

Caracterização Temporal e Modelagem Matemática da Rede de Cabos Submarinos

Rafael de Oliveira Costa¹, Daniel Ratton Figueiredo¹

¹Programa de Engenharia de Sistemas e Computação (PESC)
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

{roc, daniel}@cos.ufrj.br

Resumo. Cabos de fibra óptica instalados no fundo do mar (cabos submarinos) são hoje responsáveis por 99% do tráfego da Internet. A caracterização da rede formada por cabos submarinos é crucial para o entendimento da capacidade e robustez da Internet. A partir de dados públicos, este artigo descreve a evolução da rede de cabos submarinos ao longo de mais de três décadas, apresentando a evolução temporal de diversas características topológicas da rede. Resultados indicam que esta rede possui propriedades muito particulares, não encontradas em outras redes de comunicação (como ausência de ciclos e muitas componentes conexas). Dessa forma, um novo modelo para representar o crescimento da rede de cabos submarinos no tempo é proposto e avaliado neste trabalho.

Abstract. Fiber optic cables laid under the sea (submarine cables) are responsible for 99% of today's Internet traffic. Characterizing the evolution of the network composed by submarine cables is crucial for understanding the capacity and robustness of the Internet. Based on public data, this paper describes the evolution of the submarine cable network over more than three decades, presenting the temporal evolution of several network properties. Results indicate that this network has very particular properties, not found in other communication networks (such as absence of cycles and many connected components). Thus, a new model to represent the growth of the submarine cable network over time is proposed and evaluated in this work.

1. Introdução

Cabos submarinos têm desempenhado um papel crucial nos sistemas de comunicação desde o final do século XIX. O primeiro cabo submarino foi instalado no Canal da Mancha em dezembro de 1851 entre Londres e Paris, com o intuito de interligar o sistema telegráfico inglês com a rede de telégrafos do restante da Europa [Chesnoy 2015]. Atualmente, 99% do tráfego internacional da Internet é transportado por cabos de fibra óptica instalados no fundo dos oceanos (cabos submarinos) [McCurdy et al. 2018]. Dessa forma, a infraestrutura de rede formada por cabos submarinos representa uma parte fundamental e crítica da Internet, e faltam estudos mostrando o papel desta rede para a Internet no contexto global [Bischof et al. 2018, Tapolcai et al. 2021].

Diferentes trabalhos recentes consideram o problema de construção de uma rede de cabos submarinos (ou adaptação da rede atual) que seja mais robusta a falhas correlacionadas no espaço e no tempo [Cao et al. 2013, Tapolcai et al. 2021]. Além da conectividade global, outro importante aspecto é o desempenho oferecido pela rede global de

cabos submarinos, em termos de latência e capacidade de banda entre cidades e países, que é objeto de estudo em trabalhos recentes [Wang et al. 2021, Msongaleli et al. 2016]. De fato, garantir a robustez e o desempenho da rede de cabos submarino é um dos grandes desafios da atual Internet [Coffey 2014].

A rede de cabos submarinos (RCS) utilizada para transportar o tráfego da Internet teve suas origens no final dos anos 80, e hoje é composta por centenas de cabos pertencentes a dezenas de empresas que interligam cidades, países e continentes. A empresa TeleGeography¹ disponibiliza publicamente dados à respeito da expansão e adição de novos cabos à essa rede ao longo do tempo. Tais dados (de cabos e data) permitem reconstruir a rede (de cidades, por exemplo) a cada ano e fazer uma análise temporal de diferentes características da rede, tais como graus mínimo, médio e máximo, número de componentes conexas, diâmetro, etc.

O recente trabalho de *Xie et al.* apresenta uma evolução temporal da RCS que incidem sobre a China [Xie et al. 2022]. Entretanto, o foco não é a caracterização de métricas de redes (como distribuição de grau ou ciclos) mas o aumento da conectividade com outros países e continentes ao longo do tempo, além da relação com investimentos e medidas de desenvolvimento econômico (onde chegam os cabos). Apesar de também estudar a evolução temporal da RCS, o trabalho de *Bischof et al* tem como foco medir outras características de redes, como a capacidade e o comprimento dos cabos, analisar acerca de eventos que causam falhas nos cabos. Em particular, características da topologia da rede não são considerados por eles, que é o foco deste trabalho.

Uma vez que a evolução da RCS seja caracterizada, é importante considerar modelos matemáticos que possam representar a evolução desta rede. Intuitivamente, modelos existentes que utilizam mecanismos de crescimento da rede baseado em anexação preferencial e duplicação de nós representam bem redes que possuem uma única componente conexa com muitos ciclos e determinada distribuição de grau, possivelmente com cauda pesada [Goldenberg 2009]. Entretanto, ne todas essas características são observadas na RCS, como será apresentado a seguir.

