mista $s_i^* \in S_i$ tal que $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq (s_i, s_{-i})$ para todas as estratégias $s_i \in S_i$*

Sendo que $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ é um perfil de estratégia s sem a estratégia do agente i.

De maneira geral um agente não saberá qual as estratégias que seu oponente irá escolher. Portanto o conceito de melhor resposta não é um conceito de solução. Mas podemos utilizar o conceito de melhor resposta para formular a definição de Equilíbrio de Nash.

Definição 2.8 ***(Equilíbrio de Nash).*** *Um perfil de estratégia $s = (s_1, \ldots, s_n)$ é um equilíbrio de Nash se, para todos os agentes i, s_i é a melhor resposta para s_{-i}.*

O equilíbrio de Nash é um perfil de estratégia estável: nenhum agente irá trocar a sua estratégia mesmo que conheça a estratégia e seus oponentes.

Existe ainda o teorema, formulado por John Nash [3] que garante que todos os jogos com um número finito de jogadores e perfis de ação tem pelo menos um equilíbrio de Nash. A prova deste teorema pode ser vista em [8].

3. Jogos Bayesianos

3.1. Introdução

Todas as formas de jogos apresentados até agora assumiam que os jogadores sabiam que jogo estava sendo jogado, quantos jogadores estavam envolvidos, as ações disponíveis para eles, bem como suas recompensas. Até mesmo em jogos de informação imperfeita [7], em que as ações jogadas pelos agentes não são conhecidas, mas o jogo que eles estão jogando sim.

Mas em Jogos Bayesianos [7, 8], ou jogos de informação incompleta, permitem que se represente a incerteza sobre o próprio jogo que está sendo jogado. Esta incerteza é representada como uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto de jogos possíveis.

Para jogos Bayesianos são feitas duas restrições: Primeiro, todos os jogos têm o mesmo número de agentes e o mesmo espaço de estratégias; eles apenas diferem em suas recompensas. Segundo, as crenças dos agentes são probabilidades a posteriori obtidas ao se condicionar uma probabilidade a priori para cada agente.

A primeira restrição parece ser muito forte, pois pode-se imaginar diversos tipos de incertezas que os jogadores poderiam enfrentar em um jogo:

- Número de jogadores envolvidos;
- Quais as ações disponíveis para cada agente;
- As recompensas envolvidas para cada a perfil de ação;

Entretanto, todos os tipos de incertezas em Jogos Bayesianos podem ser reduzidas a incertezas sobre as recompensas, através da formulação do problema.

Por exemplo, se quer modelar uma situação onde haja incerteza sobre o número de ações disponíveis para outros jogadores. Pode-se reduzir esta incerteza apenas retirando ações irrelevantes.

Considere o jogo da Figura 4, com dois jogadores onde o jogador da linha não sabe se seu oponente tem apenas duas estratégias E (esquerda) e D (direita) ou se tem uma terceira C (centro). Se considerarmos trocar o jogo à esquerda, o menor por uma versão a seguir na Figura 5, adicionando uma nova coluna C

	E	D
E	1, 1	1,3
D	0, 5	1, 13

	E	C	D
E	1, 1	0, 2	1, 3
D	0,5	2, 8	1, 13

Figura 4. Exemplo de redução de incerteza

	E	C	D
E	1, 1	0, -100	1, 3
D	0,5	2, -100	1, 13

Figura 5. Nova coluna central

Claramente a coluna central é dominada pelas outras duas, e não participa de nenhum equilíbrio de Nash (ou qualquer outro conceito de solução). Como há um isomorfismo entre as duas versões a incerteza sobre o conjunto de ações pode ser reduzida à incerteza sobre recompensas. De forma similar, outras incertezas sobre os jogos podem ser reduzidas à incertezas sobre as recompensas.

A segunda restrição sobre jogos Bayesianos é a suposição de uma probabilidade a priori comum. Como um jogo Bayesiano define não somente incertezas dos agentes sobre jogo a ser jogado, mas suas crenças sobre as crenças dos agentes sobre o jogo a ser jogado, formando uma hierarquia infinita de crenças aninhadas. A suposição de uma probabilidade a priori é válida e limita o escopo de aplicabilidade.

3.2. Definições

Existem diversas formas de apresentar jogos Bayesianos, nesta seção apresenta-se duas que serão utilizadas, como visto em [7].

3.2.1. Conjuntos de Informação: A primeira definição que será apresentada é baseada em conjuntos de informação. Nesta definição, um jogo Bayesiano consiste de um conjunto de jogos que diferem somente em suas recompensas, com um distribuição de probabilidade a priori definida sobre eles, e uma estrutura de partição sobre os jogos para cada agente.

