

Purificação Quântica, Rejuvenescimento e Disponibilidade

Diego Abreu², David Tavares², Antônio Abelém², Daniel Sadoc Menasche¹

¹ Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

² Universidade Federal do Pará - UFPA

{david.tavares,diego.abreu@itec.ufpa.br},abelem@ufpa.br, sadoc@land.ufrj.br

Resumo. *Redes de distribuição de entrelaçamento quântico dependem fortemente da purificação do emaranhamento para manter a alta fidelidade dos estados quânticos entrelaçados. Abordagens tradicionais para o agendamento da purificação frequentemente negligenciam a disponibilidade da rede durante os processos de purificação. Este artigo propõe uma nova perspectiva ao considerar o tempo em que a purificação é executada como um período de indisponibilidade para as partes afetadas da rede. Ao aplicar princípios de rejuvenescimento de software, buscamos maximizar a disponibilidade da rede. Nossa principal contribuição é o desenvolvimento de um modelo de cadeia de Markov que captura os efeitos da purificação sobre o tempo de inatividade do sistema, considerando tanto o tempo sob falha quanto o tempo sob rejuvenescimento.*

1. Introdução

Redes quânticas de distribuição de entrelaçamento são fundamentais para o avanço da comunicação segura e da computação quântica distribuída. Um dos principais desafios na manutenção dessas redes é garantir a alta fidelidade dos estados entrelaçados, que podem se degradar ao longo do tempo devido a ruídos ambientais e outros fatores. Esse processo de degradação é conhecido como *decoerência quântica*. Uma forma de combater essa degradação é por meio da purificação do emaranhamento.

Trabalhos recentes [Xiao et al. 2024] têm-se concentrado em otimizar o agendamento da purificação do emaranhamento em redes quânticas. Tavares et al. [Tavares et al. 2025] abordam a purificação em redes com canais heterogêneos, modelando erros do tipo bit-flip e Werner. Esses estudos propõem estratégias para determinar os melhores momentos e métodos de purificação a fim de melhorar o desempenho geral da rede. Uma direção complementar é explorada no trabalho de Mobayenjarihani et al. [Mobayenjarihani et al. 2023], que introduz protocolos de purificação otimistas com o objetivo de reduzir a decoerência de memória, minimizando a latência de comunicação clássica durante a purificação.

Neste trabalho, focamos no *trade-off* amplo entre rejuvenescimento e custo associado à indisponibilidade dos qubits durante as etapas de purificação. Para lidar com essa questão, buscamos inspiração na área de rejuvenescimento de software. Huang et al. [Huang et al. 1995] introduziram o conceito de *rejuvenescimento de software*, que consiste em reiniciar ou atualizar periodicamente sistemas de software para evitar falhas causadas pelo envelhecimento. Ao enxergar o processo de purificação como uma forma de rejuvenescimento, podemos aplicar estratégias semelhantes para maximizar a disponibilidade de redes quânticas. No restante deste trabalho, utilizamos os termos *rejuvenescimento* e *purificação* de forma intercambiável.

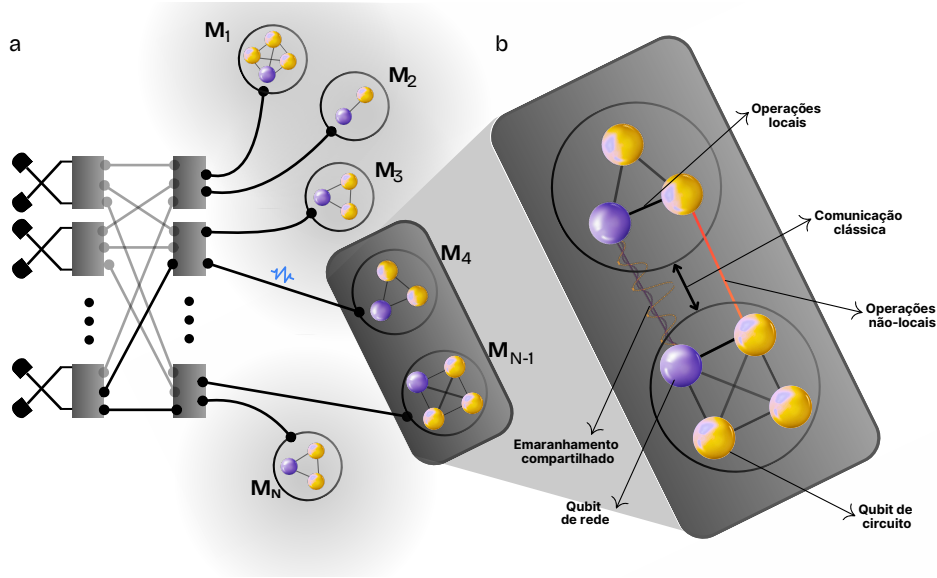


Figura 1. Purificação em arquitetura quântica distribuída [Main et al. 2025].