Dessa forma, um segundo objetivo deste trabalho é propor um novo modelo de crescimento de rede que tenha características semelhantes às encontradas na RCS. O modelo proposto se baseia nos resultados da caracterização da RCS, que mostram que esta possui muitas componentes conexas na forma de linha, praticamente nenhum ciclo, graus predominantemente iguais a 2, e grau máximo muito maior que o grau médio. O modelo proposto é comparado com o modelo de crescimento de rede de Barabási-Albert (BA) para representar a RCS visto que é um modelo capaz de reproduzir características da rede de Sistemas Autônomos que formam a Internet [Barabási and Albert 1999].

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma. Nas seções 2 e 3 descrevemos a evolução das características da RCS e o modelo de rede proposto neste artigo respectivamente. Em seguida, na seção 4 é realizado um comparativo entre a rede de cabos submarinos e as redes geradas com os modelos BA e o que foi proposto no presente trabalho. Por fim, a seção 5 apresenta nossas considerações finais.

¹Website em <https://www.telegeography.com/>

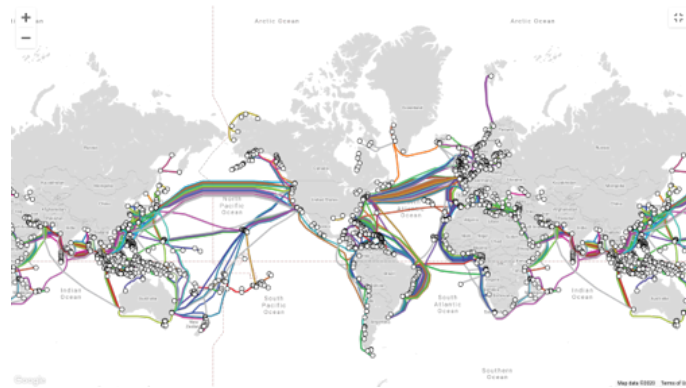


Figura 1. Mapa da rede de cabos submarinos (fornecida por [TeleGeography]).

2. Rede de Cabos Submarinos

A RCS é uma rede de comunicação que interliga cidades ao redor do mundo por meio de cabos de fibra óptica instalados no fundo dos oceanos. O principal objetivo desta rede é carregar tráfego da Internet entre as cidades conectadas. Além dos cabos de fibra óptica, essa rede tecnológica é formada por outros três tipos de dispositivos digitais: terminais de transmissão, repetidores, e unidades de ramificação. Os terminais de transmissão são equipamentos, localizados em estações instaladas no litoral das cidades, que são responsáveis por emitir e receber os sinais ópticos pertencentes aos dados que estão sendo transportados. Já os repetidores são dispositivos capazes de regenerar sinais ópticos que chegam até ele a fim de aumentar o alcance do sinal. Repetidores são instalados em posições regulares ao longo do cabo submarino, afastados um do outro por uma distância que varia entre 50 km e 120 km. Por fim, as unidades de ramificação são equipamentos usados para dividir um sinal óptico proveniente de um cabo tronco em dois outros cabos a fim de ramificar um sinal para destinos diferentes. Para que os repetidores e unidades de ramificação funcionem no fundo dos oceanos, os cabos de fibra óptica são envoltos por um condutor de cobre que fornece energia elétrica necessária para que tais dispositivos funcionem [Chesnoy 2015].

A Figura 1 exibe o mapa disponibilizado pela empresa TeleGeography [TeleGeography] que indica a localização de todos os cabos submarinos existentes atualmente (com cores diferentes). Neste mapa, cada cabo submarino pode ser visto como sendo uma rede independente que interliga duas ou mais cidades, localizadas no mesmo país ou até interligando continentes. Os pontos presentes neste mapa são denominados ponto de aterrissagem. Se um ponto de aterrissagem está localizado em um continente, tal ponto representa um terminal de transmissão de uma cidade. Já os pontos de aterrissagem localizados no meio dos oceanos representam repetidores ou unidades de ramificação.

É importante notar que diferentes cabos submarinos podem possuir o mesmo ponto de aterrissagem. Por exemplo, o ponto de aterrissagem que representa a cidade do Rio de Janeiro está presente nos seguintes cabos submarinos: America Movil Submarine Cable System-1 (AMX-1), Brazilian Festoon, BRUSA, GlobeNet, Junior, Malbec, South America-1 (SAM-1) e South American Crossing (SAC). Podemos dizer que todos esses cabos compartilham este mesmo ponto de aterrissagem, que é a cidade do Rio de Janeiro. Dessa forma, podemos considerar uma rede onde os nós correspondem aos pontos

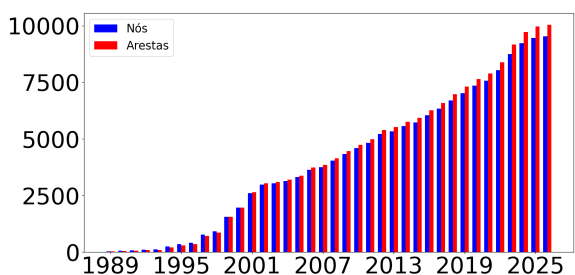


Figura 2. Nós e arestas da RCS.