Definição 3.1 *Um jogo Bayesiano é um tupla* (N, G, P, I)*, onde:*

- N *é o conjunto de agentes;*
- G *é um conjunto de jogos com* N *agentes cada, tal que* $g, g' \in G$ *então para cada agente* $i \in N$ *o espaço de estratégias em* g *é idêntico ao espaço de estratégias em* g'*;*
- $P \in \Pi(G)$ *é uma distribuição de probabilidade a priori sobre os jogos, onde* $\Pi(G)$ *é o conjunto de todas as distribuições de probabilidades sobre G; e*
- $I = (I_1, \ldots, I_N)$ *é uma tupla de partições de G, uma para cada agente.*

A Figura 6 é um exemplo de um jogo Bayesiano. É formado de quatro jogos 2×2 (Cara ou Coroa, Dilema do Prisioneiro, Coordenação e Batalha dos Sexos), e cada partição dos agentes consiste de duas classes equivalentes.

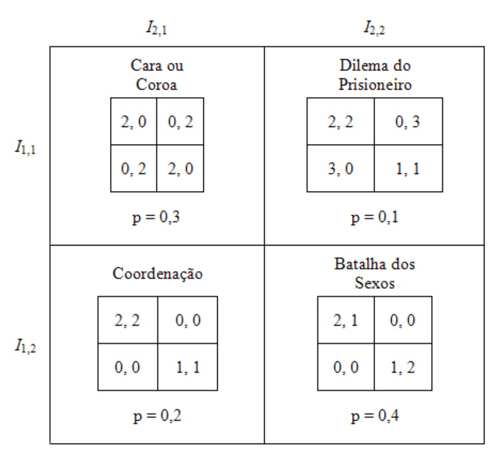

Figura 6. Um jogo Bayesiano

3.2.2. Tipos Epistêmicos: Um jogo Bayesiano é um jogo definido por um conjunto de jogadores, ações e funções de utilidade. Na definição anterior, os agentes não tinham certeza sobre qual jogo estavam jogando, entretanto, cada jogo possível tem o mesmo conjunto de de ações e jogadores, e portanto os agentes apenas não tinham certeza sobre a função de utilidade.

Nesta definição é utilizado a noção de um tipo epistêmico (*epistemic type*), ou simplesmente tipo, como uma forma de se definir incerteza diretamente sobre a função de utilidade do jogo.

Definição 3.2 *Um jogo Bayesiano é uma tupla* (N, A, Θ, p, u) *onde:*

- N *é um conjunto de agentes;*
- $A = A_1 \times \ldots \times A_n$*, onde* A_i *é um conjunto finito de ações disponíveis para o jogador i;*
- $\Theta = \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_n$*, onde* Θ_i *é o espaço de tipos do jogador i;*
- $p : \Theta \mapsto [0, 1]$ *é uma distribuição de probabilidade a priori comum sobre os tipos; e*
- $u = (u_1 \times \ldots \times u_n)$*, onde* $u_i : A \times \Theta \mapsto \mathbb{R}$ *é a função de utilidade para o jogador i.*

Todos os jogadores conhecem a descrição acima (é de conhecimento comum) e, cada agente conhece seu próprio tipo. Em geral a noção de tipo do agente contém toda a informação que um agente possui e não é de conhecimento comum. Normalmente isto inclui seu conhecimento de sua função de utilidade, por exemplo, mas pode incluir suas crenças sobre as recompensas dos outros agentes, sobre as crenças deles sobre sua própria função de utilidade ou outras crenças.

Para exemplificar melhor o conceito de tipos, considere o exemplo da Figura 6. Para cada agente temos dois tipos, que correspondem aos seu dois conjuntos de informação. As ações do jogador 1 são C e B e do jogador 2 são E e D. Denota-se o tipo do agente 1 $\theta_{1,1}$ e $\theta_{1,2}$ e do agente 2 $\theta_{2,1}$ e $\theta_{2,2}$. A distribuição conjunta destes tipos é a seguinte: $p : (\theta_{1,1}, \theta_{2,1}) = .3$, $p : (\theta_{1,1}, \theta_{2,2}) = .1$, $p : (\theta_{1,2}, \theta_{2,1}) = .2$, $p : (\theta_{1,2}, \theta_{2,2}) = .4$. As probabilidades para o primeiro jogador são $p(\theta_{2,1}|\theta_{1,1}) = 3/4$, $p(\theta_{2,2}|\theta_{1,1}) = 1/4$, $p(\theta_{2,1}|\theta_{1,2}) = 1/3$ e $p(\theta_{2,2}|\theta_{1,2}) = 2/3$. As funções de utilidades de ambos agentes são dadas na Figura 7.

3.3. Estratégias e Equilíbrios

Para planejar estratégias e equilíbrios sobre os jogos Bayesianos, utiliza-se os tipos espistêmicos, pois esta definição é a mais utilizada em projeto de mecanismos (*mechanism design*), uma das aplicações de jogos Bayesianos.

