

Medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices para redes complexas

Karine Pires¹, Jaime Cohen^{1,2}, Elias P. Duarte Jr.¹

¹Departamento de Informática – Universidade Federal do Paraná

²Departamento de Informática – Universidade Estadual de Ponta Grossa

Abstract. *This paper presents connectivity measures for complex networks that allows the identification of well connected network nodes. We define the vertex-connectivity of nodes and we show how to compute the measure. The vertex-connectivity is compared to other centrality measures such as betweenness, closeness, eccentricity, degree and edge-connectivity measures. We analyze the measures in extreme cases and in random graphs.*

Resumo. *Neste trabalho apresentamos medidas de conectividade para redes complexas. Essas medidas identificam os nodos importantes em uma rede de acordo com a conectividade dos mesmos em relação aos demais nodos. Mostramos como calcular o valor da medida que chamamos de vértice-conectividade e que denotamos por $\kappa(v)$. Relacionamos o valor da vértice-conectividade com outras medidas como grau de intermediação, closeness, excentricidade, grau e medidas baseadas em cortes de arestas. Analisamos as medidas em casos extremos e em redes sintéticas aleatórias.*

1. Introdução

Redes complexas tem por objetivo modelar qualquer sistema, natural ou artificial, que possua muitas partes discretas que interagem entre si. Por conta dessa generalidade, o conhecimento sobre redes complexas pode ser aplicado a inúmeras áreas do conhecimento como física, computação, telecomunicações, astronomia e outras [Barabási 2003, Costa et al. 2006]. Também podem ser encontradas aplicações de sistemas complexos em redes reais, como, por exemplo, aquelas que modelam relações existentes entre pessoas [Leskovec et al. 2010, Liljeros et al. 2001], redes de energia [Watts and Strogatz 1998] e a Internet [Faloutsos et al. 1999, Albert et al. 1999, Albert et al. 2000].

Dentre as aplicações de redes complexas na área da computação, está a simulação de eventos, como a propagação de vírus em uma rede [Balthrop et al. 2004] ou o estudo do comportamento de algoritmos de roteamento que possibilitam torná-los mais eficientes ou mais seguros [Echenique et al. 2005].

A área de grafos, apesar de já amplamente estudada, conta com enorme atividade científica atualmente quando relacionada às aplicações em redes complexas. Dentre os conceitos estudados e aplicados às redes complexas estão medidas para a caracterização de redes. As medidas propostas não são individualmente suficientes para caracterizar as redes complexas e há a necessidade de considerar um conjunto de várias medidas para encontrar resultados satisfatórios [Costa et al. 2006]. É com este intuito que propomos a medida apresentada neste trabalho, a qual esperamos mostrar ser capaz de contribuir para a compreensão das redes complexas.

Dentre as medidas existentes, destacamos algumas. São elas: grau, grau de intermediação (*betweenness centrality*), *closeness* e excentricidade. O grau é a medida mais óbvia e consiste no número de arestas incidentes ao vértice. O grau de intermediação (*betweenness*) [Freeman 1977] mede quantos caminhos mínimos entre pares de vértices passam pelo vértice avaliado. A medida *closeness* [Okamoto et al. 2008] é definida como a média das distâncias entre um vértice e todos os outros vértices do grafo. A excentricidade [Hage 1995] de um vértice é o máximo das distâncias desse vértice a qualquer outro vértice no grafo.

As medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas [Cohen et al. 2011] têm por objetivo encontrar um valor que determine a conectividade de um nodo em relação aos demais nodos da rede. Para tal, elas são fundamentadas no conceito de conectividade de arestas de conjuntos de nodos. Com estas medidas é possível caracterizar efeitos de falhas de enlace em redes de computadores. Em particular, elas permitem encontrar vértices que são mais difíceis de serem desconectados da rede.

A *vértice-conectividade*, nome dado à medida proposta, tem como conceito base a conectividade entre os nodos levando em conta a possibilidade de falha em outros nodos. Ela nos permite encontrar os nodos de maior importância numa rede em relação a vértice-conectividade destes com outros nodos. Uma possível aplicação dessas medidas é a seleção de um conjunto de nodos com máxima confiabilidade em relação a comunicação entre eles.

As medidas de conectividade são menos locais do que o grau. Com efeito, elas são parametrizadas de forma a torná-las ainda mais globais dependendo desse parâmetro. O grau do vértice determina o número de arestas que necessitam ser removidas para desconectá-lo totalmente de todos os demais. Porém, é possível que a falha de uma única aresta seja suficiente para separar esse vértice de grau alto de qualquer outro vértice específico da rede, como é o caso em uma rede com topologia de estrela. Por outro lado, uma medida de conectividade alta garante que o nodo é difícil de ser isolado de pelo menos um outro nodo da rede através de falhas de enlaces ou de nodos dependendo do tipo de conectividade escolhido.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 são apresentadas as medidas grau, grau de intermediação, *closeness*, excentricidade e aquelas baseadas em cortes de arestas. Na seção 3 são descritas as medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices. Na seção 4 é apresentado o algoritmo para o cálculo da medida. Experimentos e comparações com as medidas citadas anteriormente são apresentados na seção 5. A última seção apresenta as conclusões.