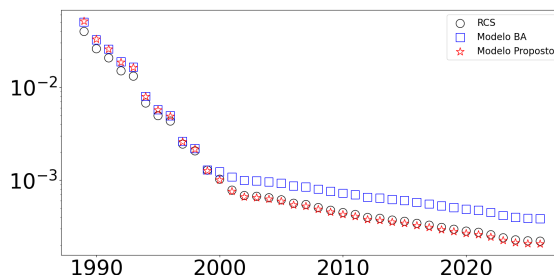


Figura 3. Densidade das redes.

de aterrissagem de todos os cabos submarinos. Uma aresta nesta rede indica que existe uma conexão direta de ao menos um cabo submarino entre os dois pontos de aterrissagem. Por exemplo, no cabo SAC os pontos de aterrissagem correspondentes às cidades do Rio de Janeiro e Santos estão conectados diretamente, logo há uma aresta entre os nós da rede que correspondem a essas cidades. Dessa forma, dado um conjunto de cabos submarinos, constrói-se uma rede que representa esses cabos (seus pontos de aterrissagem e as conexões diretas entre eles). No que segue, esta será a rede analisada ao longo do tempo.

2.1. Evolução da RCS

A partir de dados disponibilizados publicamente pela empresa TeleGeography, foram construídas as redes com os pontos de aterrissagem dos cabos operacionais a cada ano, desde 1989 até 2026, totalizando 37 anos e conseqüentemente, 37 redes diferentes (uma por ano), cada uma com mais ou menos cabos que a rede do ano anterior, já que novos cabos podem ser instalados e cabos existentes podem ser desativados ao longo dos anos. É importante mencionar que a TeleGeography reporta dados não só dos cabos já instalados, mas também dos cabos em fase de instalação ou planejados para instalação futura (por isso a data final de 2026).

A Figura 2 apresenta a evolução da RCS em relação à quantidade de nós e arestas a fim de mostrar que tal rede teve um bom crescimento ao longo dos anos, tendo em vista que novos cabos foram instalados durante os últimos trinta anos. Observe que até o início dos anos 2000, a quantidade de arestas era menor que o número de nós. Mas essa diferença se inverteu nos anos posteriores, com o número de arestas superando o número de nós da rede. Apesar desse aumento, a densidade da rede diminuiu significativamente ao longo dos anos, como mostra a Figura 3. Portanto, à medida que os anos passam, a RCS torna-se cada vez mais esparsa.

A maioria das redes reais, apesar de serem esparsas, possui a maioria de seus nós em uma mesma componente conexa (nós interligados por caminhos), denominada componente conexa gigante (CCG). Analisando o tamanho relativo da CCG da RCS em relação ao total de nós dessa rede na Figura 4, podemos observar que a CCG têm aumentado ao longo do tempo e atualmente possui aproximadamente 80% dos nós da RCS. Como a maioria dos nós da rede estão se concentrando na CCG, a rede torna-se cada vez mais conectada ao longo dos anos, assim como em outras redes reais. Por outro lado, a Figura 5 mostra que o número de componentes conexas também cresce ao longo do tempo. Isso indica que muitos cabos não possuem pontos de aterrissagem em comum com os pontos de aterrissagem presentes na CCG. Ou seja, tanto o tamanho da CCG quanto o número de componentes conexas da RCS cresce ao longo do tempo.