Nosso principal *trade-off* envolve o número de rodadas de purificação, n , a taxa com que a purificação é executada, r_4 , e o tempo de inatividade do sistema. Quando n e r_4 aumentam, a taxa de falhas diminui. No entanto, a principal mensagem deste artigo é que isso não necessariamente reduz o tempo de inatividade — que é o nosso objetivo final —, pois esse tempo é função tanto do período sob falha quanto do período sob rejuvenescimento, assumindo-se que o sistema está indisponível em ambos os casos.

2. Modelo de Rejuvenescimento

O processo de purificação é um elemento central na gestão do emaranhamento em sistemas quânticos distribuídos. Conforme demonstrado em experimentos recentes, como em [Main et al. 2025], a purificação melhora o desempenho e a escalabilidade de protocolos de portas baseados em teletransporte, possibilitando o emaranhamento determinístico e de alta fidelidade entre módulos distantes em uma rede quântica. Conforme ilustrado na Figura 1, a arquitetura envolve uma sequência de módulos que executam colaborativamente a purificação por meio de operações quânticas locais, comunicação clássica e uso de emaranhamento compartilhado. Cada módulo contém qubits de rede e de circuito, onde o emaranhamento é inicialmente gerado entre os qubits de rede e, posteriormente, utilizado para aumentar a fidelidade por meio de operações não locais aplicadas aos qubits de circuito.

Neste trabalho, adotamos a perspectiva de que a purificação deve ser tratada como um processo de rejuvenescimento, análogo à manutenção proativa em sistemas clássicos. Essa interpretação nos permite modelar o período de purificação como um estado de indisponibilidade dentro de um arcabouço de Cadeia de Markov, permitindo uma análise unificada do comportamento do sistema sob falha e rejuvenescimento. Compreender como o número de rodadas de purificação (n) e sua taxa de agendamento (r_4) afetam o tempo total de inatividade do sistema é fundamental para equilibrar fidelidade e disponibilidade. O modelo de rejuvenescimento proposto fornece o formalismo necessário para explorar esse *trade-off* e orientar o desenho de estratégias de purificação que sejam não

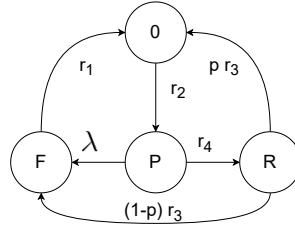


Figura 2. Modelo de Envelhecimento e Rejuvenescimento.

apenas eficazes, mas também conscientes da disponibilidade.

O modelo correspondente, baseado em Cadeia de Markov em tempo contínuo, é ilustrado na Figura 2. A partir do estado inicial 0, o sistema transita para o estado P , onde se torna suscetível a falhas. Neste estado, dois eventos podem ocorrer em competição: falha, que ocorre à taxa λ , e rejuvenescimento, iniciado à taxa r_4 . Uma vez iniciado o rejuvenescimento, o sistema move-se para o estado R , onde o processo de rejuvenescimento ocorre. Este processo requer, em média, $1/r_3$ unidades de tempo e possui uma probabilidade de sucesso p . Se o rejuvenescimento falhar, com probabilidade $1 - p$, o sistema transita para o estado de falha F à taxa $(1 - p)r_3$. A partir dos estados terminais, o sistema retorna a 0 por dois caminhos distintos: se houver falha e o sistema entrar em F , ele é restaurado para 0 à taxa de reparo r_1 ; alternativamente, se o rejuvenescimento for bem-sucedido, o sistema retorna a 0 a partir de R à taxa pr_3 .