2. Medidas de Conectividade

Nesta seção definimos algumas importantes medidas de centralidade de nodos de redes.

Dado um grafo $G = (V, E)$ onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas, o *grau* de um vértice v , denotado por $deg(v)$, é igual ao número de arestas incidentes ao vértice v .

O *grau de intermediação* ou *betweenness* [Freeman 1977] de um vértice mede quantos caminhos mínimos entre pares de vértices passam por ele. O grau de intermediação é calculado através da seguinte fórmula:

$$B_u = \sum_{ij} \frac{\sigma(i, u, j)}{\sigma(i, j)}$$

onde $\sigma(i, u, j)$ é o número de caminhos mínimos entre os vértices i e j que passam pelo vértice u e $\sigma(i, j)$ é o número total de caminhos mínimos entre os vértices i e j . Por convenção fazemos $\sigma(i, j) = 1$ quando $i = j$.

A medida *closeness* de um vértice é definida como o inverso da média das distâncias entre o vértice e todos os outros vértices do grafo, ou seja:

$$C_u = \frac{|V| - 1}{\sum_{i \in V, i \neq u} d_G(u, i)}$$

onde $d_G(u, i)$ é a distância entre os vértices u e i , isto é, o número de arestas de um caminho mínimo entre u e i .

A excentricidade de um vértice é a distância máxima do vértice aos outros vértices do grafo, definida por:

$$E_u = \max\{d_G(u, i) \mid i \neq u, i \in V\}$$

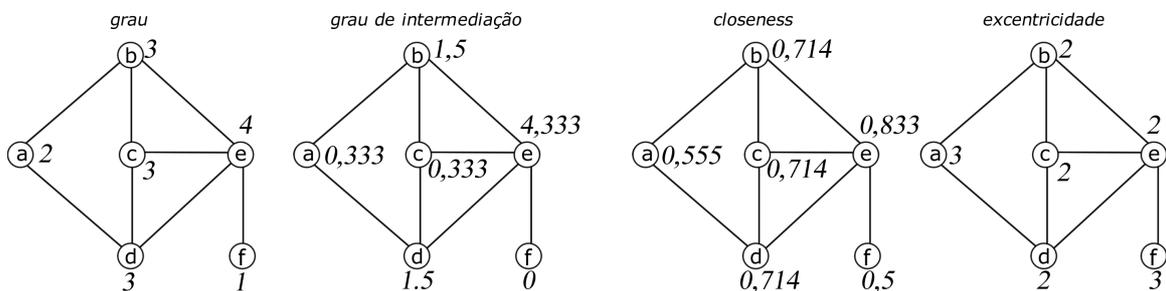


Figura 1. Exemplos de grafos com os valores das medidas de centralidade.

A figura 1 mostra os valores das medidas de centralidade para um mesmo grafo. No primeiro grafo temos o grau dos vértices. O grafo seguinte apresenta o valor do grau de intermediação dos vértices. Por exemplo, o cálculo do grau de intermediação do vértice a é feito assim:

$$\begin{aligned} B_a &= \sum_{ij} \frac{\sigma(i, a, j)}{\sigma(i, j)} \\ &= \frac{\sigma(a, a, a)}{\sigma(a, a)} + \frac{\sigma(a, a, b)}{\sigma(a, b)} + \dots + \frac{\sigma(b, a, d)}{\sigma(b, d)} + \dots + \frac{\sigma(e, a, f)}{\sigma(e, f)} + \frac{\sigma(f, a, f)}{\sigma(f, f)} \\ &= \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \dots + \frac{1}{3} + \dots + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} \\ &= 0,333 \end{aligned}$$

Note que todos os valores omitidos no cálculo anterior são zeros, pois o único caminho mínimo que passa pelo vértice a é o caminho entre os vértices b e d . Portanto, $\sigma(b, a, d) = 1$. Por outro lado, existem três caminhos mínimos entre os vértices b e d , logo, $\sigma(b, d) = 3$.

