

Um novo modelo para grafos variantes no tempo

Klaus Wehmuth, Artur Ziviani

Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC)
Petrópolis – RJ – Brasil

{klaus, ziviani}@lncc.br

Abstract. *We propose a new model for time-varying graphs (TVGs), suitable for the representation of dynamic networks. We show that the proposed model is general enough to represent several cases of dynamic networks found in the recent literature. We also study the data structures used for the representation of dynamic networks built following our model. Further, we prove that when the nodes of the TVG can be considered as independent nodes in each time instant, the analyzed TVG is isomorphic to a directed static graph. This is an important theoretical result because this allows the straightforward application of known results from the theory of directed graphs in the context of dynamic networks. In short, the contribution of this paper resides in the proposal of a new model for TVGs as well as the theoretical ground that supports its generality and applicability.*

Resumo. *Nós propomos um novo modelo para grafos variantes no tempo (GVTs), adequados para a representação de redes dinâmicas, por exemplo. Mostramos que o modelo proposto é suficientemente geral para representar vários casos de redes dinâmicas encontrados na literatura recente. Nós também estudamos as estruturas de dados usadas para representação de redes dinâmicas construídas de acordo com nosso modelo. Nós demonstramos ainda que quando os nós do GVT podem ser considerados como nós independentes em cada instante de tempo, o GVT analisado é isomorfo a um grafo estático orientado. Esse é um resultado teórico importante, pois permite a aplicação direta de resultados conhecidos em teoria de grafos orientados ao contexto de redes dinâmicas. Em suma, a contribuição deste artigo situa-se na proposição de um novo modelo para GVTs bem como no embasamento teórico que fundamenta sua generalidade e aplicabilidade.*

1. Introdução

Em muitos casos, redes variam com o tempo. Nesse contexto, vários trabalhos abordam as dificuldades impostas à funcionalidade das redes por esse comportamento dinâmico [Sengul et al., 2012, Alvarez-Hamelin et al., 2012]. Em [Kempe et al., 2002], se trata da conectividade e acessibilidade em redes dinâmicas. Ferreira [Ferreira, 2004] estuda redes móveis *ad-hoc*, propondo modelos para seu comportamento dinâmico. Kostakos [Kostakos, 2009] introduz um modelo de grafo temporal e analisa suas aplicações em redes dinâmicas. Tang et al. [Tang et al., 2010] estudam noções de centralidade em redes dinâmicas. Recentemente, Kim e Anderson [Kim e Anderson, 2012] propõem um novo modelo para redes temporais e uma medida de centralidade temporal. Entretanto,

a literatura relacionada carece de um modelo que generalize e formalize as diferentes iniciativas de modelagem e representação de redes dinâmicas.

Neste artigo, propomos um novo modelo para grafos variantes no tempo (GVTs) que generaliza e formaliza as representações encontradas em trabalhos anteriores para modelagem de redes dinâmicas (ver Seção 4 para uma análise dos trabalhos relacionados e como nossa proposta os representa). Nosso modelo também dá origem a estruturas de dados similares aquelas normalmente utilizadas para representação de redes, tais como matrizes de adjacência e incidência. Além disso, utilizamos as representações derivadas de nosso modelo para GVTs para definir distâncias entre nós em redes dinâmicas e também inferir características destas redes. Mostramos ainda que quando os nós do GVT representado em cada instante de tempo são considerados como distintos, a rede dinâmica representada é isomorfa a uma rede estática orientada. Esse é um resultado teórico importante, pois permite a aplicação direta de resultados conhecidos em teoria de grafos orientados ao contexto de redes dinâmicas. Em suma, a contribuição deste artigo situa-se na proposição de um novo modelo para GVTs bem como no embasamento teórico que fundamenta sua generalidade e aplicabilidade.

Este artigo está organizado da seguinte maneira. A Seção 2 introduz e formaliza o novo modelo proposto para GVTs. A Seção 3 trata das estruturas utilizadas para a representação de GVTs (e conseqüentemente, de redes dinâmicas). Na Seção 4, apresenta uma análise dos trabalhos relacionados e como nossa proposta os representa. Finalmente, a Seção 5 resume nossa contribuição e discute possíveis trabalhos futuros baseados no modelo introduzido neste artigo.

2. Um novo modelo para grafos variantes no tempo (GVT)

Em geral, define-se uma rede dinâmica como um grafo cujos nós, arestas ou seus respectivos pesos variam no tempo. Pare efeito deste trabalho, consideraremos que o conjunto de nós é invariante no tempo. Essa restrição não é impeditiva para que se modele um GVT geral. Para representar um GVT cujo conjunto de nós varie no tempo, basta considerar a união dos conjuntos de nós em todos os instantes de tempo.

O novo modelo proposto neste trabalho representa um GVT como um objeto $G_d = (V, E, T, \Phi_w)$, onde V é o conjunto de nós (invariante no tempo), E é o conjunto de arestas dinâmicas, T é o conjunto de todos os instantes de tempo nos quais o GVT é representado e Φ_w é uma função que leva do conjunto de arestas ao conjunto dos números reais, associando um peso a cada aresta. Definimos também $n = |V|$ e $\tau = |T|$. Para o caso de arestas não-ponderadas, fica convencionado que a função Φ_w é definida de tal forma que $\Phi_w(e) = 1, \forall e \in E$. Na sequência desta seção, introduzimos conceitos chave relacionados ao modelo em si e fundamentação teórica de sua aplicabilidade.