Primeiramente deve se definir o espaço de estratégias em um jogo Bayesiano. Em jogos de informação imperfeita, na forma extensiva, uma estratégia pura é um mapeamento de conjuntos de informação para ações. A definição é similar em jogos Bayesianos: uma estratégia pura $\alpha_i : \Theta_i \mapsto A_i$ é um mapeamento de de todos os tipos que o agente i poderia ter para ações que ele jogaria se tivesse aquele tipo. Pode se definir então estratégias mistas de uma forma natural, como distribuições de probabilidades sobre estratégias puras. Denota-se uma estratégia mista para i como $s_i \in S_i$, onde S_i é o conjunto de todas as estratégias mistas de i. A notação $s_j(a_j|\theta_j)$ é usada para denotar a probabilidade sobre a estratégia mista s_j que o agente j joga a ação a_j, dado que o tipo de j é θ_j.

Como tem-se um ambiente com diversas fontes de incerteza, deve-se considerar como calcular a utilidade esperada do agente. No cenário de jogos Bayesianos, existem três noções de utilidade esperada a serem consideradas: *ex post*, *ex interim,* e *ex ante*. A primeira é computada baseada nos tipos verdadeiros dos agentes, o segundo considera que o agente sabe seu tipo mas não sabe o tipo dos outros jogadores e no terceiro o agente não sabe o seu tipo e nem o do outro agente. Todas estas utilidades podem ser vistas também em [7]

Definição 3.3 ***Utilidade esperada* Ex post**. *A utilidade* ex post *de um agente em um jogo Bayesiano* (N, A, Θ, p, u)*, onde as estratégias dos agentes são dadas por* s *e os tipos dos agentes são dados por* θ*, é definida como*

$$EU_i(s, \theta) = \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} s_j(a_j|\theta_j) \right) u_i(a, \theta)$$

Neste caso, a única incerteza é sobre a estratégia mista do outro agente, pois a utilidade *ex post* do agente i é computada nos tipos reais dos agentes. No caso dos jogos Bayesianos o agente não irá saber o tipo dos outros agentes, mas esta definição será utilizada para definir os outros dois tipos de utilidade espearada.

Definição 3.4 ***Utilidade esperada* Ex interim**. *A utilidade* ex interim *de um agente em um jogo Bayesiano* (N, A, Θ, p, u)*, onde* θ_i *é o tipo do agente i e as estratégias dos agentes são dadas pelo perfil de estratégia mista s, é definida como*

$$EU_i(s, \theta_i) =$$

$$\sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p(\theta_{-i}|\theta_i) \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} s_j(a_j|\theta_j) \right) u_i(a, \theta_{-i}, \theta_i)$$

ou de forma equivalente como

a_1	a_2	θ_1	θ_2	u_1	u_2
C	E	$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,1}$	2	0
C	E	$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,2}$	2	2
C	E	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,1}$	2	2
C	E	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,2}$	2	1
C	D	$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,1}$	0	2
C	D	$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,2}$	0	3
C	D	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,1}$	0	0
C	D	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,2}$	0	0

a_1	a_2	θ_1	θ_2	u_1	u_2
B	E	$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,1}$	0	2
B	E	$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,2}$	3	0
B	E	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,1}$	0	0
B	E	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,2}$	0	0
B	D	$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,1}$	2	0
B	D	$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,2}$	1	1
B	D	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,1}$	1	1
B	D	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,2}$	1	2

Figura 7. Funções de utilidade u_1 e u_2 para o jogo Bayesiano da Figura 6

$$EU_i(s,\theta_i) = \sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}} p(\theta_{-i}|\theta_i) EU_i(s,(\theta_{-i},\theta_i))$$

Portanto, i deve considerar todas as possibilidades de tipo para os outros agentes θ_{-i} e cada perfil de ação pura a para avaliar a sua função de utilidade $u_i(a,\theta_i,\theta_{-i})$. Ele deve pesar a sua utilidade por duas medidas: a probabilidade dos tipos do outro agente serem θ_{-i} dado que seu tipo é θ_i, e a probabilidade que o perfil de ação pura a seja escolhido dado todas as estratégias mistas e tipo. Como a incerteza sobre estratégias mistas foi definida no caso *ex post*, pode se definir a utilidade *ex interim* como uma soma ponderada de $EU_i(s,\theta)$ termos.

Por fim, existe o caso *ex ante*, onde a utilidade esperada de i é calculada sobre o conjunto de estratégias mistas s sem se observar os tipos dos agentes.

Definição 3.5 ***Utilidade esperada* Ex ante**. *A utilidade* ex interim *de um agente em um jogo Bayesiano (N,A,Θ,p,u), onde as estratégias dos agentes são dadas pelo perfil de estratégia mista s, é definida como*

$$EU_i(s) = \sum_{\theta\in\Theta} p(\theta) \sum_{a\in A} \left(\prod_{j\in N} s_j(a_j|\theta_j) \right) u_i(a,\theta)$$

.

ou de forma equivalente como

$$EU_i(s) = \sum_{\theta\in\Theta} p(\theta) EU_i(s,\theta)$$

ou novamente como

$$EU_i(s) = \sum_{\theta_i\Theta_i} p(\theta_i) EU_i(s,\theta_i)$$

A seguir é definida a melhor resposta

Definição 3.6 ***(Melhor resposta em um jogo Bayesiano)***. *O conjunto de melhores respostas do agente i para um perfil de estratégia mista s_{-i} é dado por*

$$BR_i(s_{-i}) = \arg\max_{s'_i\in S_i} EU_i(s'_i, s_{-i})$$

.