O terceiro grafo trás os valores da medida *closeness*. Para o vértice a , o cálculo é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{|V| - 1}{\sum_{i \in V, i \neq a} d(a, i)} \\ &= \frac{6 - 1}{d(b, a) + d(c, a) + d(d, a) + d(e, a) + d(f, a)} \\ &= \frac{5}{5} \\ &= \frac{1 + 2 + 1 + 2 + 3}{5} \\ &= 0.5555555555555555\dots \end{aligned}$$

O último grafo da figura 1 mostra os valores de excentricidade. Para o vértice a , temos que o valor da excentricidade é:

$$\begin{aligned} E_a &= \max\{d(a, i) \mid i \neq a, i \in V\} \\ &= \max\{d(b, a), d(c, a), d(d, a), d(e, a), d(f, a)\} \\ &= \max\{1, 2, 1, 2, 3\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Medidas de Conectividade Baseadas em Cortes de Arestas Descrevemos a seguir as medidas de conectividade para nós de uma rede baseadas em cortes de arestas. Estas medidas foram apresentadas em [Duarte Jr. et al. 2004] e [Cohen et al. 2011] e estatísticas e experimentos em redes reais foram apresentados em [Cohen et al. 2011]. O objetivo destas medidas é encontrar um valor significativo a fim de avaliar a conectividade de um nodo em relação à rede. A medida de conectividade mais óbvia é o grau do nodo. Entretanto, em muitas aplicações ela não é ideal. O conceito base para a nova medida é a definição da conectividade de aresta entre pares de nodos do grafo.

A topologia da rede é representada por um grafo não direcionado $G = (V, E)$, onde V são vértices que representam os nodos da rede e E é o conjunto de arestas que representam as ligações entre os nodos da rede. Seja $X \subseteq V$. Denota-se por $\delta(X)$ o conjunto de arestas $\{u, v\}$ tal que $u \in X$ e $v \in V \setminus X$. Chama-se o conjunto de arestas $C \subseteq E$, $C \neq \emptyset$, um *corte* se $C = \delta(X)$ para algum $X \subseteq V$. Um corte $C = \delta(X)$ *separa* dois vértices s e t se $s \in X$ e $t \in V \setminus X$. Um *s-t-corte mínimo* é um corte de cardinalidade mínima que separa s de t .

Em grafos sem pesos, o tamanho do corte mínimo que separa dois vértices s e t é igual ao número máximo de caminhos aresta-disjuntos que conectam s e t . Em grafos ca-

pacitados essa relação é dada pelo conhecido teorema do Corte Mínimo - Fluxo Máximo [Korte and Vygen 2002].

Uma definição importante é:

Definição 1 *Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado. Considere um conjunto de vértices $X \subseteq V$. A aresta-conectividade de X em relação a G é o tamanho do corte mínimo que separa quaisquer pares de vértices em X . Denotamos a aresta conectividade de X por $\lambda(X)$.*

É importante observar que a aresta-conectividade de um conjunto de nodos X é diferente da aresta-conectividade de um subgrafo induzido por X . A razão é que os cortes mínimos são obtidos de G e não do subgrafo induzido por X . O subgrafo induzido por X pode não ter arestas e ainda X possuir a maior aresta-conectividade. A figura 2 ilustra tal situação, onde o conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ tem aresta-conectividade 3 e o grafo induzido por X não possui nenhuma aresta [Cohen et al. 2011].

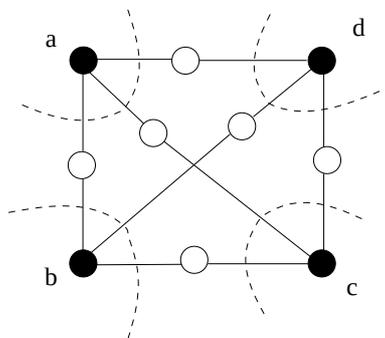


Figura 2. Conjunto de vértices com indicação dos cortes mínimos [Cohen et al. 2011]. A aresta-conectividade de $\{a, b, c, d\}$ é 3.

Em seguida definimos as medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas.

Definição 2 *O número de conectividade de índice i de um nodo v , denotado por $\lambda_i(v)$, é o maior valor da aresta-conectividade de um conjunto $X \subseteq V$ satisfazendo:*

- i. $v \in X$, e
- ii. $|X| \geq i$

A figura 3 mostra um exemplo do critério de conectividade. Os números associados aos nodos são os números de conectividade $\lambda_2(v)$. As áreas circuladas identificam os componentes de maior conectividade. Para calcular os números de conectividade com índice 2, é necessário verificar a máxima aresta-conectividade de conjuntos com 2 nodos. Por exemplo, $\lambda_2(a) = 4$ pois os nodos a e b não podem ser separados por um corte com menos do que 4 arestas e a aresta-conectividade entre a e outro nodo qualquer é de no máximo 4. Quando o índice i em $\lambda_i(v)$ é 3, somente conjuntos com pelo menos 3 nodos são considerados. Por exemplo, $\lambda_3(d) = 4$ porque qualquer conjunto que contenha d com pelo menos três nodos tem aresta-conectividade pelo menos 4. Observe, entretanto, que $\lambda_2(d) = 5$.

Por convenção, $\lambda_1(v)$ é definido como o grau de v e $\lambda_n(v)$, onde $n = |V|$, é, por definição, o tamanho do menor corte de aresta global. O número de conectividade é uma medida unificada que, conforme i aumenta de 1 a $|V|$, $\lambda_i(v)$ inicia como uma propriedade local e termina como uma propriedade global da rede. Propriedades dos números de conectividade são discutidas em [Cohen et al. 2011].