2.1. Arestas dinâmicas

Uma aresta dinâmica $e \in E$ é definida como uma quádrupla ordenada na forma $e = (u, t_p, v, t_q)$, onde $u, v \in V$ e $t_p, t_q \in T$. Assim, a aresta dinâmica representa uma ligação do nó u no instante t_p para o nó v no instante t_q . Uma aresta dinâmica é considerada não orientada quando ambos $(u, t_p, v, t_q), (v, t_q, u, t_p) \in E$. Se apenas $(u, t_p, v, t_q) \in E$, a aresta é considerada orientada. O conjunto E de arestas dinâmicas é um subconjunto de $V \times T \times V \times T$ que representa o conjunto de todas as arestas dinâmicas possíveis em um

GVT. Independente da orientação, as arestas dinâmicas podem ser classificadas em três tipos por sua característica temporal:

1. Arestas ligando nós distintos em um mesmo instante de tempo – Estas arestas equivalem ao conceito tradicional de arestas em grafos estáticos e são denominadas arestas *espaciais*;
2. Arestas ligando um mesmo nó em instantes de tempo distintos – Este tipo de aresta é denominado aresta *temporal*;
3. Arestas ligando nós distintos em instantes de tempo distintos – Este tipo de aresta é denominado aresta *mista*.

Arestas orientadas cujo componente temporal não é constante (arestas temporais ou mistas) podem ser classificadas como progressivas ou regressivas. Arestas progressivas são aquelas cuja coordenada temporal de destino é maior (posterior) que a coordenada temporal de origem, representando uma ligação no sentido temporal usual. As arestas regressivas são aquelas onde a coordenada temporal de destino é menor (anterior) que a coordenada temporal de origem, representando uma ligação no sentido inverso do usual no tempo. As arestas regressivas são particularmente úteis para se modelar redes *cíclicas*, i.e., redes cujo comportamento dinâmico se repete ciclicamente. Um exemplo simples desse caso é uma DTN (rede tolerante a desconexão) com n nós, onde $n - 1$ nós são estáticos e fora do alcance uns dos outros (portanto, desconexos) e um nó móvel que percorre um caminho cíclico, conectando-se com apenas um dos nós estáticos de cada vez.

2.2. Caminhos em um GVT

Assim como definimos três tipos distintos de arestas, também definimos três tipos de caminhos em GVTs:

1. Caminho espacial: formado por uma sequência de arestas espaciais somente;
2. Caminho temporal: formado por uma sequência de arestas temporais somente;
3. Caminho misto: É formado por uma sequência de arestas, onde existem arestas mistas ou combinações de arestas espaciais e temporais.

Para que um caminho em um GVT seja especificado de forma não ambígua, é necessário fixar um nó e tempo de origem e ainda um nó e tempo de destino. Note que nada impede a existência de múltiplos caminhos entre um par de nós, iniciando e terminando em qualquer instante de tempo. Desta forma, é possível definir também o conjunto de todos os caminhos entre os nós u e v como sendo o conjunto de todos os caminhos que levam de u a v iniciando e terminando em qualquer instante de tempo.

É interessante notar que uma aresta mista pode ser decomposta em um caminho misto formado por uma aresta temporal e uma aresta espacial. Essa decomposição pode ser feita de maneira a conservar o peso da aresta mista, fazendo com que a soma dos pesos da aresta temporal e espacial criada se iguale ao peso da aresta mista. Entretanto, a decomposição de uma aresta mista altera o conjunto de vizinhos dos nós envolvidos, fazendo com que a topologia do GVT seja alterada em consequência da decomposição e que, em geral, o GVT original e o resultante não sejam isomorfos. Além disso, qualquer caminho misto pode ser decomposto em um conjunto (não necessariamente consecutivo) de arestas temporais e um conjunto (não necessariamente em um único instante de tempo) de arestas espaciais. Com isso, é possível definir o peso (ou custo) temporal e espacial

de qualquer caminho. Para tanto, basta decompor todas as arestas mistas em temporais e espaciais (preservando seu peso) e, em seguida, calcular o peso temporal como sendo a soma dos pesos das arestas temporais e o peso espacial como a soma dos pesos das arestas espaciais do caminho. Em particular, um caminho espacial tem peso temporal 0 e um caminho temporal tem peso espacial 0. O uso de arestas mistas pode gerar ambiguidade na decomposição de pesos temporais e espaciais, porém o peso total do caminho será preservado. Deve-se notar ainda que uma aresta mista em geral tem peso temporal e espacial diferente de zero.

2.3. Caminhos mínimos em um GVT

De forma análoga ao que ocorre em grafos estáticos (ou seja, não variantes no tempo), definimos o caminho mínimo em um GVT como sendo o caminho de menor peso ligando dois nós em dois instantes de tempo. Assim como nos grafos estáticos, pode existir mais de um caminho do nó (u, t_p) para (v, t_q) com peso mínimo. A Figura 1 apresenta um exemplo simples para ilustração de caminhos mínimos em GVTs. Para esse exemplo, consideramos que todas as arestas tem peso 1. Observe que o caminho mínimo de $(0, t_0)$ para $(1, t_2)$ é formado pelas arestas $[(0, t_0, 0, t_1), (0, t_1, 1, t_1), (1, t_1, 1, t_2)]$, o caminho mínimo de $(0, t_0)$ para $(1, t_1)$ é formado pelas arestas $[(0, t_0, 0, t_1), (0, t_1, 1, t_1)]$, o caminho mínimo de $(0, t_1)$ para $(1, t_1)$ é formado apenas pela aresta $(0, t_1, 1, t_1)$ e o caminho mínimo de $(0, t_1)$ para $(1, t_2)$ pelas arestas $[(0, t_1, 1, t_1), (1, t_1, 1, t_2)]$. Esses caminhos caracterizam o conjunto de caminhos mínimos do nó 0 para o nó 1.