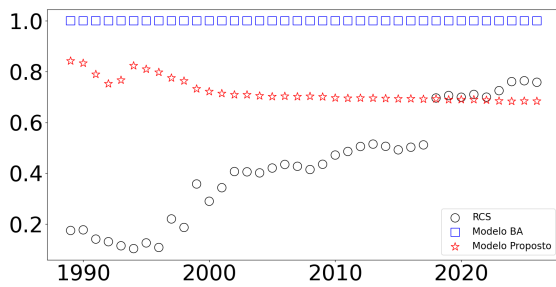


Figura 4. Tamanho relativo da CCG

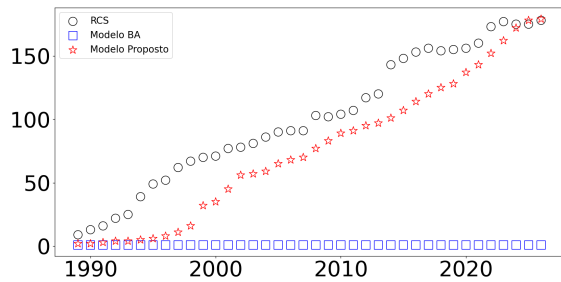


Figura 5. Componentes conexas

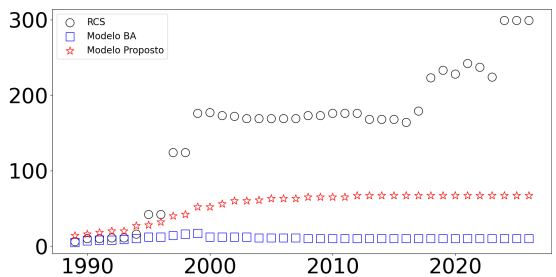


Figura 6. Diâmetro da CCG

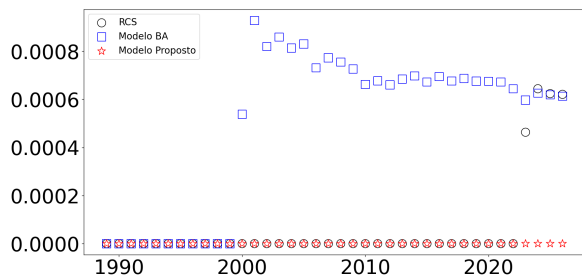


Figura 7. Transitividade

A Figura 6 apresenta o diâmetro (maior distância) da CCG ao longo do tempo, indicando que o mesmo tende a permanecer estável ao longo dos anos, apesar de crescer de forma repentina em alguns anos. É interessante notar que durante os primeiros 15 anos do século XXI, o diâmetro da rede permaneceu o mesmo apesar do número de nós ter triplicado no mesmo período. Isso é um indício que a rede contém *hubs*, ou seja, nós contendo arestas para muitos vértices, capazes de manter a rede ao mesmo tempo mais conectada e com baixa distância entre os nós e consequentemente, com diâmetro baixo.

Outra métrica que foi analisada foi o coeficiente de clusterização, que mede a fração de triângulos da rede (transitividade). A Figura 7 mostra que a transitividade permanece nula até 2020 (nenhum triângulo), ao contrário do que ocorre em outras redes reais, que possuem transitividade relativamente altas. Somente a partir de 2023 a transitividade da RCS torna-se diferente de zero, mas ainda com valor insignificante.

A evolução dos graus da rede ao longo dos anos revelam características peculiares. Por exemplo, o grau médio da rede permaneceu praticamente o mesmo nos últimos 20 anos (Figura 8), com valor aproximado de 1.96. Apesar da maioria dos nós da rede possuir grau igual a 2 (Figura 12a), alguns nós possuem graus muito maiores, note na Figura 9 que a partir de 2000, o maior grau da RCS já era cinco vezes maior que o grau médio e que essa relação continuou aumentando nos anos posteriores, outra evidência da existência de *hubs* na rede. Além disso, como a Figura 9 apresenta a evolução temporal do maior grau da rede, é possível observar que há uma tendência de crescimento do maior grau, ou seja, o grau dos *hubs* cresce ao longo do tempo.

A existência de *hubs* em uma rede é indicativo da mesma ser livre de escala, ou seja, sua distribuição de grau segue uma lei de potência, $f_d \propto d^{-\alpha}$ onde f_d é a fração de vértices com grau d [Barabási 2014]. A Figura 10 apresenta a distribuição de grau da RCS prevista para 2026, indicando claramente que a mesma possui cauda pesada. O valor do expoente da lei de potência estimado através da regressão linear dos dados

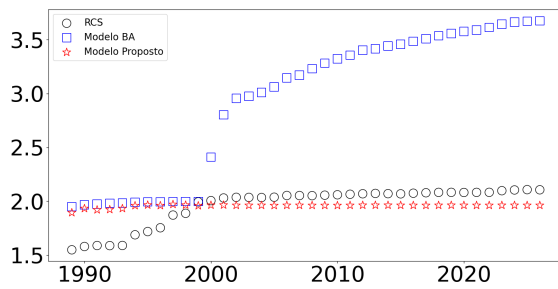


Figura 8. Grau médio

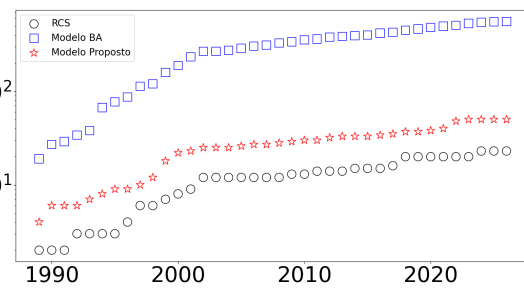


Figura 9. Maior grau

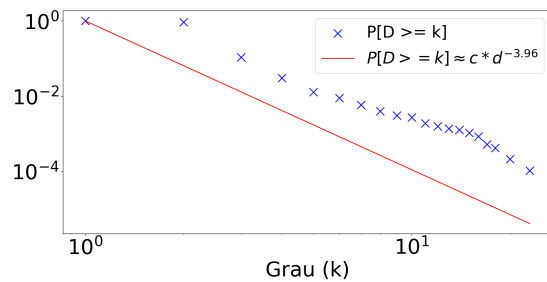


Figura 10. Distribuição de grau da RCS em 2026 (CCDF, escala logarítmica) e curva teórica sendo $\alpha = 2.96$



Figura 11. Fração de componentes conexas que são linhas.

foi $\alpha = 2,96$, indicando que a rede é livre de escala, apesar do reduzido número de escalas (grau máximo igual a 25). Ainda nesta figura, é possível observar a curva teórica considerando o valor estimado de α , indicando como tal valor aproxima os valores da distribuição de grau da RCS para o ano de 2026.