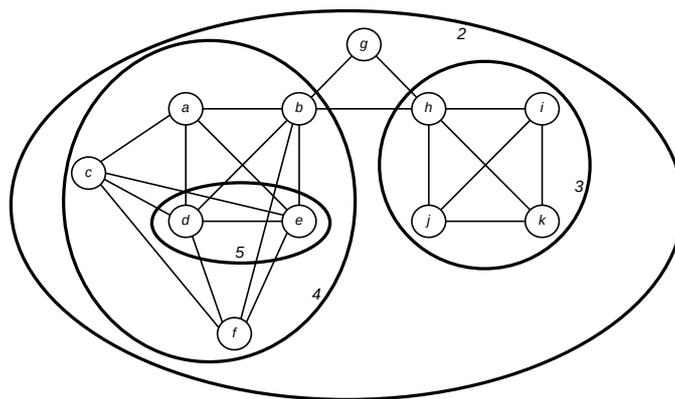


Figura 3. Conectividade baseada em cortes de arestas [Cohen et al. 2011].

3. Medidas de Conectividade Baseadas em Cortes de Vértices

As medidas baseadas em cortes de vértices tem por objetivo encontrar um valor que determine a importância de um nodo em relação a sua vértice-conectividade a outros nodos da rede. A medida é baseada no conceito de conectividade de vértices.

A rede que queremos caracterizar é representada por um grafo não direcionado $G = (V, E)$, onde V é um conjunto de vértices que representam os nodos desta rede e E o conjunto de arestas que representam os enlaces entre os nodos da rede.

Definimos a seguir a *vértice-conectividade* de um conjunto de vértices [Nagamochi and Ibaraki 2008].

Definição 3 Dados dois vértices $s, t \in V$, a *vértice-conectividade* entre s e t , denotada por $\kappa(s, t)$, é o número de caminhos vértice-disjuntos entre s e t .

Definição 4 A *vértice-conectividade* de um conjunto $X \subseteq V$ é a menor *vértice-conectividade* entre quaisquer pares de vértices em X e é denotada por $\kappa(X)$.

A medida de conectividade de nodos baseada em vértice-conectividade está definida a seguir:

Definição 5 Definimos a *i -vértice-conectividade* de um vértice v , denotada por $\kappa_i(v)$, como a maior *vértice-conectividade* de um conjunto $X \subseteq V$ satisfazendo:

- i. $v \in X$, e
- ii. $|X| \geq i$

Para ilustrar a diferença entre as medidas de conectividade baseadas em arestas e as medidas de conectividade baseadas em vértices, observe a figura 4. Ela mostra um exemplo de grafo com valores de aresta-conectividade diferentes do valor da vértice-conectividade. Note que os vértices 1 e 5 são os que possuem valores com maior discrepância. Por exemplo, $\lambda_2(1) = 5$ pois a máxima aresta-conectividade dos conjuntos da forma $X = \{1, u\}$, $u \in V - \{1\}$, é 5. Caso quiséssemos calcular a 3-aresta-conectividade, então tomaríamos conjuntos X com 3 vértices. Por outro lado, $\kappa_2(1) = 3$ pois a máxima vértice-conectividade dos conjuntos da forma $X = \{1, u\}$, $u \in V - \{1\}$, é 3. Note que o conjunto de vértices $\{2, 3, 4\}$ separam os vértice 1 e 5. Esse exemplo deixa claro que a vértice-conectividade se relaciona com os caminhos vértice-disjuntos e que a aresta-conectividade é relacionada com os caminhos aresta-disjuntos e que pode haver discrepância entre as duas medidas.

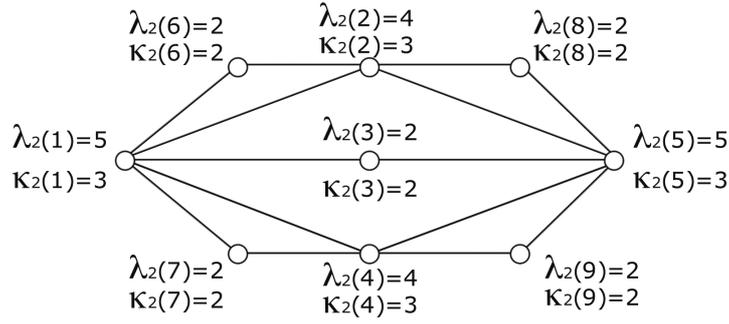


Figura 4. Grafo com discrepância entre os valores da aresta-conectividade e da vértice-conectividade.