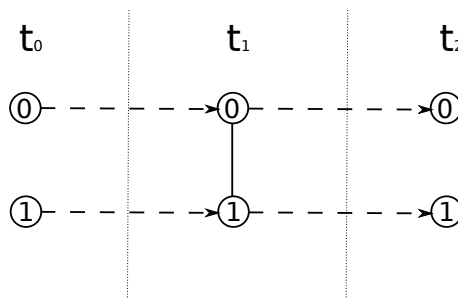


Figura 1. Exemplo de grafo variante no tempo (GVT).

Neste contexto, pode-se definir quatro variações do conceito de caminho mínimo:

1. Caminho mínimo iniciando e terminando em instantes de tempo específicos. É o caso do exemplo $(0, t_0)$ para $(1, t_2)$ mencionado anteriormente.
2. Caminho mínimo terminando em um instante específico. É o menor caminho mínimo do nó de origem ao nó de destino que termina no instante especificado.
3. Caminho mínimo iniciando em um instante específico. É o menor caminho mínimo do nó de origem ao nó de destino que inicia no instante especificado.
4. Caminho mínimo absoluto. É o menor caminho mínimo entre o nó de origem e o nó de destino iniciando e terminando em qualquer instante.

É importante notar que em nenhum dos casos apresentados é necessário que haja unicidade do caminho mínimo. No exemplo da Figura 1, o caminho mínimo do nó 0 para o nó 1 terminando em t_1 é formado apenas pela aresta $(0, t_1, 1, t_1)$. O caminho mínimo do nó 0 para o nó 1 iniciando em t_0 é formado pelas arestas $[(0, t_0, 0, t_1), (0, t_1, 1, t_1)]$ e o caminho mínimo absoluto do nó 0 para o nó 1 é formado apenas pela aresta $(0, t_1, 1, t_1)$.

Não existe caminho mínimo do nó 0 para o nó 1 terminando no instante t_0 , nem caminho mínimo do nó 0 para o nó 1 iniciando no instante t_2 .

2.4. GVT cíclico

Um ciclo temporal é definido como um ciclo composto apenas por arestas temporais. Esse tipo de ciclo tem utilidade para a modelagem de redes cíclicas, como no exemplo de DTN mencionado anteriormente. Uma forma simples de modelar uma rede deste tipo é construindo um ciclo temporal em cada um dos nós, conectando cada nó em tempos sucessivos $t_0 \rightarrow t_1, t_1 \rightarrow t_2$, até $t_{\tau-2} \rightarrow t_{\tau-1}$ e finalmente $t_{\tau-1} \rightarrow t_0$, criando n ciclos temporais com τ arestas temporais cada.

Em um GVT com ciclos temporais, a quantidade de instantes de tempo atingíveis é ilimitada. Portanto, deve-se utilizar aritmética modular [Graham et al., 1994] com módulo τ para se identificar os instantes de tempo. Assim, cada instante de t_0 até $t_{\tau-1}$ passa a ser o representante natural de uma classe de equivalência de instantes de tempo. Como o módulo utilizado é τ , tem-se τ classes de equivalência que particionam os números naturais. Em um GVT cíclico, quando nos referirmos a um instante de tempo específico, em geral isso deve ser entendido como uma referência à classe de equivalência a qual este instante em particular pertence. Igualmente, uma referência a todos os instantes de tempo deve ser entendida como uma referência a todas as classes de equivalência.

Definimos um GVT cíclico como um GVT onde cada um de seus nós tem um ciclo temporal. A Figura 2 apresenta um exemplo de GVT cíclico com dois nós (identificados como 0 e 1), seis arestas temporais (tracejadas) e uma aresta espacial (contínua). Nesse GVT, o número de instantes de tempo é $\tau = 3$, portanto os instantes múltiplos de 3 (t_3, t_6, t_9, \dots) estão na mesma classe de equivalência que o instante t_0 , os instantes (t_4, t_7, t_{10}, \dots) estão na classe de equivalência de t_1 e os instantes (t_5, t_8, t_{11}, \dots) estão na classe de equivalência de t_2 . Consideramos todos os instantes de uma mesma classe de equivalência como indistinguíveis e os referenciaremos apenas pelos representantes de cada classe: t_0, t_1 e t_2 no caso da Figura 2.

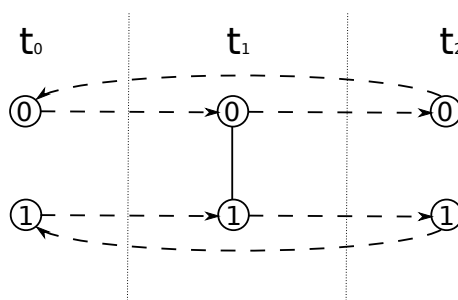


Figura 2. Exemplo de grafo variante no tempo (GVT) cíclico.

2.5. Conectividade

Definimos o grafo subjacente de um GVT como sendo o grafo obtido a partir do GVT considerando todas as arestas como sendo não orientadas. Consideramos um GVT fracamente conexo se seu grafo subjacente é conexo. Ou seja, se todo par de nós do grafo subjacente é ligado por (ao menos) um caminho. Por exemplo, os GVTs apresentados nas Figuras 1, 2 e 3 são fracamente conexos.

Consideramos um GVT fortemente conexo se para cada par de nós u e v existe uma caminho originado em u e terminado em v e também um caminho originado em v e terminado em u . Note que com essa definição os caminhos podem se originar e terminar em qualquer instante de tempo no GVT. Nos exemplos apresentados, somente os GVTs das Figuras 1 e 2 são fortemente conexos.