A Figura 12a apresenta a fração de nós que possuem graus baixos (grau 1, 2 e 3) ao longo dos anos. Note que a grande maioria dos nós da rede possui grau igual a 2, e que este valor é estável ao longo dos últimos 20 anos (em torno de 80%). Os graus 1 e 3 também são os que mais ocorrem na rede, em torno e 10% atualmente cada um deles, embora a fração de nós com grau 1 tenha sido maior até meados da década de 1990.

Um aspecto interessante é a estrutura das componentes conexas. Tendo em vista que a maioria dos nós possui grau 1 e 2, uma componente conexa poderia ter a estrutura de uma linha (ou barramento), onde os nós das duas extremidades possuem grau 1 e todos os outros intermediários possuem grau 2. A Figura ?? apresenta a fração de componentes conexas de rede que possui topologia em linha ao longos anos. Note que atualmente aproximadamente 80% das componentes conexas da RCS são linhas e que ao longo dos anos, essa fração nunca foi menor que 68%. Conseqüentemente, 20% das componentes conexas não são linhas, incluindo a CCG que possui *hubs* com graus bem grandes.

3. Novo Modelo para RCS

Após identificar algumas características temporais da RCS, um novo modelo probabilístico aleatório será proposto para capturar tais características. Em outras palavras, o modelo de rede proposto é capaz de gerar redes que são: (i) esparsas, (ii) com componente conexa gigante, contendo *hubs*, (iii) alta fração de de nós com grau 2 e (iv) com muitas componentes conexas com topologia em linha. O modelo proposto pode ser clas-

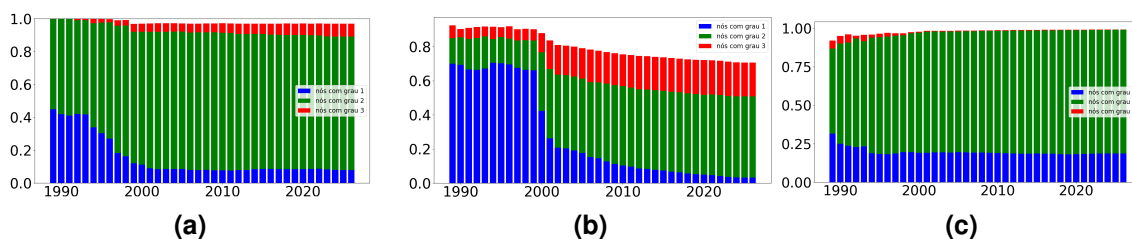


Figura 12. Fração dos menores graus da (a) RCS, (b) BA e (c) Modelo Proposto

sificado como um modelo de crescimento de rede que possui alguma forma de anexação preferencial (como o modelo BA) [Kolaczyk 2009].

No modelo proposto, a cada instante de tempo, exatamente dois novos vértices interligados por uma aresta são adicionados a rede (cliques de tamanho dois). Essas cliques de tamanho dois podem ser adicionadas de duas formas: (i) formando uma nova componente conexa, ou seja, desconectada dos demais nós da rede, ou (ii) conectando-se a uma componente conexa já existente. Neste caso, a clique pode ser conectada à rede usando dois mecanismos, escolhidos de forma aleatória: (i) alongamento de linha, ou (ii) anexação preferencial. O alongamento de linha implica que a clique será conectada obrigatoriamente à um nó com grau 1, pois isso tem o intuito de garantir que a topologia em linha seja mantida, caso o nó de grau 1 escolhido já esteja em uma componente conexa na forma de linha. No caso de anexação preferencial, um dos nós da clique se conecta a um nó da rede com probabilidade proporcional ao grau do nó. Isso tem o intuito de gerar nós que tenham graus muito maiores do que a média, como observado na RCS.

O algoritmo 1 apresenta os passos necessários para geração da rede segundo o modelo de rede proposto. O modelo possui os seguintes parâmetros: n , p e q . Sendo n o número de nós da rede ao final e p e q as probabilidades usadas para decidir o uso dos mecanismos de crescimento e de ligação. A probabilidade p representa a probabilidade da clique g ser uma nova componente conexa e a probabilidade q representa a probabilidade de alongar uma linha (conectar g a um nó de grau 1 de G).

Inicialmente, a rede G é uma clique contendo apenas dois vértices, ou seja, é uma rede que possui apenas dois nós conectados por uma única aresta. A função *get_node* invocada nas linhas 6, 8 e 10 do algoritmo 1 retorna um nó dentre os nós existentes, ou seja, w e x são nós pertencentes à G e g respectivamente que foram escolhidos aleatoriamente. O parâmetro dg desta função na linha 6 indica que o nó a ser escolhido deve ter um determinado grau (dg) que, neste caso, deverá ser 1. Por outro lado, o parâmetro pa da função *get_node* na linha 8 indica se o nó deve ser escolhido usando o mecanismo de anexação preferencial ou não. Quando $pa = True$ então o nó deverá ser escolhido com probabilidade proporcional ao seu número de arestas. Por último, quando a função *get_node* não possui parâmetros (linha 10) então o nó será escolhido com probabilidade uniforme dentre os nós existentes sem nenhuma restrição. Neste caso, o nó x ou será u ou v de g . Ao final, o algoritmo retorna a rede G gerada.