Um aspecto-chave deste modelo é a *trade-off* entre a duração do rejuvenescimento, a confiabilidade do sistema e o custo de recuperação. Primeiro, o tempo do processo de rejuvenescimento, dado por $1/r_3$, define quanto tempo o sistema permanece indisponível no estado R . Segundo, a taxa de falha λ tende a aumentar quando o rejuvenescimento é realizado com mais frequência, porém com purificação menos rigorosa, o que reduz $1/r_3$. Terceiro, o tempo médio necessário para a recuperação total de uma falha, definido como $1/r_1$, é considerado fixo e representa o pior caso de inatividade. Os parâmetros r_2 , r_3 e λ dependem diretamente da estratégia de purificação adotada. Estratégias de purificação mais agressivas aumentam a fidelidade dos pares entrelaçados, reduzindo assim r_2 e λ , mas também reduzem r_3 , levando a períodos mais longos de rejuvenescimento e maior indisponibilidade do sistema. Por outro lado, abordagens de purificação mais leves resultam em fidelidade menor, aumentando r_2 e λ , mas permitem tempos de rejuvenescimento mais curtos devido a um maior r_3 .

Assumimos que a taxa de reparo r_1 é constante e definida externamente. A taxa de rejuvenescimento r_4 é tratada como uma variável de controle, permitindo o ajuste dinâmico do momento em que o rejuvenescimento é tentado. O modelo captura duas causas integradas de falha: a primeira é a decoerência progressiva do sistema, representada pelo caminho $0 \rightarrow P \rightarrow F$; a segunda decorre da natureza probabilística da purificação do emaranhamento, que pode falhar mesmo após o início do rejuvenescimento, como capturado pelo caminho $P \rightarrow R \rightarrow F$. Este modelo de Markov captura ambos os mecanismos de falha de forma unificada e serve de base para as análises desenvolvidas nas seções seguintes.

Métrica de interesse. Neste trabalho, adotamos uma abordagem baseada em rejuvenescimento para definir o número de iterações de purificação n . A métrica cen-

Tabela 1. Tabela de notação

Símbolo	Rejuvenescimento	Purificação	Valor padrão
$1/r_1$	Tempo médio de reparo após falha	Tempo médio de recuperação após falha no entrelaçamento	varia em faixa de interesse
$1/r_2$	Tempo médio até o sistema se tornar propenso a falhas	Tempo médio até a fidelidade cair abaixo de um limiar	f_n
$1/r_3$	Tempo médio de finalização do rejuvenescimento	Tempo médio de conclusão de uma rodada de purificação	$1/g_n$
r_4	Taxa com que o rejuvenescimento é iniciado	Frequência de agendamento da purificação	variável de controle
λ	Taxa de falha espontânea do sistema	Taxa de falha por decoerência dos qubits	$1/f_n$
p	Probabilidade de sucesso do rejuvenescimento	Probabilidade de sucesso da purificação	1
π_D	Fração de tempo de inatividade do sistema	Fração de tempo indisponível devido à purificação ou falha	métrica de interesse
n	–	Número de iterações de purificação por ciclo	parâmetro de entrada
f_n	–	Fidelidade após n iterações de purificação	definida recursivamente por (2) [Bennett et al. 1996]
$1/g_n$	–	Tempo médio para concluir purificação com n passos	n ou \sqrt{n}

tral a ser minimizada é a fração de tempo em que o sistema permanece inativo, a qual depende tanto do tempo de recuperação em caso de falha quanto do tempo necessário para realizar o rejuvenescimento. Seja π_D a fração total de tempo de inatividade do sistema (*downtime*), com π_F representando o tempo em estado de falha e π_R o tempo em rejuvenescimento:

$$\pi_D = \pi_F + \pi_R \quad (1)$$

Nosso objetivo é minimizar π_D , buscando estratégias que equilibrem a fidelidade dos estados entrelaçados com a disponibilidade do sistema. Para isso, consideramos como variáveis de controle tanto o número de iterações de purificação n , quanto a taxa de rejuvenescimento r_4 . Essa formulação permite capturar de forma integrada o impacto desses parâmetros sobre a fidelidade final e os períodos de indisponibilidade, abrangendo tanto os efeitos de falhas quanto os custos temporais da purificação.

3. Enxergando Purificação como Rejuvenescimento

A *purificação de passo único* consiste em uma operação realizada uma única vez com o objetivo de aumentar a fidelidade de pares entrelaçados. Esse processo combina dois pares de estados entrelaçados com baixa fidelidade e realiza medições para selecionar os pares com fidelidade mais alta. Um exemplo dessa estratégia de purificação, que seguimos neste trabalho, é apresentado em [Bennett et al. 1996]. Em particular, essa estratégia permite a aplicação *iterativa* da purificação. A *purificação em múltiplos passos* estende o processo de passo único ao iterar a purificação diversas vezes. Essa abordagem iterativa melhora progressivamente a fidelidade dos estados entrelaçados. A fidelidade após n iterações de purificação é dada por:

$$f_n = \frac{f_{n-1}^2 + \frac{1}{9}(1 - f_{n-1})^2}{f_{n-1}^2 + \frac{2}{3}f_{n-1}(1 - f_{n-1}) + \frac{5}{9}(1 - f_{n-1})^2} \quad (2)$$

onde f_n representa a fidelidade após n iterações [Bennett et al. 1996].