Um GVT é considerado estritamente conexo, se para cada par (u, t_p) e (v, t_q) no GVT existe um caminho originado em (u, t_p) e terminado em (v, t_q) assim como um caminho iniciado em (v, t_q) e terminado em (u, t_p) . Para que um GVT com mais de um instante de tempo seja estritamente conexo é necessário que este tenha arestas com um componente temporal progressivo e arestas com um componente temporal regressivo. Em particular, um GVT cíclico pode ser estritamente conexo. Por exemplo, o GVT apresentado na Figura 2 é estritamente conexo.

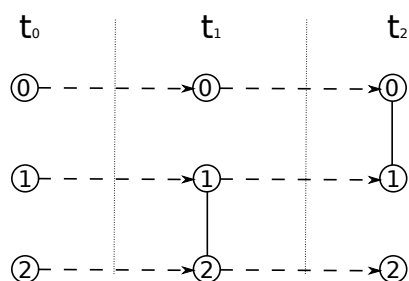


Figura 3. Exemplo adicional de grafo variante no tempo (GVT).

2.6. Grafo agregado

Definimos como grafo agregado de um GVT o grafo estático obtido pela união do componente espacial de todas as arestas em todos os instantes de tempo. Ou seja, para obter-se o grafo agregado correspondente a um dado GVT $G_d = (V, E, T, \Phi_w)$, basta decompor todas as suas arestas mistas em pares de uma aresta temporal mais uma espacial e em seguida construir o grafo agregado $G_A = (V_A, E_A)$, onde $V_A = V$ e E_A é o conjunto de todas as arestas espaciais do GVT obtido após a decomposição das arestas mistas. Note que a soma dos graus de um nó nos diferentes instantes do GVT não necessariamente corresponde ao grau deste nó no grafo agregado. Isso ocorre pela possível existência em múltiplos instantes de arestas cujo componente espacial é adjacente ao mesmo par de nós.

Lema 1. *Se em um GVT existe um caminho do nó u no instante t_p para o nó v no instante t_q , então existe um caminho de u para v no grafo agregado.*

Demonstração. Se $u = v$, trata-se de um caso trivial onde por convenção se adota que existe um caminho de comprimento 0 de um nó para si próprio. Se $u \neq v$, devemos considerar dois casos: (i) se $t_p = t_q$, então neste único instante de tempo existem arestas espaciais formando um caminho do nó u para o nó v e, como estas arestas são incluídas no conjunto de arestas do grafo agregado, existe um caminho de u para v no grafo agregado; (ii) se $t_p \neq t_q$, observe que se existe uma aresta espacial ou mista ligando um nó y a um outro nó z , existe um componente espacial do nó y para o nó z . Consequentemente, se existe um caminho de (u, t_p) para (v, t_q) , existem componentes espaciais ligando u

e v não necessariamente em um mesmo instante de tempo. Como essas componentes espaciais estão presentes no grafo agregado, segue que o caminho $u \rightarrow v$ existe nesse grafo agregado. \square

Note que a recíproca do Lema 1 não é verdadeira. Ou seja, se existe um caminho de um dado nó u para um outro nó v no grafo agregado, não necessariamente existe um caminho de u para v no GVT do qual o grafo agregado foi gerado. A Figura 3 mostra um contra-exemplo onde existe um caminho do nó 0 para o nó 2 no grafo agregado, porém no GVT não existe nenhum caminho do nó 0 para o nó 2.

Corolário 1. *Se um GVT é fortemente conexo, então seu grafo agregado é fortemente conexo.*

Demonstração. Se o GVT é fortemente conexo, significa que para cada par de nós u e v existe um caminho de u para v e um caminho de v para u no GVT. Do Lema 1 temos que se existe um caminho entre dois nós u e v no GVT, também existe um caminho entre os nós u e v no grafo agregado. Assim, para cada par de nós u e v no grafo agregado, existe um caminho de u para v e um caminho de v para u e, conseqüentemente, o grafo agregado é fortemente conexo. \square

Corolário 2. *Um GVT cíclico é estritamente conexo se e somente se seu grafo agregado é fortemente conexo.*

Demonstração. Se um GVT é estritamente conexo, então necessariamente ele é fortemente conexo. Assim, pelo Corolário 1, seu grafo agregado é fortemente conexo.

Suponha agora que um determinado GVT cíclico G_d com τ intervalos de tempo tem um grafo agregado G_A fortemente conexo. Vamos mostrar que para um par de nós arbitrários u e v existe um caminho de u para v no GVT G_d . Como G_A é fortemente conexo, dado um par arbitrário de nós u e v de G_A , existe uma lista ordenada de arestas $L_A = [(u, i_0), (i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_n, v)]$, ou seja, um caminho de u para v . Pela definição de grafo agregado, segue que para cada aresta $(i, j) \in L_A$, existe uma aresta espacial ou mista (i, t_p, j, t_q) no GVT G_d . Dessa forma, a partir de L_A , podemos construir a lista $L = [(u, t_a, i_0, t_b), (i_0, t_c, i_1, t_d), \dots, (i_n, t_p, v, t_q)]$ de arestas espaciais ou mistas em G_d . Queremos mostrar que partindo do nó u em qualquer instante de tempo é possível percorrer as arestas de L seguindo a ordenação da lista. Como o GVT G_d é cíclico, partindo do nó u em um instante t_w arbitrário podemos chegar à (u, t_a) através de não mais que $\tau - 1$ arestas temporais. Uma vez em (u, t_a) , a aresta (u, t_a, i_0, t_b) pode ser inserida no caminho. Nesse ponto, é possível chegar à (i_0, t_c) através de não mais de $\tau - 1$ arestas temporais, onde a aresta (i_0, t_c, i_1, t_d) pode ser inserida, e assim sucessivamente até que se chegue a (v, t_q) . A partir desse ponto, é possível atingir o nó v em qualquer instante de tempo através não mais de $\tau - 1$ arestas temporais. Com isso, mostramos que dado um par arbitrário de nós u e v e a existência de um caminho de u para v em G_A , existe um caminho de u em qualquer instante para v em qualquer instante em G_d . Como o par de nós e o caminho considerados são arbitrários, segue que G_d será estritamente conexo, se G_A for fortemente conexo. \square