Note que o modelo proposto generaliza o modelo BA uma vez que também usa a regra de anexação preferencial para o crescimento da rede. No entanto, diferente do modelo BA, o modelo proposto usa adicionalmente outro mecanismo de crescimento que é proposto neste trabalho, ou seja, o alongamento de linha. Tal mecanismo é capaz de man-

Algorithm 1 Modelo de Rede para RCS

Require: n, p, q

- 1: $G \leftarrow new_clique(u, v)$
- 2: **while** $n - 2 \geq 2$ **do**
- 3: $g \leftarrow new_clique(u, v)$
- 4: **if** $uniform(0, 1) \geq p$ **then**
- 5: **if** $uniform(0, 1) \leq q$ **then**
- 6: $w \leftarrow G.get_node(dg = 1)$
- 7: **else**
- 8: $w \leftarrow G.get_node(pa = True)$
- 9: **end if**
- 10: $x \leftarrow g.get_node(dg = 1)$
- 11: $G \leftarrow add_graph(g)$
- 12: $G \leftarrow add_link(x, w)$
- 13: **else**
- 14: $G \leftarrow add_graph(g)$
- 15: **end if**
- 16: $n \leftarrow n - 2$
- 17: **end while**
- 18: **Return:** G

ter a topologia de linha de componentes conexas que já possuem tal topologia quando uma nova clique é conectada à uma componente conexa de G . Além disso, o modelo proposto também permite que a rede tenha mais componentes conexas, diferente do modelo BA que gera uma rede apenas com a CCG. No entanto, se ambas as probabilidades (p e q) forem iguais a 0%, o modelo proposto comporta-se exatamente como o modelo de BA, ou seja, toda clique deverá ser conectada à mesma componente conexa (a CCG) e todas as cliques se conectarão à um vértice com probabilidade equivalente ao seu grau. Entretanto, quando p e q são diferentes de zero, o modelo proposto pode retornar redes com diversas componentes conexas cujas topologias são na maioria linhas, além de uma componente conexa gigante contendo *hubs*.

4. Comparação entre Modelos

Nesta seção a evolução da rede segundo os modelos BA e o modelo proposto serão comparados em relação à RCS. Para isso, foram geradas redes com o mesmo número de nós que a rede real usando ambos os modelo, registrando tais redes a cada ano.

4.1. Modelo Barabási-Albert

O modelo BA é um modelo de crescimento de rede que emprega o mecanismo de anexação preferencial [Barabási and Albert 1999]. Tal mecanismo é probabilístico e incorpora o princípio ‘os ricos ficam mais ricos’ que dá vantagem aos nós com graus mais altos no momento que uma nova conexão é realizada, pois a probabilidade de escolher um nó para a conexão é proporcional ao seu grau.

Para este comparativo, foi usado o modelo BA do NetworkX [Hagberg et al. 2008]. Os parâmetros usados são o número de nós a serem conectados na rede (n) e o número de links (m) que cada novo nó irá criar para se conectar aos

nós existente. Atribuímos a n o número de nós diretamente extraídos da RCS em cada ano. Já m foi atribuído com o grau médio da RCS a cada ano.

O modelo BA gera redes com apenas uma componente conexa, de forma que todos os nós pertencem a CCG (Figuras 4 e 5) cuja densidade também decresce ao longo do tempo, mas de forma menos acentuada comparada com a RCS (Figura 3). A Figura 6 apresenta o diâmetro da CCG da rede gerada com o modelo BA ao longo do tempo. Note que o diâmetro permanece com valores bem menores que os diâmetros da CCG da rede real. Por exemplo, nos últimos 20 anos, o diâmetro da CCG da rede do modelo BA ficou entre 8 e 10 enquanto o diâmetro da CCG da RCS é cerca de 30 vezes maior.

Diferente da rede real, as redes geradas com o modelo BA possuem transitividade alta (em comparação com a RCS) como pode ser visto na Figura 7. Além disso, apesar de termos definido no modelo que m seria igual ao grau médio da RCS, podemos ver que o grau médio das redes geradas com o modelo BA na Figura 8 é quase o dobro do grau médio da RCS.

Como o modelo BA privilegia nós com graus maiores, é esperado a existência de *hubs* na rede, o que pode ser comprovado pela Figura 9 que apresenta a evolução do maior grau das redes geradas com tal modelo. Entretanto, comparando os graus dos *hubs* da rede real, temos que os graus dos *hubs* do modelo BA são quase 10x maiores que os graus dos *hubs* da RCS.

A Figura 12b apresenta a fração de nós com graus pequenos na rede gerada pelo modelo BA. Diferente da rede real, somente 50% dos nós possuem grau 2 nos últimos anos enquanto que na rede real essa proporção é de 80%. Além disso, a rede do modelo BA possui menos de 10% dos nós com grau 1. Por outro lado, a proporção de nós com grau 3 é maior do que a proporção encontrada na rede real. Como a rede do modelo BA possui *hubs* com graus maiores e menos nós com grau 2, isso pode explicar que o grau médio da rede do modelo BA é maior que o grau médio da rede real (Figura 8).

