

Uma Proposta para a Porta Toffoli usando QND para Qubits baseados em Polarização e suas Aplicações

Samy C. Policarpo¹, João Batista R. Silva¹

¹Depart. de Engenharia de Teleinformática – Universidade Federal do Ceará (UFC)
Caixa Postal – 60.440 - 900 – Fortaleza – CE – Brazil

samycleverp@gmail.com, joaobrs@ufc.br

Abstract. *An optical apparatus to implement the Toffoli gate is presented for polarization-based qubits using quantum non-demolition measurement (QND) with a probability of success of 0.95 (19/20) using real optical devices. From this apparatus it is possible to implement universal gates for reversible classical and quantum computing.*

Resumo. *Um aparato óptico para implementar a porta Toffoli é apresentado para qubits baseados em polarização usando medição quântica não demolidora (QND) com uma probabilidade de sucesso de 0,95 (19/20) usando dispositivos ópticos reais. A partir deste aparato é possível implementar portas universais para computação quântica e clássica reversível.*

1. Introdução

A versatilidade da porta Toffoli [Toffoli 1980] torna-a uma porta quântica de múltiplos qubits muito desejável em sua implementação para computação quântica em larga escala [Nielsen 2002], [Gottesman 1998]. Quando associada a portas de um qubit, a porta Toffoli é universal para processamento de informações quânticas. Infelizmente, implementar uma porta Toffoli de alta fidelidade é difícil, pois envolve interação não linear de três qubits. A implementação da porta Toffoli com apenas portas de um qubit e de dois qubits requer seis portas NOT controladas (CNOT) e dez operações de um qubit [Barenco 1995]. Apesar da dificuldade de implementação, a porta Toffoli foi implementada com: ressonância magnética nuclear [Cory 1998], óptica linear [Lanyon 2009], sistemas de armadilha de íons [Monz 2009] e circuitos supercondutores [Mariantoni 2011], [Fedorov 2012].

Portanto, neste trabalho apresentamos uma nova proposta para implementar a porta Toffoli para qubits de polarização usando medição quântica não demolidora (QND) baseado em [Lin 2009]. Este trabalho está dividido nas seguintes seções: a Seção 2 apresenta um sistema óptica capaz de implementar a porta Toffoli para qubits baseados em polarização usando QND, é analisada seu desempenho com uso de dispositivos ópticos reais e que é possível usá-lo para implementar outras operações lógicas reversíveis; e na Seção 3 são apresentadas as conclusões.

2. Sistema óptica da porta Toffoli

A porta Toffoli (porta C^2 -NOT) é uma porta reversível de 3 qubits que realiza a

operação NOT no terceiro qubit somente quando os dois primeiros qubits são $|1\rangle$ e, caso contrário, nenhuma inalteração é feita. A representação do circuito da porta C²-NOT, sua tabela verdade e matriz são mostradas na Figura 1, respectivamente. As portas Toffoli e Hadamard são universais para computação quântica [Aharonov 2003].

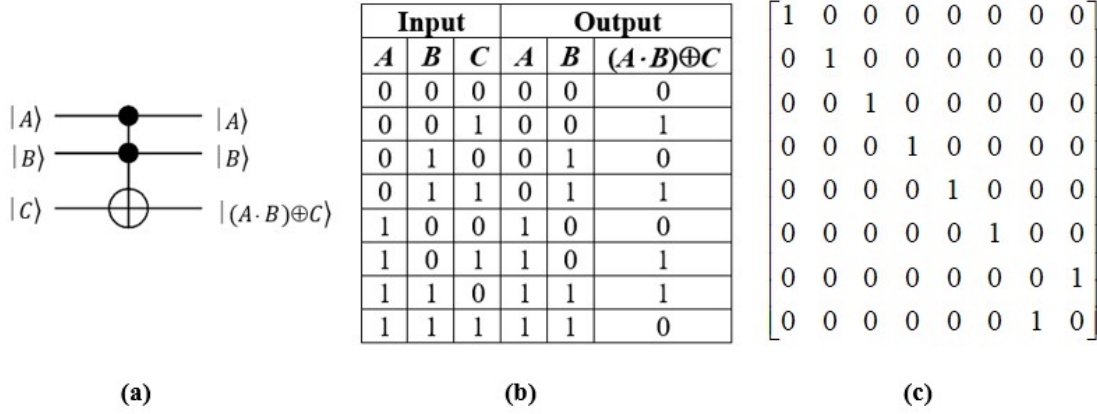


Figura 1. (a) circuito, (b) tabela verdade e (c) forma matricial que representa uma porta Toffoli.