Note que BR_i é um conjunto, pois podem existir diversas estratégias para i que tenham a mesma utilidade esperada. O cálculo da BR_i é uma maximização independente da utilidade esperada *ex interim* de i condicionada por cada tipo que ele poderia ter.

A seguir é definido o equilíbrio *Bayes-Nash*.

Definição 3.7 ***(Equilíbrio de Bayes-Nash)***. *Um equilíbrio de Bayes-Nash é o perfil de estratégia mista s que satisfaz $\forall i\ s_i \in BR_i(s_{-i})$.*

Esta é a definição de equilíbrio de Nash do Capítulo 2. Cada agente joga a melhor resposta para as estratégias dos outros jogadores. A diferença desta definição para a de equilíbrio de Nash é que este conceito de equilíbrio Bayes-Nash é construído em cima das definições de jogos Bayesianos de melhor resposta e utilidade esperada.

Para que um agente i possa jogar a melhor resposta para os outros agentes $-i$, i deve saber que estratégia cada agente jogaria se fosse de um determinado tipo.

3.4. Calculando Equilíbrios

A fim de se calcular os equilíbrios de Bayes-Nash, podemos construir uma representação na forma normal que corresponde a uma jogo Bayesiano.

Como foi feito com jogos na forma extensiva, a forma normal induzida para jogos Bayesianos tem uma ação para cada estratégia pura. Isto é, as ações para um agente i são mapeamentos distintos de Θ_i para A_i. Cada recompensa de i dado o perfil de estratégia pura s é sua utilidade esperada *ex ante* sobre s. Então um equilíbrio de Bayes-Nash de um jogo Bayesiano é exatamente um equilíbrio de Nash em sua forma induzida. Isto possibilita a aplicação do teorema de Nash sobre jogos Bayesianos, e portanto um equilíbrio de Bayes-Nash sempre existe.

Considere o exemplo seguinte, utilizando o jogo apresentado na Figura 6. Note que neste jogo cada agente possui quatro estratégias puras possíveis (dois tipos e duas ações). Então as estratégias do jogador 1 podem ser chamadas de CC,CB,BC e BB. UU significa que o agente 1 escolhe U independente de seu tipo, UD significa que ele escolhe U se seu tipo for $\theta_{1,1}$ e D se seu tipo for $\theta_{1,2}$ e assim por diante. De forma similar definimos as estratégias para o jogador 2 no jogo Bayesiano como EE,ED,DE e DD.

Um jogo 4×4 na forma normal pode ser definido, no qual estas 4 estratégias dos dois agentes, e suas recompensas são as recompensas esperadas nos jogos individuais, dadas suas crenças na distribuição de probabilidade a priori inicial. Por exemplo a utilidade esperada *ex ante* do jogador 2 sobre o perfil de estratégia (UU, LL) é calculado da seguinte forma:

$$u_2(UU, LL) = \sum_{\theta \in \Theta} p(\theta) u_2(U, L, \theta)$$

$$= p(\theta_{1,1}, \theta_{2,1}) u(U, L, \theta_{1,1}, \theta_{2,1})$$

$$+ p(\theta_{1,1}, \theta_{2,2}) u(U, L, \theta_{1,1}, \theta_{2,2})$$

$$+ p(\theta_{1,2}, \theta_{2,1}) u(U, L, \theta_{1,2}, \theta_{2,1})$$

$$+ p(\theta_{1,2}, \theta_{2,2}) u(U, L, \theta_{1,2}, \theta_{2,2})$$

$$= 0.3(0) + 0.1(2) + 0.4(1) = 1$$

Continuando desta forma, a matriz de recompensa completa pode ser construída como indicado na Figura 8.

	EE	ED	DE	DD
CC	$2, 1$	$1, 0.7$	$1, 1.12$	$0, 0.9$
CB	$0.8, 0.2$	$1, 1.1$	$0.4, 1$	$0.6, 1.9$
BC	$1.5, 1.4$	$0.5, 1.1$	$1.7, 0.4$	$0.7, 0.1$
BB	$0.3, 0.6$	$0.5, 1.5$	$1.1, 0.2$	$1.3, 1.1$

Figura 8. Forma normal induzida do jogo da Figura 6

Com esta matriz de recompensa, o jogo pode ser analisado de forma direta. Podemos determinar que a resposta do jogador 1 para a estratégia do oponente DE é BC.

Se o agente obtiver algum sinal (uma observação do estado do outro agente), ele pode computar as probabilidades a posteriori e recomputar a utilidade esperada de qualquer vetor de estratégias. Portanto se o agente linha (jogador 1) receber o sinal $\theta_{1,1}$ (significando que ele é do tipo 1), ele pode atualizar as recompensas esperadas e computar o novo jogo mostrado na Figura 9.