Como já mencionado anteriormente, a rede gerada pelo modelo BA possui somente uma única componente conexa que obviamente não possui topologia em linha. Isso difere significativamente da rede real, que possui muitas componentes conexas e a topologia mais encontrada nessas componentes é a topologia em linha.

4.2. Modelo Proposto

Para gerar a rede usando o modelo proposto, além do número de nós a cada ano, é necessário definir os valores de p e q . Esses parâmetros podem ser estimados a partir de observações do modelo e dos dados da rede real.

Seja C o número (aleatório) de componentes conexas geradas pelo modelo para uma rede com n nós. Temos que $E[C] = np/2$, pois a cada clique de tamanho dois que é adicionado à rede, uma nova componente conexa é criada com probabilidade p . Dessa forma, se c é o número de componentes conexas da rede real, podemos usar este resultado para estimar p , ou seja, $p = 2c/n$.

Considere agora a chance do modelo gerar nós com grau 2 no momento que uma clique de tamanho 2 é adicionada à rede. Com probabilidade $1 - p$, a clique irá se conectar a algum nó da rede existente. Com probabilidade q um nó da clique irá conectar com um nó de grau 1 da rede existente (alongamento de linha). Neste caso, 2 nós terão grau 2:

um da rede existente e outro que está na clique. Caso contrário, com probabilidade $1 - q$, um dos nós da clique terá grau 2, ao se conectar a algum outro nó da rede. Repare que neste caso o nó escolhido pode ter grau 1, se tornando grau 2, mas este cenário não será considerado nesta análise. Por outro lado, como neste caso está sendo usado a anexação preferencial para escolha do nó, é pouco provável que um nó de grau 1 seja escolhido. Dessa forma, o número médio de nós que possuem grau 2 ao entrar na rede pode ser aproximado por

$$D_2 = \frac{n}{2} (2(1 - p)q + (1 - p)(1 - q)), \quad (1)$$

Considerando que $n/2$ cliques são adicionadas a rede com n vértices. Manipulando a equação 1, podemos escrever q analiticamente, que é dado por

$$q = 1 - \frac{2D_2}{1 - p} \quad (2)$$

Dessa forma, se d_2 é o número de nós com grau 2 na rede real, temos $q = 1 - 2d_2/(1 - p)$, com p calculado conforme descrito acima. Essa forma de determinar q é uma aproximação, tendo em vista que nós que entram na rede com grau 2 podem aumentar o grau ao longo do crescimento da rede.

Considerando os dados da rede real para o último ano, temos que para a RCS em 2026, $c = 178$, $d_2 = 7840$ e $n = 9679$. Logo, aplicando as equações acima, obtemos $p = 0.037$ e $q = 0.688$. Esses valores serão utilizados para gerar as redes com o modelo proposto que serão analisadas na sequência.

Inicialmente, podemos ver que o modelo proposto também gera redes esparsas como a RCS. Note, inclusive que a densidade da rede gerada pelo modelo proposto (Figura 3) se assemelha bem mais à rede real que o modelo BA. A Figura 4 mostra que a evolução do tamanho relativo da CCG das redes geradas com o modelo proposto se mantém constante ao longo dos anos (aproximadamente 80% dos nós estão na CCG). Comparando com a evolução da rede real, podemos ver que na rede real, apenas nos últimos anos, 80% dos nós também estão na CCG. Além disso, o modelo proposto gera redes com diversas componentes conexas, o que pode ser comprovado na Figura 5 que mostra que as redes geradas pelo modelo proposto possuem mais de uma centena de componentes conexas assim como observado na rede real.

A Figura 6 mostra a evolução do diâmetro da CCG da rede do modelo proposto. Note que o diâmetro é menor que o diâmetro da CCG da rede real em todos os anos, mas bem maior que o diâmetro da CCG da rede do modelo BA. Mas diferente do modelo BA, o modelo proposto possui transitividade zero (Figura 7) ao longo de todos os anos, semelhante ao que ocorre na rede real.

Em relação aos graus, o modelo de rede proposto gera redes com graus bem semelhantes aos encontrados na rede real, por exemplo, o grau médio mostrado na figura 8 também é aproximadamente 2 como na RCS. A Figura 9 mostra a evolução do maior grau da rede do modelo proposto, que são bem menores que os maiores graus do modelo BA e bem mais próximos dos maiores graus da rede real ao longo dos anos. Com relação aos menores graus, a Figura 12c mostra a fração de nós com os três menores graus ao longo do tempo. Note que aproximadamente 80% dos nós possui grau 2, exatamente como na rede real. Em contrapartida, a fração de nós com grau 1 e 3 é bem maior e menor do que na rede real, respectivamente.