A purificação é um procedimento probabilístico. Em particular, o protocolo proposto em [Bennett et al. 1996] tem sucesso com probabilidade $p > 1/4$. Para simplificar, assumimos $p = 1$ nas análises que se seguem, uma vez que falhas decorrentes de baixa fidelidade já estão incorporadas ao modelo de rejuvenescimento por meio dos parâmetros r_2 e λ . A extensão dos resultados para o caso em que $1/4 < p < 1$ é direta. A seguir, ilustramos como estratégias de purificação podem ser usadas para parametrizar o modelo de rejuvenescimento.

Para isso, lembramos que n é o número de iterações de purificação. Quanto maior o valor de n , maior será a fidelidade final, mas também mais demorado será o processo de rejuvenescimento. Assumimos o seguinte: Quanto maior a fidelidade alcançada, mais tempo levará para o sistema tornar-se propenso a falhas e eventualmente falhar. Em particular, assumimos um modelo geométrico em que $r_2 = \lambda = 1/f_n$.¹ Além disso, quanto maior a fidelidade alvo, mais tempo leva para completar o processo de rejuvenescimento. Assumimos $r_3 = g_n$, onde $1/g_n$ é o tempo médio para concluir o rejuvenescimento.

Finalmente, deixamos r_1 variar entre 1 e 10 e avaliamos como a taxa de rejuvenescimento r_4 impacta a disponibilidade do sistema. Lembrando que π_D é a fração de tempo de inatividade temos, a partir da solução estacionária da cadeia de Markov na Figura 2, em conjunto com Eq. (1), fazendo $p = 1$, $r_3 = g_n$ e $r_2 = \lambda = 1/f_n$, obtemos:

$$\pi_{D,n}(r_1, r_4) = \pi_F + \pi_R = \frac{1/(f_n \cdot r_1) + r_4/g_n}{1 + 1/(f_n \cdot r_1) + r_4/g_n + 1 + r_4 \cdot f_n}. \quad (3)$$

A seguir, ilustramos o comportamento da equação acima para alguns cenários de interesse.

Qual é o número ótimo de rodadas de purificação? Na Figura 3(a), mostramos $\pi_{D,n}$ como uma função de n , para $f_0 = 0,6$, assumindo $g_n = 1/n$. À medida que o número de iterações de purificação aumenta, a probabilidade de inatividade também aumenta. Isso ocorre porque a redução na taxa de falhas, decorrente do aumento na fidelidade, é dominada pelo aumento no tempo de rejuvenescimento. Note também que, quando $r_4 = 10$, a fração de tempo de inatividade é praticamente insensível a r_1 . No entanto, quando r_4 diminui, o sistema torna-se mais sensível à taxa de reparo, pois entra em estado de falha com mais frequência. Assim, o modelo captura a sobrecarga causada por estratégias agressivas de purificação, equilibrando essa sobrecarga com as falhas potenciais decorrentes de baixa fidelidade.

A Figura 3(b) mostra $\pi_{D,n}$ como função de n , para $f_0 = 0,6$ e $g_n = 1/\sqrt{n}$. Agora, a sobrecarga causada por iterações adicionais de purificação cresce de forma sublinear, como \sqrt{n} , em contraste com o crescimento linear do exemplo anterior. Nesse caso, observamos que a indisponibilidade inicialmente diminui e depois aumenta com o crescimento de n . De fato, a diminuição inicial é devida aos ganhos em fidelidade proporcionados pelas iterações adicionais de purificação. No entanto, à medida que n continua aumentando, a indisponibilidade causada pelo processo de purificação passa a dominar, e o tempo total de inatividade do sistema cresce. À medida que a taxa de recuperação de

¹Em trabalhos futuros, pretendemos considerar outros modelos, como por exemplo, $1/r_2 = 1/\lambda = 1/(1 - f_n)$. Nesse caso, o tempo médio até uma falha corresponde à média de uma variável geométrica com probabilidade de falha $1 - f_n$.