Algorithm 1 Gera grafo com discrepância entre aresta-conectividade e vértice-conectividade

Entrada: k , discrepância desejada

Saída: grafo com discrepância k entre a aresta-conectividade e a vértice-conectividade

for i de $k + 1$ até 1 passo -1 **do**

for j de 0 até 2^{k+1} passo 2^{k-i+1} **do**

 imprime aresta $\{j + 1, j + 2^{k-i+1} + 1\}$

end for

end for

imprime arestas $\{1, 2^{k+1} + 2\}, \{2^{k+1} + 2, 2^{k+1} + 1\}, \{1, 2^{k+1} + 3\}$ e $\{2^{k+1} + 3, 2^{k+1} + 1\}$

Lema 1 Dado um grafo $G = (V, E)$ e $v \in V$, tem-se que $\kappa_i(v) \leq \lambda_i(v)$.

Esse lema decorre do fato que todo caminho vértice-disjunto também é um caminho aresta-disjunto. Portanto, a vértice-conectividade de um par de vértices é menor do que ou igual à aresta-conectividade entre eles. O mesmo vale para a conectividade de conjuntos de vértices.

O Algoritmo 1 produz grafos com uma discrepância arbitrária entre a vértice-conectividade e a aresta-conectividade. Esses grafos generalizam o grafo da figura 4.

4. Algoritmo para Cálculo do Valor $\kappa_2(v)$

Para calcular o critério de conectividade baseado em vértices, que chamamos de $\kappa_i(v)$, necessita-se encontrar cortes de vértices mínimos. Ao invés de resolver diretamente o problema dos cortes de vértices, utilizamos uma estratégia descrita em [Nagamochi and Ibaraki 2008] que consiste em reduzir o problema dos cortes de vértices ao problema dos cortes de arestas. Essa redução se aplica a grafos orientados, portanto os grafos não-orientados são, primeiramente, transformados em grafos orientados.

Um grafo não orientado pode ser transformado em grafo orientado através da duplicação das arestas do grafo original, fazendo com que uma aresta $\{a, b\}$ corresponda a duas arestas direcionadas $\{(a, b), (b, a)\}$ no novo grafo.

Para encontrar os cortes de vértices do grafo orientado, criamos um novo grafo de forma que os cortes de arestas mínimos do grafo novo correspondam aos cortes de vértices mínimos do grafo original. Veja a figura 5. Para cada vértice v do grafo original, o grafo transformado contém dois vértices, v' e v'' . As arestas com origem no vértice v do grafo

original têm como origem no grafo novo o vértice v'' . As arestas com destino no vértice v no grafo original têm como destino v' no grafo transformado. Por fim, adicionamos ao novo grafo arestas direcionadas (v', v'') entre todos os pares de vértices associados. As arestas do tipo (v', v'') recebem capacidade de valor 1 e as demais arestas recebem capacidade $n - 1$. Essas capacidades garantem que os cortes de arestas de capacidade mínima utilizem somente as arestas que correspondem aos vértices do grafo original, o que justifica a redução entre os problemas.

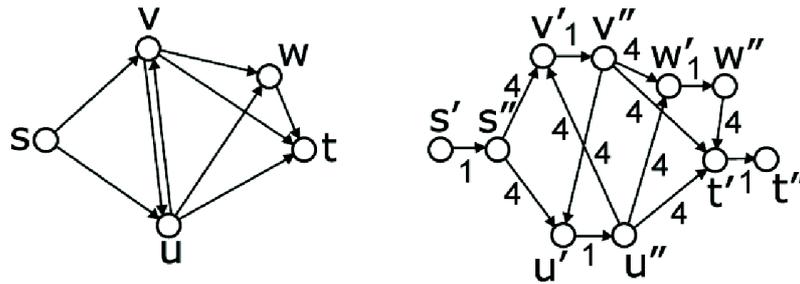


Figura 5. Transformação de grafo orientado para aplicação de corte de arestas [Nagamochi and Ibaraki 2008].

Nesse novo grafo aplicamos o algoritmo de fluxo máximo para encontrar o corte mínimo de arestas entre pares de vértices s e t . Para que a transformação corretamente encontre a vértice-conectividade, que foi definida em termos de caminhos vértice-disjuntos entre s e t , ainda é necessário tratar o caso em que a aresta $(s, t) \in E$. Nesse caso, a aresta (s'', t') recebe capacidade 1 para que seja incluída no corte mínimo. Assim, o valor do fluxo máximo entre s'' e t' no grafo transformado corresponde à vértice-conectividade entre s e t no grafo original.

Para calcular $\kappa_2(v)$ utilizamos a transformação descrita acima entre v e todos os demais vértices do grafo. A máxima vértice-conectividade encontrada é o valor $\kappa_2(v)$.

A complexidade de tempo do algoritmo para o cálculo de 2-vértice-conectividade requer o cálculo de $n - 1$ fluxos máximos para cada vértice. O cálculo do fluxo máximo é facilitado pela estrutura do grafo transformado que possui vértices que são o destino de apenas uma aresta ou são a origem de apenas uma aresta. Nesse caso, o algoritmo de Diniz tem complexidade de tempo de $O(m\sqrt{n})$ [Nagamochi and Ibaraki 2008]. Logo, a complexidade de tempo para o cálculo de $\kappa_2(v)$ é $O(nm\sqrt{n})$.