Finalmente, a Figura 11 apresenta a fração de componentes conexas que possuem topologia em linha. Note que ao longo dos anos, praticamente 100% das componentes tem topologia em linha, diferente do que ocorre na rede real, onde este valor é de 80%. Entretanto, estão relativamente próximos, se considerarmos que o modelo BA gera apenas uma única componente conexa que não possui topologia em linha.

5. Conclusão

A rede de cabos submarinos (RCS) é uma rede formada por uma coleção de cabos de fibra óptica instalados no fundo do mar para interconectar cidades, países e continentes por meio da Internet. Neste trabalho, apresentamos uma caracterização topológica da evolução temporal desta rede ao longo de quase 40 anos, construindo as redes para cada ano a partir de dados disponíveis publicamente. Os resultados indicam que a RCS é uma rede formada por uma componente conexa gigante que cresce ao longo do tempo, mas que também possui muitas componentes conexas, sendo que a maioria delas possui topologia em linha. Apesar da RCS ser extremamente esparsa, com grau médio próximo a 2, ela é livre de escala e por isso, possui nós com graus muito maiores (até 10 vezes maior) do que a média (*hubs*). Por outro lado, a rede praticamente não possui triângulos e seu diâmetro é relativamente alto, em comparação com outras redes reais.

Outra contribuição deste trabalho é a proposta de um modelo de rede aleatório que incorpora os mecanismos para criação de novas componentes conexas e de ligação (i) alongamento de topologias em linha, e (ii) anexação preferencial baseado em grau. O objetivo destes mecanismos de crescimento e ligação é capturar melhor as particularidades da RCS em um modelo relativamente simples, com apenas dois parâmetros (além do número de nós).

O trabalho apresentou ainda uma comparação entre o clássico modelo de crescimento de rede de Barabási-Albert (BA) e o modelo proposto tendo como base dados reais da RCS. Os resultados indicam que o modelo BA não captura adequadamente diversas características da RCS, como a evolução do grau dos *hubs*, o diâmetro da rede, e a fração de nós com grau pequeno (sem contar que este modelo gera redes com apenas uma componente conexa). Em contrapartida, o modelo proposto apresenta resultados bem mais similares às características temporais encontradas na RCS. Em trabalhos futuros desejamos comparar o modelo proposto com outros modelos de crescimento de redes mais modernos e flexíveis [Goldenberg 2009, Staudt et al. 2017].

Referências

- Barabási, A.-L. (2014). Network science book. *Network Science*, 625.
- Barabási, A.-L. and Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks. *AAAS Science*, 286(5439):509–512.
- Bischof, Z. S., Fontugne, R., and Bustamante, F. E. (2018). Untangling the world-wide mesh of undersea cables. In *ACM Workshop on Hot Topics in Networks*, pages 78–84.
- Cao, C., Zukerman, M., Wu, W., Manton, J. H., and Moran, B. (2013). Survivable topology design of submarine networks. *IEEE Journal of lightwave technology*, 31(5):715–730.
- Chesnoy, J. (2015). *Undersea fiber communication systems*. Academic press.

- Coffey, V. (2014). Sea change: The challenges facing submarine optical communications. *Optics and Photonics News*, 25(3):26–33.
- Goldenberg, A. (2009). A survey of statistical network models. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 2:129–233.
- Hagberg, A. A., Schult, D. A., and Swart, P. J. (2008). Exploring network structure, dynamics, and function using networkx. In Varoquaux, G., Vaught, T., and Millman, J., editors, *Proceedings of the 7th Python in Science Conference*, pages 11 – 15.
- Kolaczyk, E. D. (2009). *Statistical Analysis of Network Data: Methods and Models*. Springer.
- McCurdy, A., Shelton, A., Burns, B., Bayly, C., Handa, E., Gerstell, G., Fortain, J., Joensuu, J., Duvernay, L., Lingle, R., et al. (2018). Submarine telecoms industry report. In *Submarine Telecoms Forum, Inc., Tech. Rep.*
- Msongaleli, D. L., Dikbiyik, F., Zukerman, M., and Mukherjee, B. (2016). Disaster-aware submarine fiber-optic cable deployment for mesh networks. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 34(18):4293–4303.
- Staudt, C. L., Hamann, M., Gutfraind, A., Safro, I., and Meyerhenke, H. (2017). Generating realistic scaled complex networks. *Applied Network Science*, 2:36.
- Tapolcai, J., Hajdú, Z. L., Pašić, A., Ho, P.-H., and Rónyai, L. (2021). On network topology augmentation for global connectivity under regional failures. In *IEEE Conference on Computer Communications (INFOCOM)*, pages 1–10.
- TeleGeography. Submarine cable map. www.submarinecablemap.com.
- Wang, T., Wang, X., Wang, Z., Guo, C., Moran, B., and Zukerman, M. (2021). Optimal tree topology for a submarine cable network with constrained internodal latency. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 39(9):2673–2683.
- Xie, Y., Wang, C., and Huang, J. (2022). Structure and evolution of the submarine cable network of chinese mainland. *Journal of Geographical Sciences*, 32(5):932–956.