3. Estruturas de dados

A principal mudança introduzida no modelo proposto para GVTs em relação ao modelo tradicional de grafo orientado vem da definição de arestas dinâmicas como quádruplas ordenadas (ver Seção 2.1). Isso impacta as estruturas de dados usadas para representar um GVT com nosso modelo. As estruturas em forma de lista, como uma lista de adjacências, são pouco afetadas pela definição de arestas dinâmicas introduzida em nosso modelo, sendo em geral suficiente que se acrescente as informações dos tempos de origem e destino para que as listas representem adequadamente um GVT conforme nosso modelo. Entretanto, as representações matriciais, tais como matrizes de adjacência, são mais fortemente impactadas pela definição de aresta dinâmica introduzida no modelo proposto. Como as arestas são representadas por quádruplas ordenadas, são necessárias quatro coordenadas para posicionar uma entrada. Portanto, a representação equivalente a uma matriz é feita por meio de um tensor de ordem superior a dois. Para facilitar a visualização e manipulação desses objetos, definimos a operação *Mat* [Lund e Bowers, 1992] que fornece uma representação matricial para esses tensores.

O GVT G_1 com quatro nós e três instantes de tempo apresentado na Figura 4 será utilizado para ilustrar através de exemplos as estruturas de dados para representação de GVTs descritos nesta seção. Note que esse GVT contém oito arestas temporais (tracejadas) e quatro arestas espaciais não direcionadas (contínuas). Cada aresta espacial não direcionada será representada por duas arestas espaciais contrapostas.

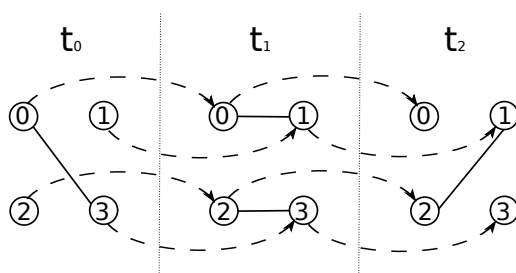


Figura 4. G_1 : GVT usado nos exemplos de estruturas de dados.

3.1. Tensor de adjacência

A matriz de adjacência é uma das formas mais comuns para representação de um grafo. Dada um GVT $G_d = (V, E, T, \Phi_w)$ com $n = |V|$ nós e $\tau = |T|$ instantes de tempo, o tensor de adjacência \mathbf{A}_G desse GVT é a generalização da matriz de adjacência para este modelo de GVTs onde uma aresta é representada por uma quádrupla ordenada da forma (u, t_p, v, t_q) . Na matriz de adjacência (estática), cada aresta (u, v) é representada colocando-se o valor 1 na entrada localizada na linha u , coluna v da matriz. Analogamente, no tensor de adjacência uma aresta (u, t_p, v, t_q) é representada colocando-se o valor 1 na entrada $\mathbf{A}_G[u, t_p, v, t_q]$ do tensor de adjacência. As entradas para as quais não há uma aresta dinâmica recebem o valor 0.

Pela representação das coordenadas de uma entrada do tensor de adjacência, nota-se que este é um tensor de quarta ordem. Considerando um GVT $G_d = (V, E, T, \Phi_w)$, temos que $E \subseteq V \times T \times V \times T$. Como consequência, a dimensão (número de entradas) do tensor de adjacência \mathbf{A}_G é $|V| \times |T| \times |V| \times |T|$, fazendo com que \mathbf{A}_G tenha um

total de $(n \times \tau)^2$ entradas. Com isso, é possível construir uma representação matricial de \mathbf{A}_G como uma matriz quadrada com $(n \times \tau)$ linhas e colunas. A forma mais natural de construir essa representação matricial é agrupando as entradas por instantes de tempo e ordenando pela ordem natural do conjunto de nós. Assim, a matriz resultante tem $\tau \times \tau$ blocos onde cada bloco tem $n \times n$ entradas correspondendo aos n nós do GVT em um determinado instante de tempo. A Figura 5 mostra a representação matricial do tensor de adjacência \mathbf{A}_G do GVT $G1$ (ver Figura 4). Através desse exemplo, observamos mais facilmente a estrutura da representação matricial do tensor de adjacência de um GVT.

$$\text{Mat}(\mathbf{A}_{G1}) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Figura 5. Forma matricial do tensor de adjacência do GVT $G1$.

Note que a estrutura da matriz $\text{Mat}(\mathbf{A}_G)$ é composta por $\tau \times \tau$ blocos (3×3 no caso do GVT $G1$), onde o bloco na linha t_p e coluna t_q contém as arestas com origem no instante t_p e destino no instante t_q . Como consequência imediata dessa estrutura, temos que os blocos da diagonal principal contém a representação das arestas espaciais, já que nestes blocos $t_p = t_q$. Os blocos acima da diagonal principal por blocos contém as entradas correspondentes às arestas temporais e mistas progressivas e os blocos abaixo da diagonal principal contém as entradas correspondentes às arestas temporais e mistas regressivas. Cada bloco é formado por $n \times n$ entradas correspondentes aos nós do GVT. Adotando a ordenação natural do conjunto V de nós do GVT, um nível adicional de estruturação é criado na representação matricial do tensor de adjacência. Essa ordenação faz com que as entradas nas diagonais principais dos blocos imediatamente acima da diagonal por blocos sejam as entradas correspondentes às arestas temporais progressivas do GVT. No exemplo da Figura 5 essas entradas estão destacadas e tem valor 1, representando a presença das arestas temporais progressivas de $G1$. As arestas simétricas a estas, marcadas nos blocos abaixo da diagonal principal por blocos correspondem às arestas temporais regressivas, tem valor 0 por não haver arestas deste tipo em $G1$.