Os valores de $\kappa_i(v)$ para $i > 2$ podem ser calculados considerando conjuntos de tamanho i , porém tal abordagem não é eficiente. Nós não conhecemos algoritmos eficientes para calcular $\kappa_i(v)$ em geral, ao contrário do que ocorre com $\lambda_i(v)$ que pode ser calculado em tempo polinomial para qualquer valor de i .

5. Resultados Experimentais

Nesta seção apresentamos alguns resultados experimentais. O algoritmo que calcula as medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices foi implementado em linguagem C++. Um *script* na linguagem *python* foi utilizado para executar os experimentos e gerar os gráficos.

Utilizamos nos experimentos um grafo do modelo de rede de *Barabási-Albert* [Albert et al. 2000]. O modelo *Barabási-Albert* define um algoritmo que gera redes da classe *power-law*, livres de escala. O modelo possui dois importantes conceitos: o de crescimento e de preferência de conexão. O crescimento é o aumento do número de nodos na rede ao passar do tempo. A preferência de conexão é calculada da seguinte maneira: quanto maior é o grau do nodo, maior é a probabilidade dele receber novas conexões.

A rede utilizada nos experimentos tem 100 nodos. Apresentamos a seguir os gráficos das correlações entre a medida proposta e outras medidas de conectividade.

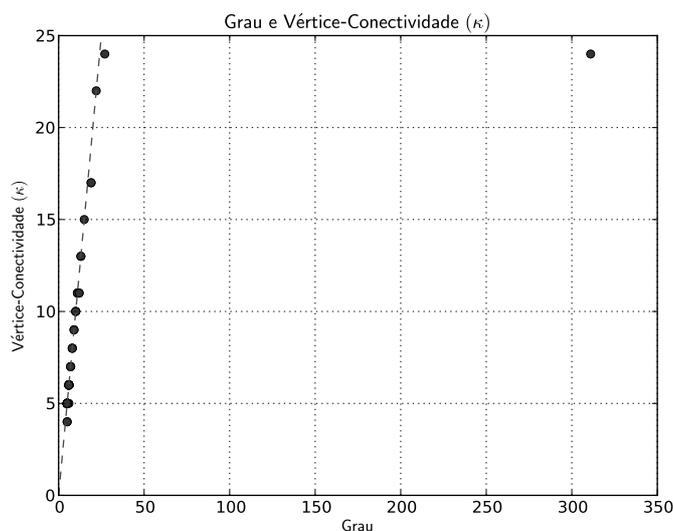


Figura 6. Relação entre medida de conectividade baseada em vértices e grau.

A figura 6 ilustra a diferença entre a medida proposta e o grau. O eixo x corresponde aos valores obtidos da medida grau e o eixo y corresponde aos valores obtidos com as medidas de conectividade baseadas em vértices. É possível perceber que para diversos pontos os valores do grau e da medida resultam próximos. Entretanto, em particular para o vértice de maior grau, a diferença é grande. Isso se deve ao fato de que o modelo utilizado gera várias conexões do primeiro nodo com o resto da rede. Nesse caso específico, enquanto o grau chega a 311, λ_2 não passa de 24. A medida proposta nos releva que existe também outro nodo muito importante na rede, que possui conectividade 22, e não somente o primeiro.

A figura 7 mostra a relação entre a medida de conectividade proposta e o grau de intermediação e releva uma diferença ainda maior para o primeiro nodo. Isso se deve ao fato de haver um único valor muito alto gerado pelo grau de intermediação.

A relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida *closeness* é ilustrada na imagem 8. A medida *closeness* tem todos os valores entre 0 e 1.

A excentricidade é um valor praticamente constante no grafo analisado. No caso, temos um nodo de valor 1 e todos os outros valores são 2, como pode ser visto no gráfico da figura 9.

Temos pequenas diferenças que podemos notar no gráfico da figura 10 entre as

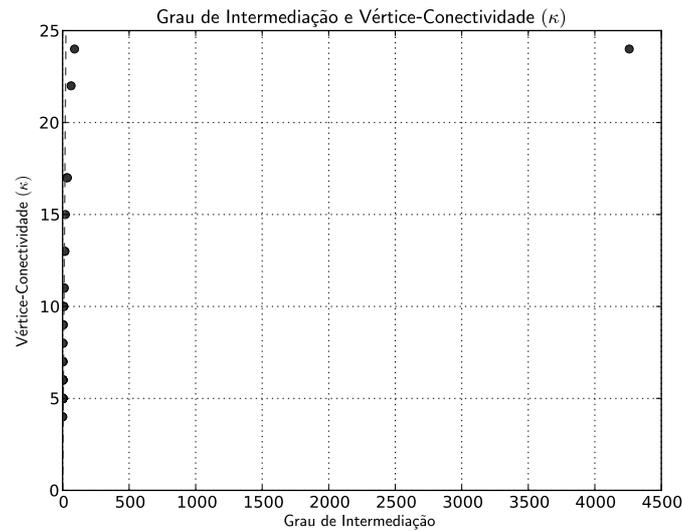


Figura 7. Relação entre medida de conectividade baseada em vértices e grau de intermediação.

medidas de conectividade baseadas em arestas e as medidas propostas. A diferença entre os valores médios é pequena mas está presente.