Um elemento essencial usado neste trabalho para implementar a porta Toffoli é uma medição quântica não demolidora (QND) que pode introduzir uma fase θ ao estado coerente $|\alpha\rangle$ quando este e um único fóton $|1\rangle$ propagam em um meio com alta não-linearidade cruzada de Kerr, conforme mostrado na Figura 2. O estado coerente $|\alpha\rangle$ (teste) sobre uma mudança de fase que depende do tempo de interação t e da força do coeficiente não linear:

$$e^{iH_{QND}/\hbar} |1\rangle_s |\alpha\rangle_p = |1\rangle_s |\alpha e^{i\theta}\rangle_p. \quad (1)$$

Em (1) $H_{QND} = \hbar\kappa a_s^\dagger a_s a_p^\dagger a_p$ é o Hamiltoniano, κ é a força da não linearidade, $a_s^\dagger (a_s)$ são os operadores de criação (aniquilação) do modo de sinal, enquanto $a_p^\dagger (a_p)$ é o operador de criação (aniquilação) do modo de teste. A condição $\theta = kt > \pi/(2\langle n \rangle^{1/2})$ deve ser satisfeita [Grangier 1998], [Kok 2002], onde $\langle n \rangle = |\alpha|^2$ é o número médio de fótons do estado coerente $|\alpha\rangle$. Portanto, a amplitude do estado coerente α deve ser grande o suficiente para obedecer à condição $|\alpha|\kappa t \gg 1$.

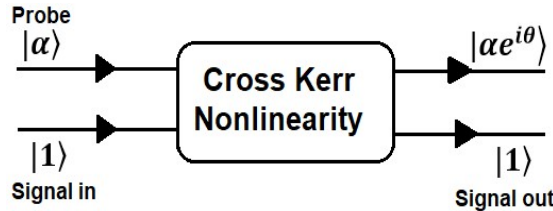


Figura 2. O estado coerente sofre um deslocamento de fase θ devido à copropagação com o fóton único em um meio com alta não linearidade cruzada de Kerr.

A configuração óptica básica capaz de implementar a porta Toffoli para qubit baseado em polarização usando medição quântica não demolidora (QND) é mostrada na Figura 3. Este sistema tem: dois divisores de feixe balanceados (BS), quatro divisores de feixe de polarização (PBS), dois rotadores de polarização (R), dois fotodetectores (D₁

e D_2), dois meios do tipo mostrado na Figura 2 (θ_A e θ_B) e um circuito de decisão (DC). O subsistema $R(\pi/2) - \text{PBS}_2 - D_1/D_2$ funciona com um polarímetro que mede o parâmetro de Stokes S_1 do estado bimodal coerente $|\alpha, \beta\rangle_{HV}$ onde

$$\langle \hat{S}_1 \rangle = |\alpha|^2 - |\beta|^2. \quad (2)$$

Dependendo do resultado medido por este polarímetro, o DC ligará ou não $R_1(\pi/2)$ que funciona como uma porta NOT no qubit $|C\rangle$ baseado em polarização. As informações lógicas '0' e '1' são codificadas nos estados de polarização ortogonal (H -horizontal e V -vertical) para qubit único, ou seja, o bit '0' é representado por $|H\rangle$ ($|H\rangle = |0\rangle$) e o bit '1' para $|V\rangle$ ($|V\rangle = |1\rangle$).