Analisando a estrutura global da representação matricial do tensor de adjacência de um GVT, nota-se que essa matriz é consistente com a definição de uma matriz de adjacência de um grafo estático orientado. Dessa observação, segue o seguinte resultado.

Teorema 1. *Todo GVT com n nós e τ instantes de tempo é isomorfo a um grafo estático orientado com $n \times \tau$ nós.*

Demonstração. Seja $G = (V_G, E_G, T_G, \Phi_w)$ um GVT onde $|V_G| = n$ e $|T_G| = \tau$. Observe que $E_G \subseteq V_G \times T_G \times V_G \times T_G$ e consequentemente $|E_G| \leq (n \times \tau)^2$. Considere o

tensor de adjacência \mathbf{A}_G do GVT G e, em particular, sua forma matricial $Mat(\mathbf{A}_G)$, que é uma matriz quadrada com $n \times \tau$ linhas e colunas contendo a representação de todas as arestas dinâmicas de G . Seja $R = (V_R, E_R, \Phi_R)$ um grafo orientado com pesos tal que $|V_R| = n \times \tau$ e sua matriz de adjacência M_R (com $n \times \tau$ linhas e colunas) seja tal que $M_R[i, j] = Mat(\mathbf{A}_G)[i, j]$. Observe que $M_R = Mat(\mathbf{A}_G)$ e que, neste caso, os grafos representados por cada uma destas matrizes difere apenas na denominação (e interpretação) dos nós. Segue, portanto, da definição de isomorfismo de grafos que os grafos representados por $Mat(\mathbf{A}_G)$ e M_R são isomorfos. \square

Note que neste cenário, a representação de cada nó em cada instante de tempo é implicitamente tratada como um nó independente no modelo. Isso é consequência direta da operação de representação matricial no tensor de adjacência. Deve-se levar em conta que esta representação, e consequentemente este teorema, deve ser aplicado somente em situações onde considerar os nós em cada instante de tempo como independentes faça sentido. Um exemplo de situação onde naturalmente pode-se considerar os nós como independentes em cada instante de tempo é na análise de um passeio aleatório (*random walk*), onde a probabilidade de uma transição depende apenas das arestas presentes no instante onde a transição ocorrerá.

Este resultado teórico é importante, pois permite que — nas situações onde ele se aplica — os resultados conhecidos para grafos estáticos orientados possam ser aplicados diretamente para GVTs representadas pelo modelo proposto. Por exemplo, é possível utilizar alguns algoritmos conhecidos para cálculo de centralidade de nós em cada instante de tempo. Note também que os conceitos de caminho, caminho mínimo e distância entre dois nós em instantes de tempo definidos são consistentes com este resultado.

É importante notar que tanto o tensor de adjacência como também sua representação matricial são em geral bastante esparsos. Tanto a forma tensorial quanto a matricial tem um total de $(n \times \tau)^2$ entradas, das quais apenas $|E|$ são diferentes de 0. No caso particular onde se convencionou utilizar apenas arestas espaciais e temporais, o número máximo de entradas diferentes de 0 é $[(n^2 - n) \times \tau] + [n \times (\tau - 1)]$, que é obtido quando em cada instante de tempo se tem um grafo estático completo e as arestas temporais ligando cada nó em cada instante de tempo.

3.2. Tensor de incidência

O tensor de incidência é a generalização para o modelo de GVTs da matriz de incidência de um grafo estático orientado. Na matriz de incidência, cada aresta é representada por uma coluna e cada nó é representado por uma linha. Em cada coluna (aresta), se registra com -1 a entrada correspondente ao nó de origem e 1 a entrada correspondente ao nó de destino. As demais entradas são preenchidas com 0.

No caso de GVT, cada aresta pode ligar nós no mesmo instante de tempo e também nós em instantes de tempo distintos. Nesta representação cada entrada precisa ser identificada com três coordenadas distintas (nó, aresta, instante). Consequentemente, esta estrutura de dados será representada por um tensor de terceira ordem, onde cada entrada é identificada por uma aresta, um nó e um instante de tempo. O tensor de incidência tem dimensão $n \times e \times \tau$, onde $n = |V|$ é o número de nós do GVT, $e = |E|$ é o número de arestas e $\tau = |T|$ é o número de instantes de tempo do GVT. Dado o tensor de incidência

C_G de um GVT G , cada aresta $e = (u, t_p, v, t_q)$ do GVT é representada colocando-se o valor -1 na entrada $C_G[u, e, t_p]$ e o valor 1 na entrada $C_G[v, e, t_q]$, onde e é a coordenada que identifica a aresta representada. As demais entradas do tensor tem valor 0 .