	EE	ED	DE	DD
CC	$2, 0.5$	$1.5, 0.75$	$0.5, 2$	$0, 2.25$
CB	$2, 0.5$	$1.5, 0.75$	$0.5, 2$	$0, 2.25$
BC	$0.75, 1.5$	$0.25, 1.75$	$2.25, 0$	$1.75, 0.25$
BB	$0.75, 1.5$	$0.25, 1.75$	$2.25, 0$	$1.75, 0.25$

Figura 9. Jogo na forma normal induzida *ex interim*, onde o jogador 1 observa o tipo $\theta_{1,1}$

Note que para o jogador linha, BC ainda é a melhor resposta para DE, o que mudou foi o quanto esta estratégia é melhor que as outras três.

Esta matriz de recompensas pode ser utilizada para encontrar as melhores respostas do jogador 1, mas pode não ter sentido em se analisar os equilíbrios de Nash nesta matriz. Isto é devido ao fato de que tal matriz não é de conhecimento comum, pois se o jogador coluna receber um sinal diferente, ele chegaria a um número diferente de valores (apesar de suas melhores respostas ficarem preservadas).

3.5. Equilíbrio *Ex Post*

Ao se utilizar as utilidades *ex post*, pode se definir um conceito de equilíbrio que é mais forte que o equilíbrio de Bayes-Nash.

Definição 3.8 *(**Equilíbrio** Ex post). Um equilíbrio* ex post *é um perfil de estratégia mista s que satisfaz $\forall\theta$, $\forall i$, $s_i \in argmax_{s'_i \in S_i} EU_i(s'_i, s_{-i}, \theta)$.*

Nesta definição os agente não conhecem os tipos dos outros agentes. Na verdade ela diz que os agente não desviam de sua estratégia mista mesmo que conhecem todos os tipos (o vetor θ). Esta forma de equilíbrio é interessante, pois não é afetada pelas distribuições probabilidades de tipos $p(\theta)$. Pode se dizer que um equilíbrio *ex post* não requer que um agente acredite que os outros agentes tenham crenças precisas sobre sua própria distribuição de tipo. A princípio um equilíbrio de Bayes-Nash assume que isto é verdade. O equilíbrio *ex post* é similar ao equilíbrio em estratégias dominantes, que não requerem que os agentes acreditem que os outros agentes ajam de forma racional.

4. Teoria dos valores de Troca

4.1. Introdução

Trocas Sociais é o nome dado às interações entre pequenos grupos de agentes, que realizam serviços uns para os outros. Para avaliar este tipo de serviço, os agentes atribuem valores à estes serviços, como por exemplo um grau de satisfação por um serviço prestado por outro agente, ou o investimento realizado na prestação de serviços. Esta abordagem foi introduzida pela Teoria das Trocas Sociais de Piaget [6].

4.2. Valores de Trocas Sociais

Valores de Troca [6] dão origem a uma economia qualitativa para avaliar trocas sociais, onde os envolvidos nas trocas obtém créditos por serviços prestados a outros, e débitos por serviços recebidos de outros. Os saldos destas trocas de valores permitem aos indivíduos encontrarem um estado de equilíbrio das trocas sociais realizadas, e tomarem uma decisão sobre o que fazer. Valores de troca qualitativos englobam valores econômicos de algum tipo (geralmente quantitativos) e são vistos como base para regras sociais.

Regras sociais podem ser de vários tipos (formal ou informal, moral, econômica etc.) e podem ser vistas como uma maneira de manter o saldo geral dos valores de troca, a fim de alcançar um determinado estado (equilibrado, favorável para um ou mais indivíduos, etc.), e portanto mantendo os indivíduos motivados (ou obrigados) a continuar participando destas trocas.

Valores de trocas materiais e virtuais são classificados por Piaget [6] em duas categorias mais amplas: trocas imediatas e trocas futuras. Nas trocas imediatas, os agentes trocam serviços de maneira imediata, serviço por serviço, para que seja possível avaliar tais serviços de forma imediata, enquanto os serviços estão sendo prestados, permitindo assim, que cada agente possa regular a quantidade e a qualidade do serviço que ele presta a outro agente (da mesma maneira que pessoas trocam bens materiais, negociando que bem irá entrar na troca). Dois tipos de valores estão associados a este tipo de troca imediata, que correspondem ao investimento necessário para se realizar um serviço para outro agente, e a satisfação que tal serviço proporcionou ao agente que recebeu o serviço. Tais valores são chamados de valores materiais de troca.

No caso das trocas futuras existe uma separação de tempo entre os estágios de uma troca de serviços, dando origem aos valores de troca virtuais, englobando créditos e débitos: quando um agente executa um serviço para outro, ele recebe um crédito por tal serviço, e o outro recebe um débito por ter recebido tal serviço deve pagar este débito em algum futuro. O termo virtual se refere exatamente ao fato de que tal valor ainda não existe e será pago em algum momento no futuro. Por exemplo se alguém empresta um livro para outra pessoa, o correto seria, em princípio, esta pessoa devolver o livro para a pessoa, em um futuro não muito distante.