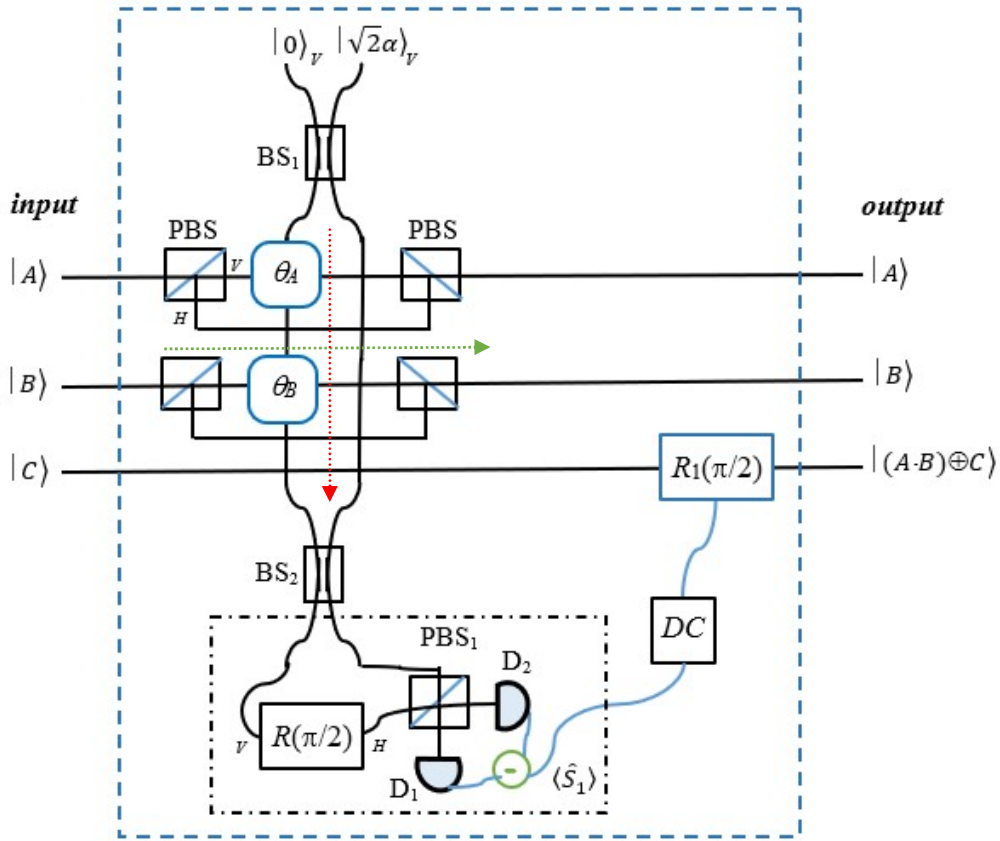


Figura 3. O esquema óptico baseado em fibra que é possível implementar a porta Toffoli para qubit baseado em polarização usando medição quântica não demolidora.

Conforme mostrado na Figura 3, os estados de entrada $|A\rangle$ e $|B\rangle$ são os qubits de controle e o estado $|C\rangle$ é o qubit alvo da porta Toffoli, todos se propagam da esquerda para direita (sentido da seta na cor verde). O estado coerente bimodal, que se propaga de cima para baixo (sentido da seta na cor vermelha), antes do BS_2 é $|\alpha e^{j\Sigma\theta}, \alpha\rangle_{VV}$, após a interação com $|A\rangle$ ($|B\rangle$) que se propagou através do caminho $\text{PBS} - \theta_A$ (θ_B) - PBS , e após sofrer interferência em BS_2 e antes de PBS_1 ser

$$\left| \alpha \left(\frac{e^{j\Sigma\theta} + 1}{\sqrt{2}} \right), \alpha \left(\frac{e^{j\Sigma\theta} - 1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle_{HV}, \quad (3)$$

onde $\Sigma\theta = \theta_A + \theta_B$ se $|A\rangle = |V\rangle$ ($\theta_A \neq 0$) e $|B\rangle = |V\rangle$ ($\theta_B \neq 0$) ou $\Sigma\theta = \theta_A$ ($\Sigma\theta = \theta_B$) se $|A\rangle = |V\rangle$ e $|B\rangle = |H\rangle$ ($|A\rangle = |H\rangle$ e $|B\rangle = |V\rangle$), caso contrário, $\Sigma\theta = 0$ se $|A\rangle = |H\rangle$ e $|B\rangle = |H\rangle$. Aplicando (3) em (2), o valor médio medido de $\langle \hat{S}_1 \rangle$ é

$$S_1 = \langle \hat{S}_1 \rangle = 2|\alpha|^2 \cos(\Sigma\theta). \quad (4)$$

Em (4) podemos observar que se $\theta_A = \theta_B = \pi/2$ ($\Sigma\theta = \pi$) implica que $S_1 < 0$, ou seja, ambos os qubits de controle, $|A\rangle$ e $|B\rangle$ são iguais a $|V\rangle$, então o circuito de decisão DC, conforme mostrado na Figura 3, ativa o rotacionador de polarização R_1 (porta NOT) para alterar o estado de polarização do qubit alvo $|C\rangle$. Se $S_1 \geq 0$, R_1 permanece desligado. Assim, o circuito mostrado na Figura 3 é capaz de implementar a porta Toffoli para qubits baseados em polarização.

Se considerarmos que apenas dispositivos Kerr cruzado são dispositivos reais e podem introduzir uma variação global de fase δ , então podemos calcular a probabilidade de sucesso do sistema proposto na Figura 3. De (3), o estado na saída na Figura 3, antes da medição S_1 , será $|\Psi_{AB\delta}\rangle = |AB\rangle\alpha(e^{i(\Sigma\theta\pm\delta)}+1)/\sqrt{2}|\alpha(e^{i(\Sigma\theta\pm\delta)}-1)/\sqrt{2}\rangle_{HV}$. Então a probabilidade de sucesso P_s será dada por:

$$P_s = \frac{1}{4}(\langle \Psi_{HH0} | \rho_{HH\delta} | \Psi_{HH0} \rangle + \langle \Psi_{HV0} | \rho_{HV\delta} | \Psi_{HV0} \rangle + \langle \Psi_{VH0} | \rho_{VH\delta} | \Psi_{VH0} \rangle + \langle \Psi_{VV0} | \rho_{VV\delta} | \Psi_{VV0} \rangle), \quad (5)$$

onde $\rho_{AB\delta} = |\Psi_{AB\delta}\rangle\langle\Psi_{AB\delta}|$ é a matriz de densidade de $|\Psi_{AB\delta}\rangle$ para $\delta \neq 0$. Assim, para fotodetectores com uma probabilidade de escuro p_d e eficiência quântica η , de (5) temos

$$P_s = \frac{(1-p_d)^2}{2} e^{-4|\alpha|^2 \sin^2(\delta/2)} \left[\left(1 - e^{-2|\alpha|^2 \eta \cos^2(\delta/2)} \right) e^{-2|\alpha|^2 \eta \sin^2(\delta/2)} + \left(1 - e^{-2|\alpha|^2 \eta [1+\sin(\delta)]} \right) \left(1 - e^{-2|\alpha|^2 \eta [1-\sin(\delta)]} \right) \right]. \quad (6)$$

Em (6) podemos inferir que o nosso esquema pode ter uma probabilidade de sucesso de 19/20 (para $\delta = 0,04$ radianos com $|\alpha|^2 = 25$, $p_d = 10^{-6}$ e $\eta = 0,9$) em comparação ao esquema proposto por Lin *et al.* [Lin 2009] que apresentou uma probabilidade de sucesso de 2/23.

A porta Toffoli mostrada na Figura 3 pode ser usada para simular portas lógicas clássicas irreversíveis, por exemplo: se $|C\rangle = |H\rangle$, o sistema implementa a função AND reversível para dois qubits; se $|C\rangle = |V\rangle$, o sistema implementa a função NAND reversível; e se $|A\rangle = |V\rangle$ e $|C\rangle = |H\rangle$, temos uma FANOUT. Com essas duas últimas operações, é possível simular todos os outros elementos em um circuito clássico e, portanto, um circuito clássico arbitrário pode ser simulado por um circuito reversível equivalente [Nielsen 2002].

3. Conclusão

Este trabalho apresentou um sistema óptico usando QND que implementa uma porta Toffoli para qubits baseados em polarização com um desempenho de 95% para dispositivos ópticos ativos reais e $|\alpha|^2 = 25$. Além das portas descritas (AND e NAND reversíveis) que são possíveis de implementar com o sistema proposto, também é possível usá-lo para simular a porta FANOUT que combinada com a NAND são portas universais para computação reversível.

4. Referências

- Aharonov, Dorit. “A Simple Proof that Toffoli and Hadamard are Quantum Universal”, arXiv:quant-ph/0301040, (2003-01-09).
- Barenco, A. *et al.* “Elementary gates for quantum computation”, Phys. Rev. A 52, 3457–3467 (1995).
- Cory, D. G. *et al.* “Experimental quantum error correction”, Phys. Rev. Lett. 81, 2152–2155 (1998).
- Fedorov, A., Steffen, L., Baur, M. *et al.* “Implementation of a Toffoli gate with superconducting circuits”, Nature 481, 170–172 (2012).
- Gottesman D., “Theory of fault-tolerant quantum computation”, Phys. Rev. A 57, 127, (1998).
- Lanyon, B. P. *et al.* “Simplifying quantum logic using higher-dimensional Hilbert spaces”, Nature Phys. 5, 134–140 (2009).
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L., “Quantum Computation and Quantum Information”, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2002.
- Mariantoni, M., *et al.*, “Implementing the quantum von Neumann architecture with superconducting circuits”, Science 334, 61–65 (2011).
- Monz, T. *et al.*, “Realization of the quantum Toffoli gate with trapped ions”, Phys. Rev. Lett. 102, 040501 (2009).
- Grangier, P., Levenson, J. A. and Poizat, JP., “Quantum non-demolition measurements in optics”, Nature, 396, 537, 1998.
- Kok, P., Lee, H. and Dowling, J. P., “Single-photon quantum-nondemolition detectors constructed with linear optics and projective measurements”, Phys. Rev. A, 66, 063814, 2002.
- Toffoli T., “Reversible Computing Automata”, Languages and Programming (Lecture Notes in Computer Science vol 85) ed. J. W. de Bakker and J. van Leeuwen (Berlin: Springer), 1980, pp 632–44.
- Lin, Q. and Li, J., “Quantum control gates with weak cross-Kerr nonlinearity”, Phys. Rev. A 79, 022301 – Published 2 February 2009.