Por exemplo, considerando o GVT G_1 (ver Figura 4), no instante t_0 existe uma aresta não direcionada ligando os nós 0 e 3 . Esta aresta não direcionada será representada por duas arestas espaciais, $e_a = (0, 0, 3, 0)$ e $e_b = (3, 0, 3, 0)$. Sem perda de generalidade, vamos considerar que e_a seja numerada como aresta 8 e e_b como aresta 9 . Assim, as entradas correspondentes em C_{G_1} serão $C_{G_1}[0, 8, 0] = -1$, $C_{G_1}[3, 8, 0] = 1$, $C_{G_1}[3, 9, 0] = -1$ e $C_{G_1}[0, 9, 0] = 1$. Note que o GVT G_1 tem 16 arestas, sendo 8 arestas temporais ligando cada nó no tempo e 8 arestas espaciais representando as quatro arestas não direcionadas do GVT. Portanto o tensor de incidência desse GVT tem $4 \times 16 \times 3 = 192$ entradas, das quais 160 terão valor 0 , 16 terão valor -1 e 16 terão valor 1 .

Para definir a operação Mat para o tensor de incidência, considerando apenas as duas primeiras coordenadas do tensor, temos uma matriz cujas linhas representam os nós e as colunas representam as arestas do GVT. Note que temos uma matriz dessa forma para cada instante de tempo. A construção da forma matricial do tensor de incidência será feita simplesmente empilhando verticalmente estas matrizes em ordem crescente de instantes de tempo. Desta forma, um tensor com dimensão $n \times e \times \tau$ será representado por uma matriz (em geral retangular) com dimensão $(n \times \tau)$ linhas e e colunas. Todas as entradas do tensor original estarão presentes na sua forma matricial. Por exemplo, a forma matricial do tensor de incidência do GVT G_1 tem 12 linhas e 16 colunas.

Na Figura 6, apresentamos a forma matricial $Mat(C_{G_1})$ do tensor de incidência C_{G_1} do GVT G_1 . As colunas 0 a 7 representam as oito arestas temporais. As colunas 8 e 9 representam a aresta espacial não orientada entre os nós 0 e 3 no instante t_0 , as colunas 10 e 11 representam a aresta espacial não orientada entre os nós 0 e 1 no instante t_1 , as colunas 12 e 13 representam a aresta espacial não orientada entre os nós 2 e 3 no instante t_2 e as colunas 14 e 15 representam a aresta espacial não orientada entre os nós 1 e 2 no instante t_2 . As linhas 0 a 3 representam os quatro nós no instante t_0 , as linhas 4 a 7 representam os nós no instante t_1 e as linhas 8 a 11 representam os nós no instante t_2 .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccccccccc}
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{t}_0 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{t}_1 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccccccccccccccc}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{t}_2 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccccccccc}
 \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_9 & \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_{13} & \mathbf{e}_{14} & \mathbf{e}_{15}
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 6. Forma matricial do tensor de incidência do GVT G_1 .

$Mat(C_{G_1})$ tem dimensão $(4 \times 3) \times 16 = 12 \times 16$ e possui todas as propriedades de uma matriz de incidência de um grafo estático orientado com 12 nós e 16 arestas. Portanto, as propriedades do tensor de incidência necessárias para representar o GVT são preservadas nessa estrutura. Entretanto, deve-se considerar que, na forma matricial do tensor de incidência, cada nó é representado τ vezes, onde τ é o número de instantes de tempo definidos no GVT (3 no GVT G_1 da Figura 4), o que não ocorre na forma tensorial.

Assim como no caso da representação matricial do tensor de adjacência, a representação matricial do tensor de incidência em nosso modelo proposto também é compatível com a matriz de incidência de um grafo estático orientado.

4. Discussão

Nesta seção, apresentamos uma análise dos trabalhos relacionados e como nossa proposta os representa, fundamentando sua generalidade e aplicabilidade.

Grafos evolutivos, como propostos em [Xuan et al., 2003, Ferreira, 2004], são modelados como um grafo agregado e uma sequência de sub-grafos onde cada um deles representa a condição da rede em um determinado instante de tempo. Esse modelo de grafos evolutivos pode ser representado no nosso modelo proposto neste trabalho, uma vez que cada sub-grafo representa apenas as arestas espaciais presentes em cada instante de tempo. A representação do grafo evolutivo gera τ componentes independentes onde cada um deles é restrito a um único intervalo de tempo. O conceito de grafo evolutivo pode ser estendido através de adição de arestas temporais representando as conexões implícitas.

De forma similar, redes temporais [Holme, 2005, Holme e Saramäki, 2012] são definidas como sendo uma sequência de triplas ordenadas da forma (i, j, t) que representam o contato entre os nós i e j no instante t . Essa definição é equivalente às arestas espaciais propostas em nosso modelo, de forma que essas redes temporais podem ser representadas e estendidas através da adição explícita de arestas temporais.

Os trabalhos [Leskovec et al., 2005, Tang et al., 2009, Tang et al., 2010, Figueiredo et al., 2012] representam redes dinâmicas por meio uma sequência de *snapshots* que representam a rede em cada instante de tempo. Esse modelo pode ser representado em nosso modelo usando apenas arestas espaciais. Pode-se ainda estender o modelo pela adição de arestas temporais, explicitando as relações de tempo presentes entre *snapshots* consecutivos.

O trabalho [Kostakos, 2009] utiliza o conceito de arestas temporais e espaciais com pesos, porém estes conceitos não são formalizados de forma sistemática. Os grafos temporais propostos podem ser facilmente representados em nosso modelo.

Em [Pan e Saramäki, 2011], os eventos numa rede temporal são representados por uma quádrupla da forma $e_1 = (i, j, t_1, \delta t_1)$, onde i e j são os nós envolvidos no evento, t_1 é o instante inicial do evento e δt_1 é a duração do evento. Esse tipo de rede temporal também não utiliza o conceito de arestas temporais, podendo ser representado em nosso modelo pelo uso de arestas espaciais com a duração do evento indicada pelo peso dessas arestas. Entretanto, o uso de arestas temporais, tais como propostas em nosso modelo, pode simplificar e estender essa representação de rede temporal.