4.3. Estrutura das Trocas Sociais

Uma troca social entre dois agentes, α e β, é executada em dois tipos de estágios. Nos estágios do tipo $I_{\alpha\beta}$ o agente α realiza um serviço para o agente β. Os valores de troca envolvidos neste estágio são os seguintes:

- $r_{I_{\alpha\beta}}$ é o valor do investimento feito por α pela realização do serviço para β. Um valor de investimento é sempre negativo;
- $s_{I_{\beta\alpha}}$ é o valor da satisfação de β pelo recebimento do serviço feito por α;
- $t_{I_{\beta\alpha}}$ é o valor do débito de β, o débito é adquirido em relação a α pela satisfação do serviço realizado por α;
- $v_{I_{\alpha\beta}}$ e o valor do crédito que α adquire de β pelo serviço realizado para β.

De maneira análoga são as trocas do tipo $II_{\alpha\beta}$, onde o agente α cobra um crédito por um serviço realizado anteriormente para β, que presta então um serviço para α em retorno.

Um processo de trocas sociais consiste da realização de diversas dessas etapas ao longo do tempo. Um sistema está em equilíbrio material se os balanços entre os valores de investimento e satisfação estão equilibrados para cada agente, após uma sucessão de trocas realizadas no tempo. Os valores de débito e crédito é que garantem a continuidade das interações.

5. Valores de Troca modelados como Jogos Bayesianos

5.1. Introdução

Neste capítulo apresenta-se um modelo de Jogo Bayesiano, utilizando a Teoria dos Valores de Troca. O jogo é consiste de nove jogos diferentes que refletem os estados dos agentes. O modelo de estados foi modelado em [5, 4], que mostram os estados internos dos agentes envolvidos nas trocas. Aqui estes estados representarão os tipos dos agentes, como será visto no modelo a seguir.

5.2. Modelo

Definição 5.1 *Um jogo Bayesiano é uma tupla* (N, A, Θ, p, u) *onde:*

- $N = \{\alpha, \beta\}$ *é um conjunto de agentes;*
- $A_\alpha = \{$`do-service`, `ask-service`$\}$, *é o conjunto de ações disponíveis para o agente* α, *onde* `do-service` *significa que o agente deve oferecer um serviço para o outro agente (estágio de trocas tipo* $I_{\alpha\beta}$*) e* `ask-service` *significa que o agente deve solicitar um serviço para o outro agente (estágio de trocas tipo* $I_{\beta\alpha}$*);*
- $A_\beta = \{$`yes`, `no`$\}$ *é o conjunto de ações disponíveis para o agente* β *onde* `yes` *significa que o agente* β *deve aceitar o serviço oferecido por* α *(ou aceita fazer um serviço para* α*) e* `no` *significa que o agente* β *deve recusar o serviço oferecido por* α *(ou se recusar a fazer o serviço solicitado por* α*);*
- $\Theta = \{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\}$, *onde* $\Theta_\alpha = \{\theta_{\alpha+}, \theta_{\alpha 0}, \theta_{\alpha-}\}$ *é o espaço de tipos do jogador* α; *e* $\Theta_\beta = \{\theta_{\beta+}, \theta_{\beta 0}, \theta_{\beta-}\}$ *é o espaço de tipos do jogador* β*;*

- $p : \Theta \mapsto [0, 1]$ *é uma distribuição de probabilidade a priori comum sobre os tipos; e*
- $u = (u_1 \times \ldots \times u_n)$*, onde* $u_i : A \times \Theta \mapsto \mathbb{R}$ *é a função de utilidade para o jogador* i*.*

A matriz de recompensa para o jogo Bayesiano dos valores de troca será representada da seguinte forma: na Figura 10 são apresentados os tipos dos agentes envolvidos na troca. Após na Figura 11 são apresentados os nove jogos possíveis que os agentes podem estar jogando.

$\Theta_\alpha, \Theta_\beta$	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\alpha-}$
$\theta_{\beta+}$	$p = 0.111$	$p = 0.111$	$p = 0.111$
$\theta_{\beta 0}$	$p = 0.111$	$p = 0.111$	$p = 0.111$
$\theta_{\beta-}$	$p = 0.111$	$p = 0.111$	$p = 0.111$

Figura 10. Matriz com os tipos dos jogadores e a distribuição de probabilidade a priori

A Figura 12 mostra a função de utilidade dos agentes envolvidos no jogo Bayesiano.

Considerando a equação do Capítulo 3 para calcular as utilidades *ex ante*, podemos construir a matriz de recompensa induzida para o jogo Bayesiano das Trocas de Valores. A Figura 13 reproduz a matriz para o jogador $1(\alpha)$ e a Figura 14 reproduz a matriz para o jogador $2(\beta)$.