Na figura 11 temos o resultado dos valores gerados a partir de um experimento que utilizou um grafo gerado com o Algoritmo 1. Esse grafo tem como objetivo demonstrar que as medidas de conectividade baseadas em arestas e as medidas de conectividade baseadas em vértices podem ter discrepâncias grandes.

6. Conclusão

Nesse trabalho foram propostas medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices. As medidas propostas podem contribuir para caracterização de redes complexas, uma vez que, para caracterizá-las, é necessário a seleção de um conjunto de medidas.

A i -vértice-conectividade de um vértice v , denotada como $\kappa_i(v)$, determina o valor da conectividade baseada em cortes de vértices para um vértice v . Essas medidas caracterizam os efeitos de falhas de nodos em uma rede e fundamenta-se no cálculo cortes de vértices. Para calcular o corte de vértices utilizamos uma redução do problema de cortes de vértices ao problema de cortes de arestas.

Observamos que o grau e o grau de intermediação (*betweenness*) amplificam casos extremos e raros que nem sempre são relevantes.

A desvantagem da medida proposta é o alto custo computacional do seu cálculo e a semelhança dos valores em relação a aresta-conectividade em diversos grafos. Em outras palavras, se estamos interessados em encontrar vértices com alta vértice-conectividade, talvez seja suficiente computar as aresta-conectividade dos mesmos.

Como trabalho futuro serão realizados mais experimentos e outras comparações com outros valores relacionados.

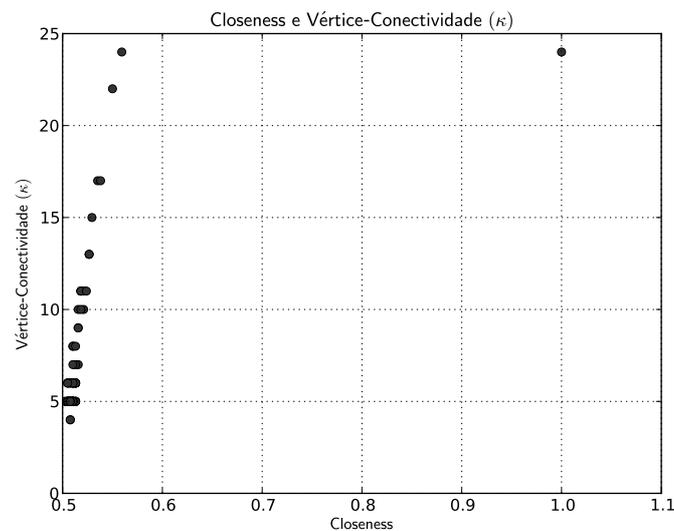


Figura 8. Relação entre medida de conectividade baseada em vértices e *close-ness*.

Agradecimentos

Jaime Cohen é bolsista de doutorado da Fundação Araucária/SETI sob Edital No. 16/2008. Elias P. Duarte teve financiamento do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) sob contrato núm. 304013/2009-9.

Referências

- Albert, R., Barabási, A. L., and Jeong, H. (2000). Scale-free characteristics of random networks: The topology of the world wide web. *Physica A*, 281.
- Albert, R., Jeong, H., and Barabási, A. L. (1999). The diameter of the world wide web. *Nature*, 401.
- Balthrop, J., Forrest, S., Newman, M. E. J., and Williamson, M. M. (2004). Technological networks and the spread of computer viruses. *Science*, 304.
- Barabási, A. L. (2003). *Linked: How Everything Is Connected to Everything Else and What It Means*. Plume.
- Cohen, J., Schroeder, J., and Duarte Jr., E. P. (2011). Connectivity criteria for ranking network nodes. *Communications in Computer and Information Science (CCIS)* - aceito para publicação.
- Costa, L. F., Rodrigues, F. A., Travieso, G., and Boas, P. R. V. (2006). Characterization of complex networks: A survey of measurements. *Advances in Physics*, 56(1).
- Echenique, P., Gómez-Gardeñes, J., and Moreno, Y. (2005). Dynamics of jamming transitions in complex networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 71(2).
- Faloutsos, M., Faloutsos, P., and Faloutsos, C. (1999). On power-law relationships of the internet topology. In *Proceedings of the conference on Applications, technologies, architectures, and protocols for computer communication*, volume 29 of *SIGCOMM '99*.