O modelo de grafo temporal utilizado em [Nicosia et al., 2012] também utiliza uma sequência de grafos e define uma noção de matriz de adjacência dependente do tempo que é equivalente a construir uma matriz de adjacência estática para cada instante de tempo. Esta representação também não utiliza o conceito de arestas temporais, que adotamos em nosso modelo.

O modelo apresentado em [Pfitzner et al., 2012] propõe a transformação de um grafo temporal da forma de sequência de *snapshots* para um formato que utiliza apenas arestas mistas. Esse trabalho se encontra em uma fase inicial e também o uso exclusivo

de arestas mistas é restritivo no sentido de não permitir a representação de eventos em um instante de tempo definido.

5. Conclusão e trabalhos futuros

Neste artigo, apresentamos uma proposta de um novo modelo para grafos variantes no tempo (GVTs). Nós formalizamos conceitos básicos, tais como aresta dinâmica, caminhos e conectividade. O modelo proposto é suficientemente geral para ser capaz de representar vários casos distintos de redes dinâmicas apresentados na literatura recente. Além disso, o modelo proposto permite que se crie uma base formal para a análise de GVTs (e consequentemente de redes dinâmicas) de forma mais ampla. Em suma, a contribuição deste artigo situa-se na proposição desse novo modelo para GVTs bem como no embasamento teórico que fundamenta sua generalidade e aplicabilidade.

Em cenários onde os nós podem ser considerados como distintos em cada instante de tempo, o Teorema 1 permite que a teoria desenvolvida para redes estáticas direcionadas possa ser diretamente aplicada a GVTs. Como exemplo de cenários dessa natureza, pode-se pensar em situações onde se utilize passeios aleatórios ou então centralidades que consideram os caminhos mínimos entre todos os pares de nós da rede.

Acreditamos que nossa proposta de novo modelo para GVTs abre perspectivas para motivar uma série de estudos complementares, que pretendemos investigar como trabalhos futuros. Por exemplo, pretendemos formalizar e analisar as propriedades topológicas e algébricas do modelo, em particular em contextos onde o Teorema 1 não se aplica. Além disso, pretendemos também investigar o uso do modelo proposto em diversas aplicações, tais como a definição de medidas de centralidade adequadas para redes dinâmicas, a construção de redes dinâmicas sintéticas com propriedades específicas como mundo pequeno e escala livre que sejam preservadas apesar do comportamento dinâmico da rede e a construção de modelos de difusão de informação específicos para redes dinâmicas.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPERJ, CNPq e MCTI. Os autores agradecem a Éric Fleury (ENS-Lyon/INRIA, França) por comentários em versões preliminares desse trabalho.

Referências

- Alvarez-Hamelin, J. I., Fleury, E., Vespignani, A., e Ziviani, A. (2012). Complex dynamic networks: Tools and methods (guest editorial). *Computer Networks*, 56(3):967–969.
- Ferreira, A. (2004). Building a reference combinatorial model for MANETs. *IEEE Network*, 18(5):24–29.
- Figueiredo, D., Nain, P., Ribeiro, B., de Souza e Silva, E., e Towsley, D. (2012). Characterizing continuous time random walks on time varying graphs. In *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, volume 40, page 307.
- Graham, R., Knuth, D., e Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA.

- Holme, P. (2005). Network reachability of real-world contact sequences. *Physical Review E*, 71(4):1–8.
- Holme, P. e Saramäki, J. (2012). Temporal networks. *Physics Reports*, 519(3):97–125.
- Kempe, D., Kleinberg, J., e Kumar, A. (2002). Connectivity and Inference Problems for Temporal Networks. *Journal of Computer and System Sciences*, 64(4):820–842.
- Kim, H. e Anderson, R. (2012). Temporal node centrality in complex networks. *Physical Review E*, 85(2):026107.
- Kostakos, V. (2009). Temporal graphs. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(6):1007–1023.
- Leskovec, J., Kleinberg, J., e Faloutsos, C. (2005). Graphs over time. In *Proc. of the ACM Int. Conference on Knowledge Discovery in Data Mining (KDD)*, pages 177–187.
- Lund, J. e Bowers, K. (1992). *Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, PA, USA.
- Nicosia, V., Tang, J., Musolesi, M., Russo, G., Mascolo, C., e Latora, V. (2012). Components in time-varying graphs. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(2):023101.
- Pan, R. e Saramäki, J. (2011). Path lengths, correlations, and centrality in temporal networks. *Physical Review E*, 84(1):1–10.
- Pfützner, R., Scholtes, I., Tessone, C., Garas, A., e Schweitzer, F. (2012). Time-explicit graphs: A framework for dynamic network analysis. In *Summer School for Master and PhD Students on Modeling and Analysis of Novel Mechanisms in Future Internet Applications*, Würzburg, Germany.
- Sengul, C., Viana, A. C., e Ziviani, A. (2012). A survey of adaptive services to cope with dynamics in wireless self-organizing networks. *ACM Computing Surveys*, 44(4):23:1–23:35.
- Tang, J., Musolesi, M., Mascolo, C., e Latora, V. (2009). Temporal distance metrics for social network analysis. In *Proc. of the ACM Workshop on Online Social Networks (WOSN)*, pages 31–36. ACM Press.
- Tang, J., Musolesi, M., Mascolo, C., Latora, V., e Nicosia, V. (2010). Analysing information flows and key mediators through temporal centrality metrics. In *Proc. of the Workshop on Social Network Systems (SNS)*, pages 1–6. ACM Press.
- Xuan, B. B., Ferreira, A., e Jarry, A. (2003). Evolving graphs and least cost journeys in dynamic networks. In *Proc. of the Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks (WiOpt)*.