As matrizes possuem as seguintes ações para os jogadores: YYY significa que o agente escolhe a ação yes, independente de seu tipo, YYN ele escolhe yes para os tipos $\theta_{\alpha+}$ e $\theta_{\alpha 0}$, mas escolhe a ação no caso seu tipo for $\theta_{\alpha-}$. De forma similar para o jogador coluna β, mas para as ações $do - service$ e $ask - service$.

Nas duas matrizes de recompensa, foram encontrados dois equilíbrios: o jogador β deve fazer a ação yes independente de seu tipo (isto é a ação YYY), e o jogador α tem duas melhores respostas, DDA e DAA, que resultam nos melhores resultados para os dois jogadores.

Este resultado deriva dos jogos envolvidos no jogo Bayesiano, pois em todos eles existiam incentivos para os agentes permanecerem em equilíbrio, isto é, as recompensas eram maiores se os agentes escolhessem permanecer no estado de equilíbrio, aqui no jogo Bayesiano denotado por $\Theta_{\alpha 0}$ e $\Theta_{\beta 0}$ para α e β respectivamente. Se for considerado ainda uma estratégia mista para α ele poderia jogar 50% das vezes DDA, e 50% das vezes DAA.

a_α	a_β	Θ_α	Θ_β	u_α	u_β
$do - service$	yes	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta+}$	0	-5
$do - service$	yes	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta+}$	-10	-10
$do - service$	yes	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta+}$	-10	-10
$do - service$	yes	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta 0}$	10	10
$do - service$	yes	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta 0}$	-10	-10
$do - service$	yes	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta 0}$	5	5
$do - service$	yes	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta-}$	10	10
$do - service$	yes	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta-}$	0	5
$do - service$	yes	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta-}$	10	10
$do - service$	no	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta+}$	-10	-10
$do - service$	no	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta+}$	-10	10
$do - service$	no	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta+}$	-10	10
$do - service$	no	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta 0}$	10	-10
$do - service$	no	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta 0}$	-10	10
$do - service$	no	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta 0}$	0	0
$do - service$	no	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta-}$	10	-10
$do - service$	no	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta-}$	-10	-10
$do - service$	no	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta-}$	10	-10
$ask - service$	yes	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta+}$	-5	0
$ask - service$	yes	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta+}$	10	10
$ask - service$	yes	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta+}$	10	10
$ask - service$	yes	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta 0}$	-10	-10
$ask - service$	yes	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta 0}$	10	10
$ask - service$	yes	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta 0}$	5	5
$ask - service$	yes	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta-}$	-10	-10
$ask - service$	yes	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta-}$	-5	0
$ask - service$	yes	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta-}$	-10	-10
$ask - service$	no	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta+}$	-10	-10
$ask - service$	no	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta+}$	10	-10
$ask - service$	no	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta+}$	10	-10
$ask - service$	no	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta 0}$	-10	10
$ask - service$	no	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta 0}$	10	-10
$ask - service$	no	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta 0}$	0	0
$ask - service$	no	$\theta_{\alpha+}$	$\theta_{\beta-}$	-10	10
$ask - service$	no	$\theta_{\alpha 0}$	$\theta_{\beta-}$	-10	-10
$ask - service$	no	$\theta_{\alpha-}$	$\theta_{\beta-}$	-10	10

Figura 12. Função de utilidade para os agentes α e β

6. Conclusão

6.1. Considerações Finais

A Teoria dos Jogos oferece diversas ferramentas para serem aplicadas à interação de agentes em um Sistema Multiagente, pois permitem que um agente raciocine sobre o comportamento do outro agente, escolhendo a melhor forma de interagir com ele.

$\theta_{\alpha+}, \theta_{\beta+}$	do-service	ask-service
yes	0, -5	-5, 0
no	-10, -10	-10, -10

$\theta_{\alpha 0}, \theta_{\beta+}$	do-service	ask-service
yes	-10, -10	10, 10
no	-10, 10	10, -10

$\theta_{\alpha-}, \theta_{\beta+}$	do-service	ask-service
yes	-10, -10	10, 10
no	-10, 10	10, -10

$\theta_{\alpha+}, \theta_{\beta 0}$	do-service	ask-service
yes	10, 10	-10, -10
no	10, -10	-10, 10

$\theta_{\alpha 0}, \theta_{\beta 0}$	do-service	ask-service
yes	-10, -10	10, 10
no	-10, 10	10, -10

$\theta_{\alpha-}, \theta_{\beta 0}$	do-service	ask-service
yes	5, 5	5, 5
no	0, 0	0, 0

$\theta_{\alpha+}, \theta_{\beta-}$	do-service	ask-service
yes	10, 10	-10, -10
no	10, -10	-10, 10

$\theta_{\alpha 0}, \theta_{\beta-}$	do-service	ask-service
yes	0, -5	-5, 0
no	-10, -10	-10, -10

$\theta_{\alpha-}, \theta_{\beta-}$	do-service	ask-service
yes	10, 10	-10, -10
no	10, -10	-10, 10