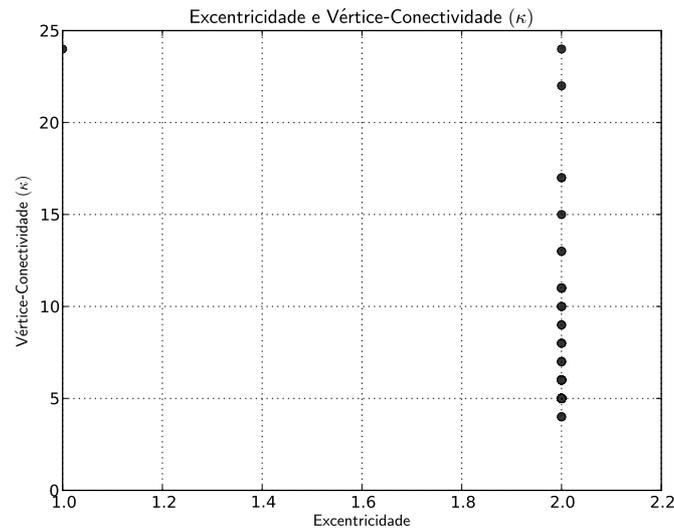


Figura 9. Relação entre medida de conectividade baseada em vértices e excentricidade.

- Freeman, L. C. (1977). A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry*, 40.
- Hage, P. (1995). Eccentricity and centrality in networks. *Social Networks*, 17.
- Korte, B. and Vygen, J. (2002). *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*. Springer, 2nd edition.
- Leskovec, J., Huttenlocher, D., and Kleinberg, J. (2010). Signed networks in social media. *Proceedings of the 28th international conference on Human factors in computing systems*.
- Liljeros, F., Edling, C. R., Amaral, L. A., Stanley, E. H., and Åberg Y. (2001). The web of human sexual contacts. *Nature*, 411.
- Duarte Jr., E. P., Santini, R., and Cohen, J. (2004). Delivering packets during the routing convergence latency interval through highly connected detours. In *DSN*. IEEE Computer Society.
- Nagamochi, H. and Ibaraki, T. (2008). *Algorithmic Aspects of Graph Connectivity*. Cambridge University Press.
- Okamoto, K., Chen, W., and Li, X. (2008). Ranking of closeness centrality for Large-Scale social networks. *Frontiers in Algorithmics*, 5059.
- Watts, D. J. and Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393.

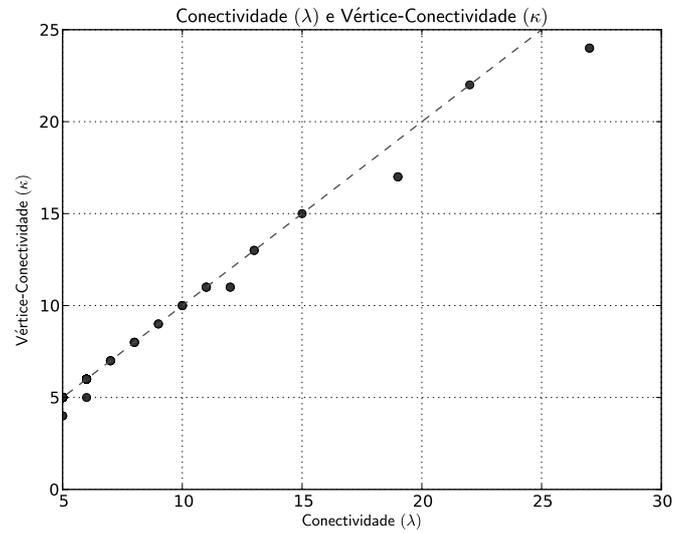


Figura 10. Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida de conectividade baseada em arestas.

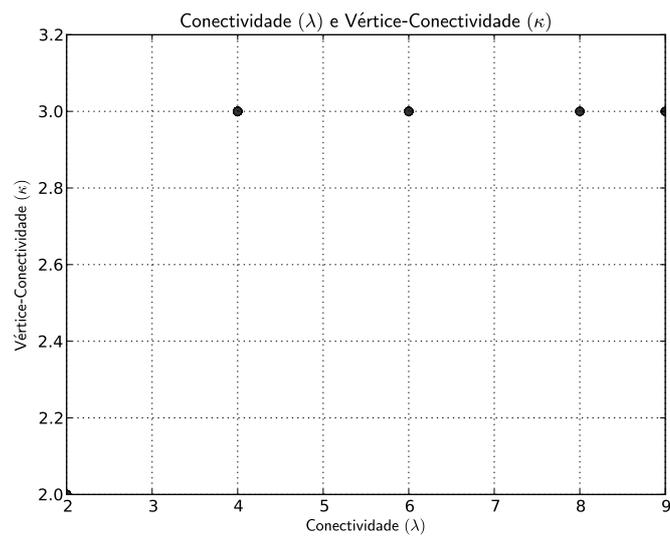


Figura 11. Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida de conectividade baseada em arestas em modelo criado.