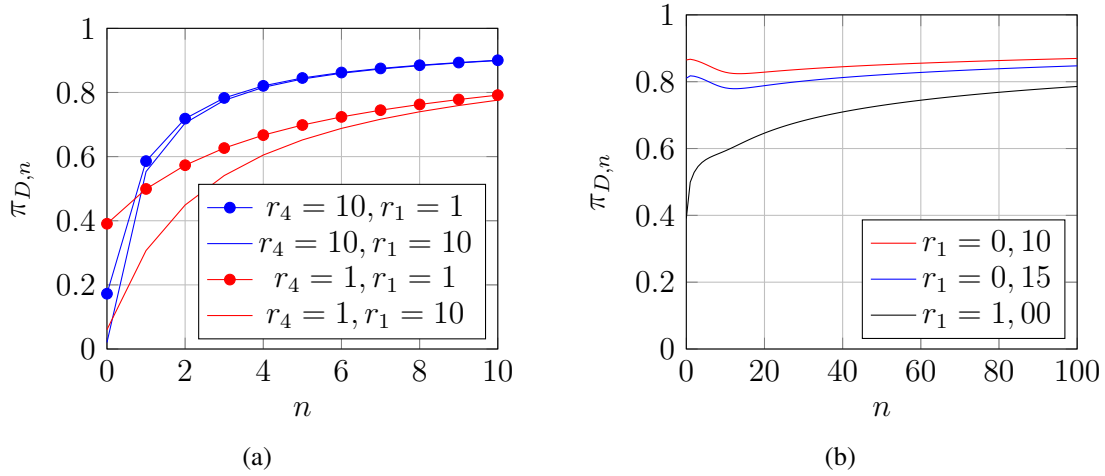


Figura 3. Fração de tempo de inatividade em função do número de iterações de purificação, n , da taxa de rejuvenescimento, r_4 , e da taxa de reparo r_1 : (a) $r_3 = 1/n$ e $f_0 = 0,6$; (b) $r_4 = 1$, $r_3 = 1/\sqrt{n}$ e $f_0 = 0,6$.

falhas (r_1) aumenta, também observamos que a purificação se torna menos atrativa. De fato, o valor ótimo de n é 14, 12 e 0, para r_1 igual a 0,1, 0,15 e 1, respectivamente.

4. Conclusão

Propusemos uma abordagem para avaliar a disponibilidade de redes quânticas, baseadas em estados entrelaçados, tratando a purificação como rejuvenescimento. O modelo resultante permite analisar o equilíbrio entre fidelidade e tempo de inatividade. Estratégias mais agressivas elevam a fidelidade, mas aumentam a indisponibilidade; abordagens leves são mais rápidas, mas menos confiáveis. Como trabalho futuro, visamos estender para múltiplos nós e estratégias adaptativas, incluindo uma análise mais aprofundada da operação fora do regime permanente, da escolha e justificativa dos parâmetros utilizados, bem como da viabilidade prática dos níveis de indisponibilidade obtidos, à luz de comparações quantitativas e qualitativas com a literatura.

Agradecimentos. Este projeto foi parcialmente financiado pela FAPESP (2023/00811-0 e 2023/00673-7), FAPERJ (E-26/204.268/2024), CNPq e CAPES.

Referências

- [Bennett et al. 1996] Bennett, C. H., Brassard, G., Popescu, S., et al. (1996). Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels. *Physical Review Letters*, 76(5):722–725.
- [Huang et al. 1995] Huang, Y. et al. (1995). Software rejuvenation: Analysis, module and applications. In *IEEE Symp. fault-tolerant computing*, pages 381–390.
- [Main et al. 2025] Main, D., Drmota, P., et al. (2025). Distributed quantum computing across an optical network link. *Nature*, pages 1–6.
- [Mobayenjarihani et al. 2023] Mobayenjarihani, M., Vardoyan, G., and Towsley, D. (2023). Optimistic entanglement purification in quantum networks. In *2023 IEEE QCE*, volume 1, pages 1143–1153. IEEE.
- [Tavares et al. 2025] Tavares, D., de Abreu, D. M., Moraes, P., and Abelem, A. (2025). Estratégia de agendamento de purificação híbrida para redes quânticas de canais ruidosos heterogêneos. In *SBRC*. SBC.
- [Xiao et al. 2024] Xiao, Z., Li, J., Xue, K., Yu, N., Li, R., Sun, Q., and Lu, J. (2024). Purification scheduling control for throughput maximization in quantum networks. *Communications Physics*, 7(1):307.