Figura 11. Todos os jogos possíveis

	DDD	DDA	DAD	DAA	ADD	ADA	AAD	AAA
YYY	0.555	4.440	0.555	4.440	−4.440	−0.555	−4.440	−0.555
YYN	−0.555	3.885	−0.555	3.885	−5.550	−1.110	−5.550	−1.110
YNY	0.000	3.885	0.000	3.885	−4.995	−1.110	−4.995	−1.110
YNN	−1.110	3.330	−1.110	3.330	−6.105	−1.665	−6.105	−1.665
NYY	−0.555	3.330	−0.555	3.330	−4.995	−1.110	−4.995	−1.110
NYN	−1.665	2.775	−1.665	2.775	−6.105	−1.665	−6.105	−1.665
NNY	−1.110	2.775	−1.110	2.775	−5.550	−1.665	−5.550	−1.665
NNN	−2.220	2.220	−2.220	2.220	−6.660	−2.220	−6.660	−2.220

Figura 13. Matriz de recompensa para o jogador 1 α

	DDD	DDA	DAD	DAA	ADD	ADA	AAD	AAA
YYY	−0.555	4.440	−0.555	4.440	−4.440	0.555	−4.440	0.555
YYN	−5.550	−1.110	−1.110	3.330	−4.995	−0.555	−0.555	3.885
YNY	−1.110	−0.555	−1.110	−0.555	−0.555	0.000	−0.555	−0.000
YNN	−6.105	−6.105	−1.665	−1.665	−1.110	−1.110	3.330	3.330
NYY	3.330	3.885	−1.110	−0.555	−1.110	−0.555	−5.550	−4.995
NYN	−1.665	−1.665	−1.665	−1.665	−1.665	−1.665	−1.665	−1.665
NNY	2.775	−1.110	−1.665	−5.550	2.775	−1.110	−1.665	−5.550
NNN	−2.220	−6.660	−2.220	−6.660	2.220	−2.220	2.220	−2.220

Figura 14. Matriz de recompensa para o jogador 2 α

Especificamente, se aplicada à Teoria dos Valores de Troca, a Teoria dos Jogos fornece uma forma de regulação entre as trocas realizadas entre os agentes, sem o auxílio de um agente externo que regule essas interações. Outros trabalhos como [2, 1, 5, 4], já abordaram o problema da regulação nas Trocas Sociais, entretanto nenhum deles utilizando a Teoria dos Jogos.

6.2. Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, pode se indicar outros testes para serem aplicados ao jogo Bayesiano descrito no Capítulo 5.

Por exemplo, pode se variar a distribuição inicial de probabilidade a priori, com diversas distribuições, a fim de se investigar se os equilíbrios se mantém. Pode se alterar as matrizes de recompensa dos jogos originais que compõem o jogo Bayesiano, alterando a localização dos equilíbrios, para uma análise do equilíbrio do jogo na forma induzida. Por fim, pode se variar os tipos e ações disponíveis, para aumentar ou diminuir a complexidade do jogo.

Pode se expandir o conceito de jogo Bayesiano para incluir o Projeto de Mecanismos (*Mechanism Design*) [8], regulando as trocas feitas pelos agentes.

Referências

[1] G. P. Dimuro and A. C. R. Costa. Exchange values and self-regulation of exchanges in multi-agent systems: The provisory, centralized model. In Sven Brueckner, Giovanna Di Marzo Serugendo, David Hales, and Franco Zambonelli, editors, *Engineering Self-Organising Systems*, volume 3910 of *LNCS*, pages 75–89. Springer, Berlin, 2006.

[2] G. P. Dimuro, A. C. R. Costa, L. V. Gonçalves, and A. Hübner. Centralized regulation of social exchanges between personality-based agents. In *Coordination, Organizations, Institutions, and Norms in Agent Systems II*, volume 4386 of *LNCS*, pages 338–355. Springer, Berlin, 2007.

[3] John Nash. Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics*, 54(2):286–295, 1951.

[4] D. R. Pereira, L. V. Gonçalves, G. P. Dimuro, and A. C. R. Costa. Constructing BDI plans from optimal POMDP policies, with an application to agentspeak programming. In *Proc. of Conf. Latinoamerica de Informática, CLEI'08*, Santa Fe, 2008. SADIO.

[5] D. R. Pereira, L. V. Gonçalves, G. P. Dimuro, and A. C. R. Costa. Towards the self-regulation of personality-based social exchange processes in multiagent systems. In G. Zaverucha and A. Loureiro Costa, editors, *SBIA 2008*, volume 5249 of *LNAI*, pages 113–123. Springer, Berlin, 2008.

[6] Jean Piaget. *Sociological Studies*. Routlege, London, 1995.

[7] Yoav Shoham and Kevin Leyton-Brown. *Essentials of Game Theory: A Concise, Multidisciplinary Introduction*. Morgan and Claypool Publishers, California, 2008.

[8] Yoav Shoham and Kevin Leyton-Brown. *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*. Cambridge University Press, Cambridge, December 2008.

[9] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1944.